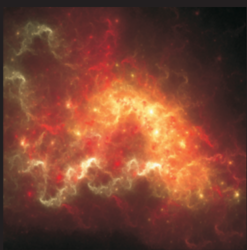
Coleção **olimpo**

IME ITA





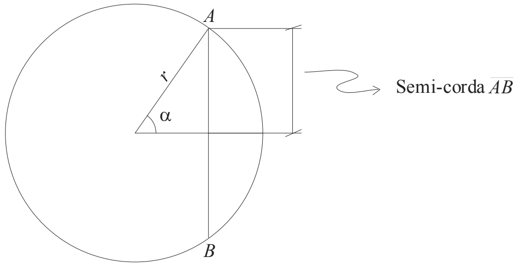


C 01

Introdução

A trigonometria é um assunto que veio se desenvolvendo ao longo da história, não tendo uma origem precisa. A palavra trigonometria foi criada em 1595 pelo matemático alemão Bartholomaus Pitiscus e tem origem nos termos gregos *tri* (que significa três), *gono* (que significa ângulo) e *metron* (que significa medida), ou seja, em sua origem a palavra trigonometria significa: "o estudo das medidas de um triângulo".

No século II a.C. o astrônomo Hiparco fez um tratado de doze livros nos quais estava presente a construção do que se pode chamar de tabela trigonométrica. A tabela de Hiparco consistia em relacionar o ângulo α, da figura a seguir, com a razão entre a semi-corda e o raio da circunferência.

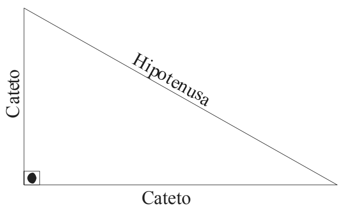


Este assunto foi sendo desenvolvido por povos distintos ao longo da história, logo, sofreu várias traduções até se chegar ao termo *sinus* (palavra do latim que significa "dobra" ou "baía"). O termo sinus, do latim, deu origem ao termo seno, do português, portanto o seno de um ângulo α é a razão entre a semi-corda e o raio.

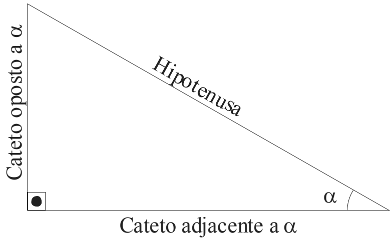
A partir do conceito de seno a trigonometria se desenvolve, surgindo outras funções trigonométricas. Para um estudo introdutório das funções trigonométricas o triângulo retângulo se mostrou uma ferramenta apropriada.

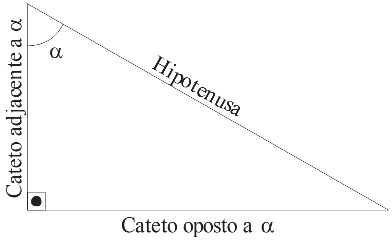
Triângulo retângulo

Triângulo retângulo é todo triângulo que possui um ângulo reto. Neste triângulo o lado oposto ao ângulo reto é chamado de hipotenusa e os demais lados são chamados de catetos, observe a figura:



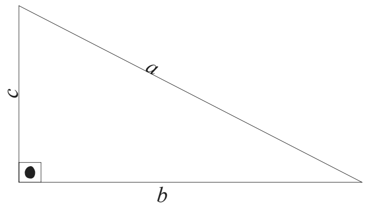
Cada cateto recebe o complemento de oposto ou adjacente dependendo do ângulo de referência da seguinte forma:





.

Em triângulos retângulos vale a relação: “a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa”, que é conhecida como teorema de Pitágoras. Em termos simbólicos tem-se:



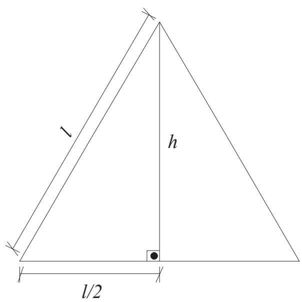
$$a^2 = b^2 + c^2$$

Exemplo:

Qual é a expressão da altura h de um triângulo equilátero, em função do lado l.

Resolução:

A altura de um triângulo equilátero divide o lado oposto em duas partes iguais, com isto, tem-se a figura:



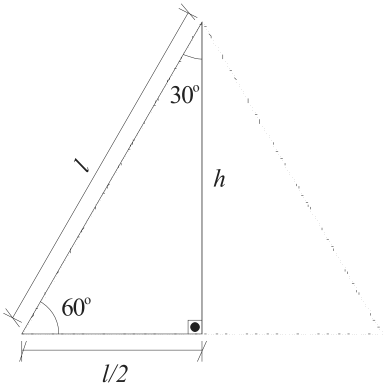
Aplicando o teorema de Pitágoras:

$$l^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + h^2 \Rightarrow h^2 = l^2 - \frac{l^2}{4} \Rightarrow h^2 = \frac{3l^2}{4} \Rightarrow h = \frac{l\sqrt{3}}{2}.$$

Razões trigonométricas no triângulo retângulo

Para o entendimento das razões trigonométricas em um triângulo retângulo é necessário notar que todos os triângulos que apresentam os ângulos internos com as mesmas medidas são semelhantes.

A importância da semelhança pode ser verificada quando se analisa a metade do triângulo equilátero. Ao observar o exemplo anterior nota-se que a razão entre o cateto oposto ao ângulo de $30°$ e a hipotenusa é constante:



$\dfrac{\text{cateto oposto à } 30^o}{\text{hipotenusa}} = \dfrac{l/2}{l} = \dfrac{1}{2}$, como todo triângulo retângulo com um ângulo de $30°$ é semelhante a este, a razão $\dfrac{\text{cateto oposto à } 30^o}{\text{hipotenusa}}$ sempre será igual a $\dfrac{1}{2}$.

As principais razões trigonométricas são:

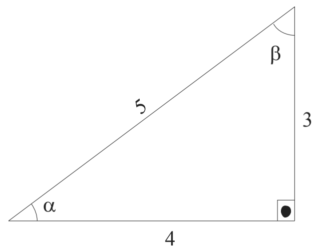
Seno de um ângulo: $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{\text{cateto oposto à } \alpha}{\text{hipotenusa}}$

Cosseno de um ângulo: $\cos\alpha = \dfrac{\text{cateto adjacente à } \alpha}{\text{hipotenusa}}$

- Tangente de ângulo: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\text{cateto oposto à } \alpha}{\text{cateto adjacente à } \alpha}$

Exemplo:

Uma figura muito utilizada é o triângulo pitagórico a seguir:



Para ele têm-se as seguintes razões trigonométricas:

$\operatorname{sen}\alpha = \frac{3}{5}$ $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$ $\operatorname{sen}\beta = \frac{4}{5}$ $\cos\beta = \frac{3}{5}$ $\operatorname{tg}\beta = \frac{4}{3}$

Quando a soma de dois ângulos é igual a $90°$ eles são ditos complementares, logo os ângulos agudos de um triângulo retângulo são complementares. Com isto verifica-se que o seno de um ângulo agudo é o cosseno de seu complementar, ou vice-versa.

$\operatorname{sen}\alpha = \cos\left(90^o - \alpha\right)$ ou $\cos\alpha = \operatorname{sen}\left(90^o - \alpha\right)$

Relações fundamentais

A partir das definições das razões trigonométricas e do teorema de Pitágoras, obtêm-se as seguintes relações:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$$

$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, portanto, se for conhecida uma razão trigonométrica todas as outras podem ser calculadas.

Exemplo:

Sendo α um ângulo agudo e $\operatorname{sen}\alpha = \frac{5}{13}$, determine:

a) $\cos\alpha$ b) $\operatorname{tg}\alpha$

Resolução:

a) $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \left(\frac{5}{13}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{144}{169} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{12}{13}$

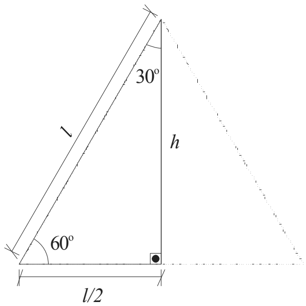
b) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{5/13}{12/13} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{12}$

Tabela de valores trigonométricos

Devido à facilidade da obtenção das razões trigonométricas de alguns ângulos, estes são conhecidos como ângulos notáveis. São eles $30°$, $45°$ e $60°$ e sua tabela de razões trigonométricas é:

	30°	45°	60°
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

A obtenção de tal tabela se dá a partir das figuras:



$$\operatorname{sen} 30^o = \frac{l/2}{l} \qquad \cos 30^o = \frac{l\sqrt{3}/2}{l}$$

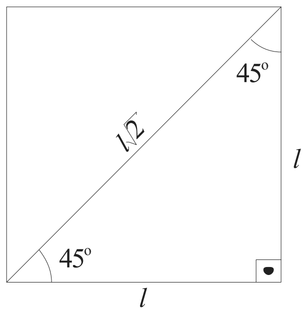
$$\operatorname{sen} 30^o = \frac{1}{2} \qquad \cos 30^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{sen} 60^o = \frac{l\sqrt{3}/2}{l} \qquad \cos 60^o = \frac{l/2}{l}$$

$$\operatorname{sen} 60^o = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos 60^o = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg} 30^o = \frac{l/2}{l\sqrt{3}/2} \qquad \operatorname{tg} 60^o = \frac{l\sqrt{3}/2}{l/2}$$

$$\operatorname{tg} 30^o = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \operatorname{tg} 60^o = \sqrt{3}$$



$$\operatorname{sen} 45^o = \frac{l}{l\sqrt{2}}$$

$$\operatorname{sen} 45^o = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45^o = \frac{l}{l\sqrt{2}}$$

$$\cos 45^o = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 45^o = \frac{l}{l}$$

$$\operatorname{tg} 45^o = 1$$

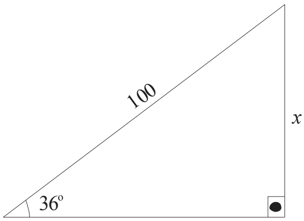
A obtenção dos senos, cossenos e tangentes de outros ângulos não notáveis pode ser um pouco complicada, por isso será apenas fornecida sem a construção devida.

ÂNGULO α	sen α	cos α	tgα
1º	0,018	1,000	0,018
2º	0,035	0,999	0,035
3º	0,052	0,999	0,052
4º	0,070	0,998	0,070
5º	0,087	0,996	0,088
6º	0,105	0,995	0,105
7º	0,122	0,993	0,123
8º	0,139	0,990	0,141
9º	0,156	0,988	0,158
10º	0,174	0,985	0,176
11º	0,191	0,982	0,194
12º	0,208	0,978	0,213
13º	0,225	0,974	0,231
14º	0,242	0,970	0,249
15º	0,259	0,966	0,268
16º	0,276	0,961	0,287
17º	0,292	0,956	0,306
18º	0,309	0,951	0,325
19º	0,326	0,946	0,344
20º	0,342	0,940	0,364
21º	0,358	0,934	0,384
22º	0,375	0,927	0,404
23º	0,391	0,921	0,425
24º	0,407	0,914	0,445
25º	0,423	0,906	0,466
26º	0,438	0,899	0,488
27º	0,454	0,891	0,510
28º	0,470	0,883	0,532
29º	0,485	0,875	0,554
30º	0,500	0,866	0,577
31º	0,515	0,857	0,601
32º	0,530	0,848	0,625
33º	0,545	0,839	0,649
34º	0,559	0,829	0,675
35º	0,574	0,819	0,700
36º	0,588	0,809	0,727
37º	0,602	0,799	0,754

38º	0,616	0,788	0,781
39º	0,629	0,777	0,810
40º	0,643	0,766	0,839
41º	0,656	0,755	0,869
42º	0,669	0,743	0,900
43º	0,682	0,731	0,933
44º	0,695	0,719	0,966
45º	0,707	0,707	1,000

Exemplo:

Determine o valor de x na figura abaixo:

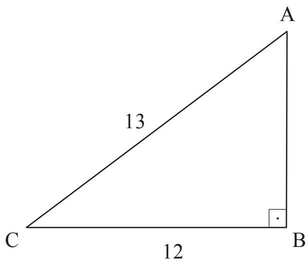


Resolução:

$$\text{sen}\,36^o = \frac{x}{100} \Rightarrow 0,588 = \frac{x}{100} \Rightarrow x = 58,8\,.$$

Exercícios

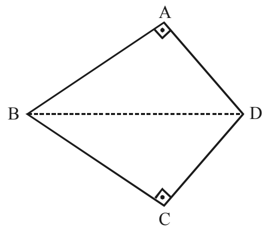
01. (UFPB PB) No triângulo retângulo desenhado ao lado, calcule $\text{tg}\widehat{C}$.



02. (Unificado/RJ) Uma escada de $2\,\text{m}$ de comprimento está apoiada no chão e em uma parede vertical. Se a escada faz $30°$ com a horizontal, a distância do topo da escada ao chão é de:

a) $0,5\,\text{m}$ b) $1\,\text{m}$
c) $1,5\,\text{m}$ d) $1,7\,\text{m}$
e) $2\,\text{m}$

03. (Uniube/MG) No quadrilátero $ABCD$, representado na figura, os ângulos internos $\hat{A}$ e $\hat{C}$ são retos, os ângulos $C\hat{D}B$ e $A\hat{D}B$ medem, respectivamente, $45°$ e $30°$ e o lado CD mede $2\,\text{cm}$. Os lados AD e AB medem, respectivamente



a) $\sqrt{5}\,\text{cm}$ e $\sqrt{3}\,\text{cm}$

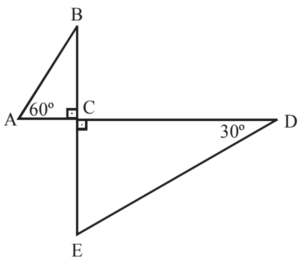
b) $\sqrt{5}\,\text{cm}$ e $\sqrt{2}\,\text{cm}$

c) $\sqrt{6}\,\text{cm}$ e $\sqrt{5}\,\text{cm}$

d) $\sqrt{6}\,\text{cm}$ e $\sqrt{3}\,\text{cm}$

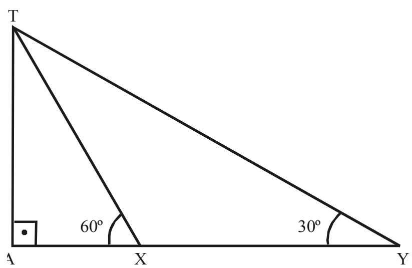
e) $\sqrt{6}\,\text{cm}$ e $\sqrt{2}\,\text{cm}$

04. (UEL PR) Com respeito aos pontos A, B, C, D e E, representados na figura abaixo, sabe-se que $CD = 2 \cdot BC$ e que a distância de D a E é $12\,\text{m}$. Então, a distância de A a C, em metros, é:



a) 6
b) 4
c) 3
d) 2
e) 1

05. (PUC Campinas) Em uma rua plana, uma torre AT é vista por dois observadores X e Y sob ângulos de $30°$ e $60°$ com a horizontal, como mostra a figura abaixo:



Se a distância entre os observadores é de $40\,\text{m}$, qual é aproximadamente a altura da torre? (Se necessário, utilize $\sqrt{2} = 1{,}4$ e $\sqrt{3} = 1{,}7$).

a) $30\,\text{m}$

b) $32\,\text{m}$

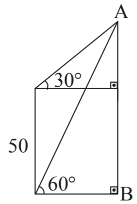
c) $34\,\text{m}$

d) $36\,\text{m}$

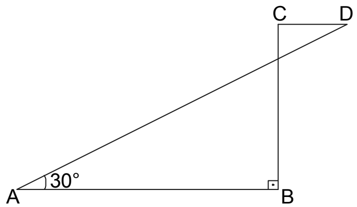
e) $38\,\text{m}$

06. (UnB/DF/Julho) Um observador, estando a L metros da base de uma torre, vê seu topo sob um ângulo de $60°$. Afastando-se $100\,\text{m}$ em linha reta, passa a vê-lo sob um ângulo de $30°$. Determine $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} h$ onde h é a altura da torre.

07. (Mackenzie SP) Na figura abaixo determinar o valor AB.



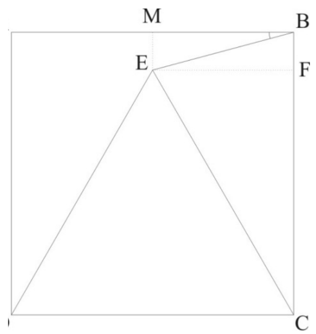
08. (Unifor/CE/Julho) Na figura abaixo $\overline{CD} \parallel \overline{AB}$, $CD = 12\,\text{m}$ e $AB = 48\,\text{m}$.



A medida do segmento $\overline{AD}$, em metros, é aproximadamente igual a

a) 78
b) 74
c) 72
d) 68
e) 64

09. Sendo $ABCD$ um quadrado de lado $1\,\text{cm}$, M o ponto médio do segmento $\overline{AB}$ e DCE um triângulo equilátero, responda o que se pede:

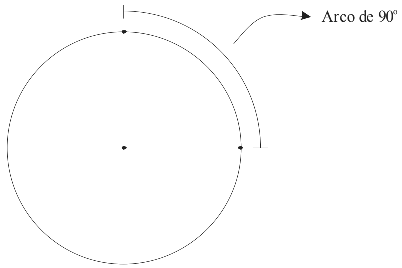


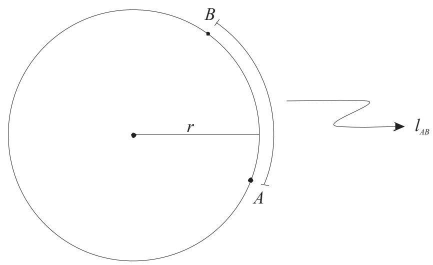
a) Qual é a altura do triângulo DEC?
b) Qual é o comprimento do segmento $\overline{EM}$?
c) Qual é o comprimento do segmento $\overline{BE}$?
d) Quanto mede o ângulo $M\hat{B}E$?
e) Calcule o seno e o cosseno do ângulo $M\hat{B}E$.

C 02

Graus e Radianos

A parte da circunferência compreendida entre dois pontos é chamada de arco. As medidas mais tradicionais de um arco são *grau* e *radiano*. O arco de um grau é a trecentésima sexagésima parte de uma circunferência, enquanto que o radiano é a razão entre o comprimento do arco e o raio da circunferência.





$$\widehat{AB} = \frac{l_{AB}}{r} \text{ radiano}$$

Observação: O termo "radiano" pode ser suprimido quando não houver dúvida que o arco em questão está em radiano.

O número π

A constante π é a razão entre o comprimento de uma circunferência e seu diâmetro, ou seja, $\pi = \frac{l_{total}}{2 \cdot r}$. Com isto $\frac{l_{total}}{r} = 2 \cdot \pi$, ou seja, a medida do arco de uma circunferência em radianos é igual a 2π.

Uma consequência do resultado anterior é que uma circunferência é um arco de $360°$, ou 2π radianos.

Exemplo:

O arco de $60°$ é equivalente a quanto em radianos:

Resolução:

Como 2π radianos e equivalente a $360°$, têm-se a proporção: $\frac{x}{60} = \frac{2\pi}{360} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$, ou seja, o arco de $60°$ é equivalente ao arco de $\frac{\pi}{3}$ radianos.

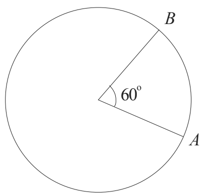
Orientação

Um objeto geométrico é orientado quando se escolhe um sentido para ser positivo e o sentido oposto é negativo.

Em uma reta se representa o sentido positivo através de uma seta, como na figura a seguir:

nesta situação, se o segmento $\overline{AB}$ tiver $5\,\mathrm{cm}$ de comprimento, então $AB = 5\,\mathrm{cm}$ e $BA = -5\,\mathrm{cm}$, ou seja, do ponto A para o ponto B a distância é de cinco centímetros no sentido positivo, enquanto que do ponto B para o ponto A a distância é de cinco centímetros no sentido negativo.

Como os ponteiros dos relógios, tradicionalmente, se movimentam em um único sentido, este ficou conhecido como *sentido horário*. O sentido contrário ao horário é conhecido como *sentido anti-horário*. Estes termos são usados para orientar a circunferência. A figura a seguir exemplifica o que acontece quando o sentido escolhido como positivo é o anti-horário:



$\overset{\frown}{AB} = 60°$ e $\overset{\frown}{BA} = -60°$

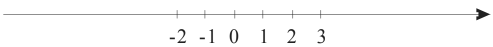
neste caso para se percorrer o arco do ponto A para o ponto B ter-se-ia percorrido um arco de $60°$ no sentido anti-horário, enquanto que para se percorrer o arco do ponto B para o ponto A teria sido usado o sentido horário, por isso o sinal negativo.

Ciclo trigonométrico

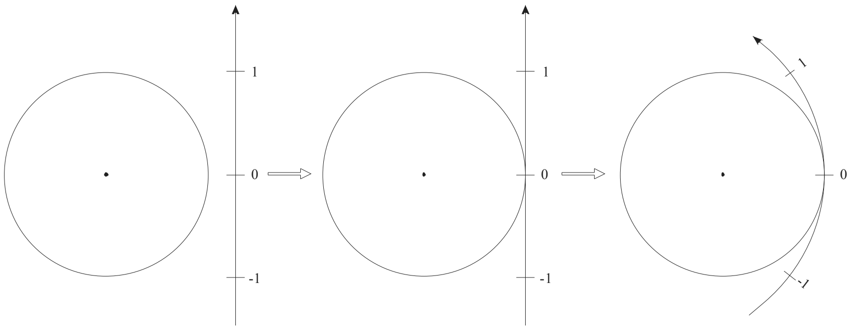
Em uma reta orientada na qual se fixa um ponto para ser a origem, faz com que todos os pontos sejam associados a um número real da seguinte forma:

- o ponto O é associado ao número 0;
- um ponto X, qualquer, é associado ao número real OX, na unidade de comprimento adequada;

com isto esta reta passa a ser chamada de *eixo* e o número real ao qual cada ponto é associando é a coordenada do ponto.



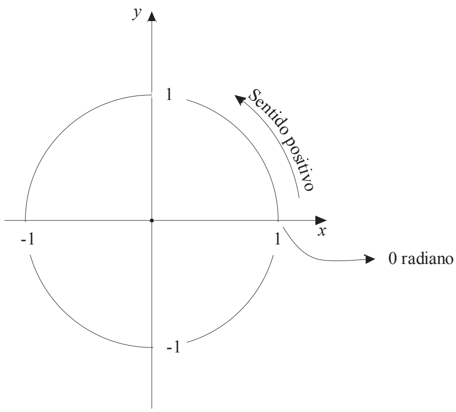
Como a medida de um arco em radianos é a razão entre o comprimento do arco e o raio da circunferência, se o raio da circunferência for igual a uma unidade de comprimento, então a medida do arco é numericamente igual ao seu comprimento. Desta forma, tome uma circunferência qualquer, use seu raio como unidade de comprimento e construa um eixo, depois enrole o eixo sobre a circunferência dando infinitas voltas. Com isto, cada número real será associado a um ponto sobre a circunferência e este número será a coordenada, em radianos, deste ponto.



Nesta situação, cada ponto é associado a mais de uma coordenada, más cada coordenada é associada a um único ponto, logo a associação entre número real e ponto sobre a circunferência é uma função.

Quando o procedimento descrito anteriormente é feito em uma circunferência com centro na origem do plano cartesiano, tal que o arco de 0 radiano coincida com o ponto $(0,1)$ e a circunferência fique orientada no sentido anti-horário, têm-se o *ciclo trigonométrico*.

"Ciclo trigonométrico é uma circunferência de raio unitário, com centro na origem do plano cartesiano, orientada no sentido anti-horário e com o arco de 0 *radiano coincidindo com o ponto* $(0,1)$*"*.



Arcos côngruos

Dois arcos são côngruos quando representam o mesmo ponto no ciclo trigonométrico. Desta forma, a diferença entre dois arcos côngruos é alguma quantidade inteira de voltas, ou seja, se α e β são côngruos $(\alpha \equiv \beta)$, então $\alpha - \beta = 2\pi \cdot k$, em que k é algum número inteiro.

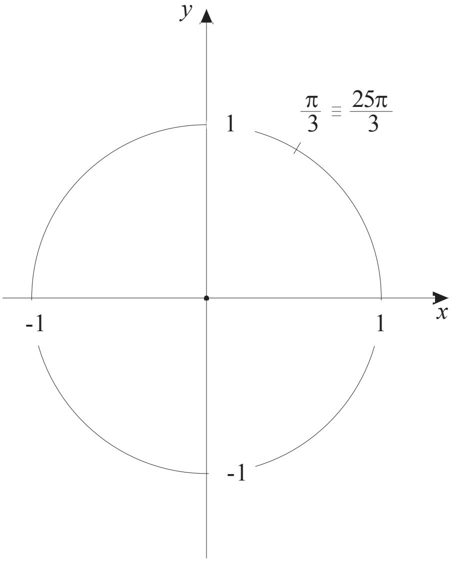
A primeira determinação positiva de um arco α é um arco β, tal que $\beta \in [0, 2\pi[$ e $\beta \equiv \alpha$.

Exemplo:

Qual é a primeira determinação positiva de $\frac{25\pi}{3}$?

Resolução:

Como $\frac{25\pi}{3} = \frac{24\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = 8\pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{25\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = 4 \cdot (2\pi)$, ou seja, $\frac{\pi}{3} \in [0, 2\pi[$ e $\frac{\pi}{3} \equiv \frac{25\pi}{3}$, logo, a primeira determinação positiva de $\frac{25\pi}{3}$ é $\frac{\pi}{3}$.



Desta forma um arco pertence ao:

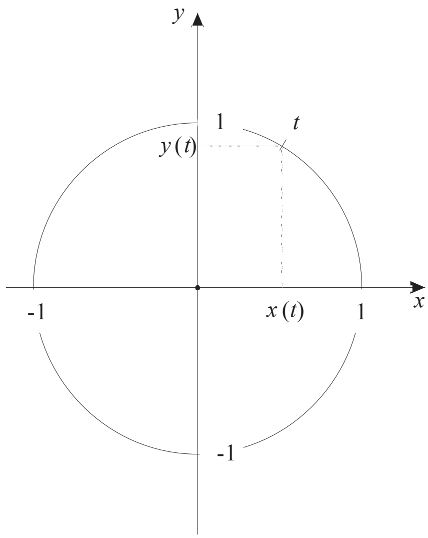
- primeiro quadrante, se sua primeira determinação positiva pertencer ao intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$;

- segundo quadrante, se sua primeira determinação positiva pertencer ao intervalo $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$;
- terceiro quadrante, se sua primeira determinação positiva pertencer ao intervalo $\left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$;
- quarto quadrante, se sua primeira determinação positiva pertencer ao intervalo $\left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right[$.

Seno, cosseno e tangente

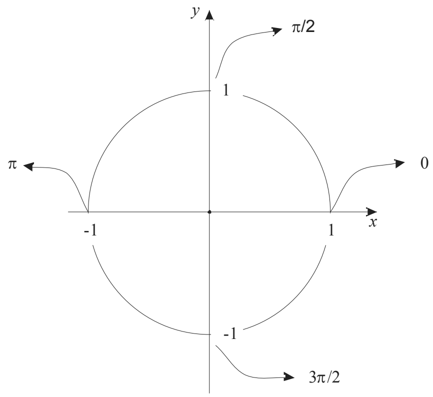
Seno, cosseno e tangente como razões trigonométricas existem apenas para ângulos agudos, mas com o auxílio do ciclo trigonométrico estas funções sofrem uma redefinição que incorpora a anterior e a expande para arcos fora do intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

No ciclo trigonométrico cada número real t é associado a um ponto do ciclo, acontece que no plano cartesiano um ponto é par ordenado, ou seja, cada t é associado à $\left(x(t), y(t)\right)$.



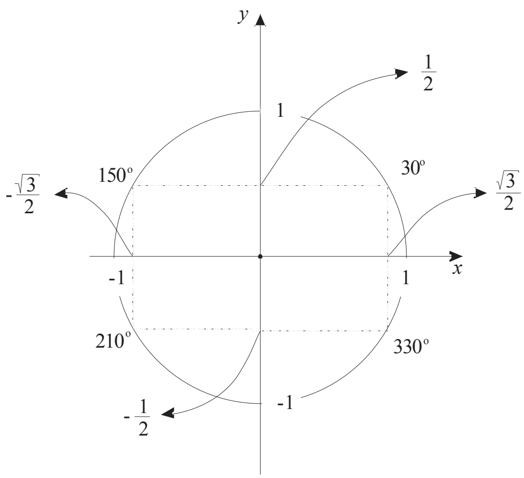
A partir daí, define-se $\cos t = x(t)$ e $\operatorname{sen} t = y(t)$, ou seja, a abscissa do arco t é o cosseno de t e a ordenada de t é o seno de t.

De acordo com a nova definição, têm-se:



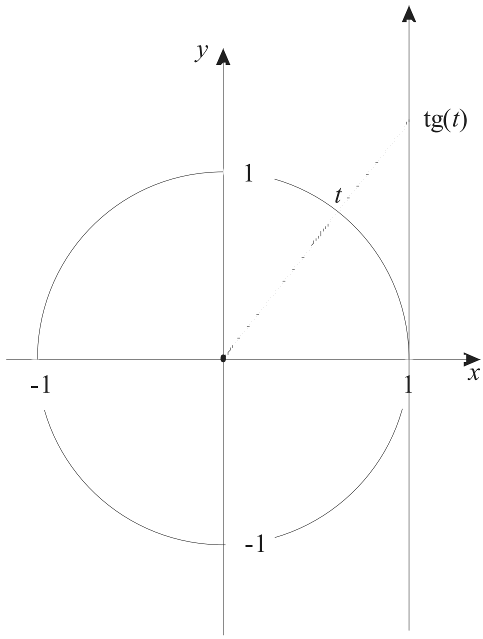
Arco em radianos	Arco em graus	Ponto	Seno	Cosseno
0	$0°$	$(1,0)$	0	1
$\frac{\pi}{2}$	$90°$	$(0,1)$	1	0
π	$180°$	$(-1,0)$	0	-1
$\frac{3\pi}{2}$	$270°$	$(0,-1)$	-1	0
2π	$360°$	$(1,0)$	0	1

De acordo com a definição e observando a figura têm-se também:



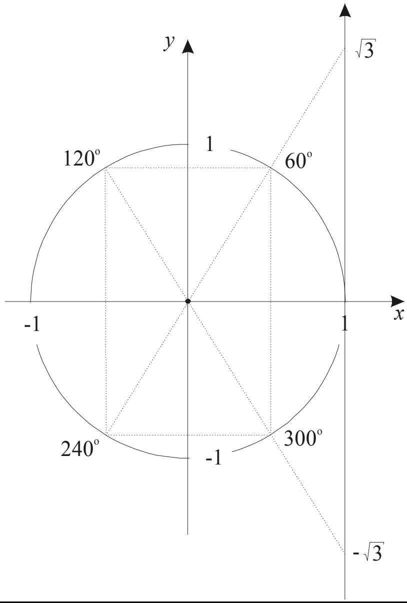
Arco em graus	Arco em radianos	Cosseno	Seno
$30°$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$150°$	$\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$210°$	$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$330°$	$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$

Para a definição da tangente pelo ciclo trigonométrico é necessário usar um eixo auxiliar que tangencia o ciclo trigonométrico no ponto $(1,0)$, como na figura a seguir:



A tangente de um arco t é obtida traçando uma reta que passa pela origem do sistema de coordenadas, pelo arco t e cruza com o eixo auxiliar, a coordenada do ponto de cruzamento é a tangente do arco *t*.

Ao observar a figura, têm-se:



Arco em graus	Arco em radianos	Tangente
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\sqrt{3}$
120°	$\frac{2\pi}{3}$	$-\sqrt{3}$
240°	$\frac{4\pi}{3}$	$\sqrt{3}$
300°	$\frac{5\pi}{3}$	$-\sqrt{3}$

Note que as tangentes dos arcos côngruos à $\frac{\pi}{2}$ e a $\frac{3\pi}{2}$ não estão definidas, pois uma reta que passa pelo origem do sistema de eixos e por qualquer um destes arcos é paralela ao eixo auxiliar que determina as tangentes.

Observação: Note que continuam valendo as relações fundamentais $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ e $\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}$.

Exercícios

01. Transformar para radianos.

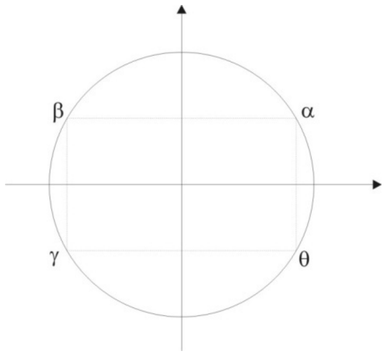
a) $30°$ b) $45°$

c) $60°$ d) $90°$

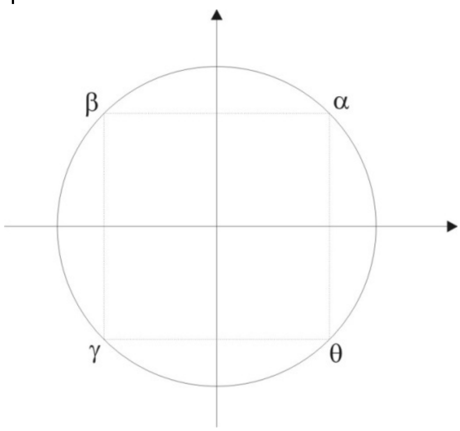
02. Transformar $12°$ em radianos.

03. Em cada figura abaixo calcule β, γ e θ, com $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$, $\pi < \gamma < \frac{3\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$, para:

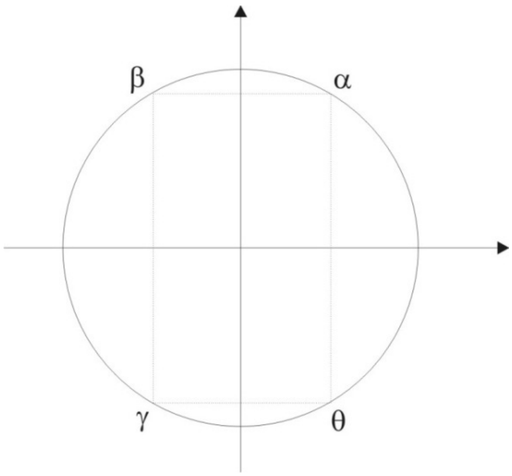
a) $\alpha = \frac{\pi}{6}$



b) $\alpha = \frac{\pi}{4}$



c) $\alpha = \frac{\pi}{3}$



04. O ângulo agudo formado pelos ponteiros de um relógio à 1 hora e 12 minutos é:

a) $27°$ b) $30°$
c) $36°$ d) $42°$
e) $72°$

05. (U.F.PA) Qual a menor determinação positiva de um arco de $1000°$?

a) $270°$ b) $280°$
c) $290°$ d) $300°$
e) $310°$

06. Marcar, no ciclo trigonométrico as extremidades dos arcos de medidas:

a) $x = \frac{k.\pi}{3}$, onde $k \in Z$.

b) $x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}$, onde $k \in Z$.

07. (FUVEST) Qual dos números é o maior? Justifique.

a) $\text{sen}\,830°$ ou $\text{sen}\,1195°$.

b) $\cos(-535°)$ ou $\cos 190°$.

08. (UFJF/MG) Escrevendo os números reais $x = \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{5}$, $y = \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{7}$, $z = \cos\dfrac{\pi}{5}$ e $w = \cos\dfrac{\pi}{7}$ em ordem crescente, obtêm-se:

a) x , y , w , z
b) y , x , z , w
c) y , x , w , z
d) w , z , x , y
e) z , w , y , y

09. (UEM/PR) Considere um ponto $P(x, y)$ sobre a circunferência trigonométrica e que não esteja sobre nenhum dos eixos coordenados. Seja α o ângulo determinado pelo eixo OX e pela semi-reta OP, onde O é a origem do sistema. Nessas condições, assinale o que for correto.

01. A abscissa de P é menor do que $\cos(\alpha)$.
02. A ordenada de P é igual a $\operatorname{sen}\left(\alpha + \dfrac{\pi}{2}\right)$.
04. A tangente de α é determinada pela razão entre a ordenada e a abscissa de P.
08. As coordenadas de P satisfazem à equação $x^2 + y^2 = 1$.
16. Se $x = y$, então $\operatorname{tg}(\alpha) = -1$.
32. $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ é o menor arco positivo para o qual a equação $\cos^2(\alpha+\pi) + \operatorname{sen}^2(\alpha + \dfrac{\pi}{2}) = \cos^2(\alpha + \dfrac{\pi}{2}) + \operatorname{sen}^2(\alpha+\pi)$ é satisfeita.
64. $\operatorname{sen}(2\alpha) = 2y$.

10. Calcule a soma: $\operatorname{sen}^2 1^\circ + \operatorname{sen}^2 2^\circ + \ldots + \operatorname{sen}^2 88^\circ + \operatorname{sen}^2 89^\circ$

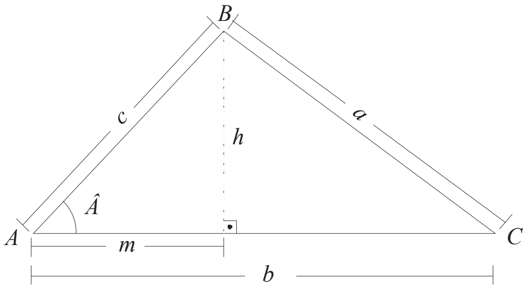
C 03

Lei dos cossenos

Em um triângulo ABC qualquer, vale a relação $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \widehat{A}$, em que a, b e c são os lados do triângulo e $\widehat{A}$ é o ângulo oposto ao lado a.

Demonstração:

Na figura têm-se:



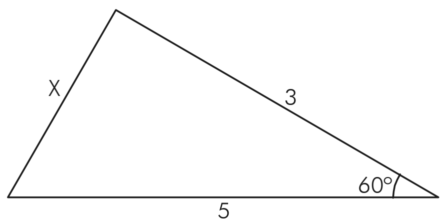
$$\begin{cases} a^2 = h^2 + (b-m)^2 \\ c^2 = h^2 + m^2 \end{cases} \Rightarrow a^2 - c^2 = b^2 - 2bm \Rightarrow a^2 = c^2 + b^2 - 2bm$$

Como $\cos \hat{A} = \dfrac{m}{c} \Rightarrow m = c \cdot \cos \hat{A}$, basta substituir na relação anterior, daí:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}$.

Exemplo:

Determine o valor de X na figura.



Resolução:

Pela lei dos Cossenos:

$X^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos 60^o$

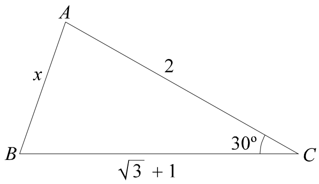
$X^2 = 9 + 25 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dfrac{1}{2}$

$X^2 = 19 \Rightarrow X = \sqrt{19}$.

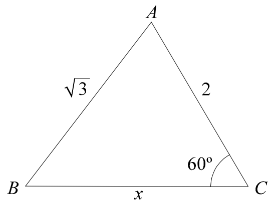
Exercícios

01. Calcule o valor de x nas figuras abaixo:

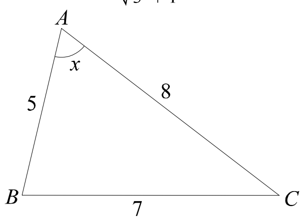
a)



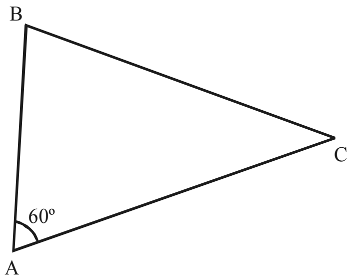
b)



c)

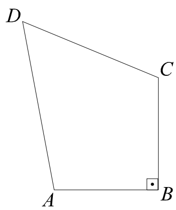


02. Deseja-se medir a distância entre duas cidades B e C sobre um mapa, sem escala. Sabe-se que $AB = 80\,\text{km}$ e $AC = 120\,\text{km}$, onde A é uma cidade conhecida, como mostra a figura abaixo. Logo, a distância entre B e C, em km, é:



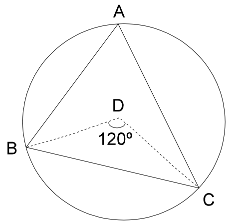
a) menor que 90
b) maior que 90 e menor que 100
c) maior que 100 e menor que 110
d) maior que 110 e menor que 120
e) maior que 120

03. No quadrilátero abaixo, $BC = CD = 3\,\text{cm}$, $AB = 2\,\text{cm}$, $A\hat{D}C = 60^\circ$ e $A\hat{B}C = 90^\circ$. A medida, em cm, do perímetro do quadrilátero é:



a) 11
b) 12
c) 13
d) 14
e) 15

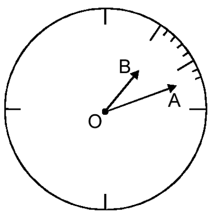
04. Na figura abaixo tem-se o triângulo ABC inscrito em uma circunferência de centro D.



Se $AB = 6\,\text{cm}$ e $AC = 9\,\text{cm}$, o perímetro do triângulo ABC, em centímetros, é aproximadamente igual a

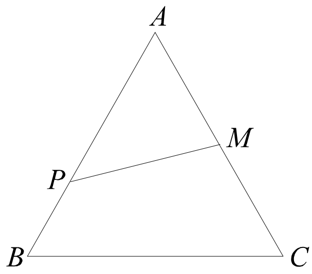
a) $18{,}4$
b) $19{,}8$
c) $20{,}6$
d) $21{,}4$
e) $22{,}9$

05. O mostrador do relógio de uma torre é dividido em 12 partes iguais (horas), cada uma das quais é subdividida em outras 5 partes iguais (minutos). Se o ponteiro das horas (OB) mede $70\,\text{cm}$ e o ponteiro dos minutos (OA) mede $1\,\text{m}$, qual será a distância AB, em função do ângulo entre os ponteiros, quando o relógio marcar 1 horas e 12 minutos?



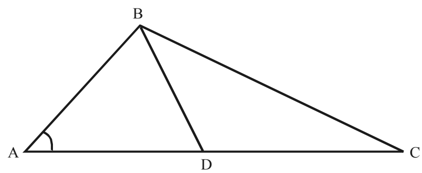
06. Os lados de um triângulo formam uma PA de razão 3. Sendo $30º$ a medida do ângulo oposto ao lado de menor medida, calcule o valor das medidas dos lados.

07. O triângulo ABC é equilátero de lado 4, $AM = MC = 2$, $AP = 3$ e $PB = 1$. O perímetro do triângulo APM é:



a) $5+\sqrt{7}$
b) $5+\sqrt{10}$
c) $5+\sqrt{19}$
d) $5+\sqrt{13-6\sqrt{3}}$
e) $5+\sqrt{13+6\sqrt{3}}$

08. Na figura abaixo, $AD = 2\,\text{cm}$, $AB = \sqrt{3}\,\text{cm}$, a medida do ângulo $B\hat{A}C$ é 30° e $BD = DC$, onde D é ponto do lado $\overline{AC}$. A medida do lado $\overline{BC}$, em cm, é

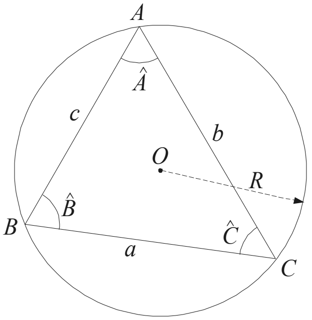


a) $\sqrt{3}$
b) 2
c) $\sqrt{5}$
d) $\sqrt{6}$
e) $\sqrt{7}$

C 04

Lei dos senos

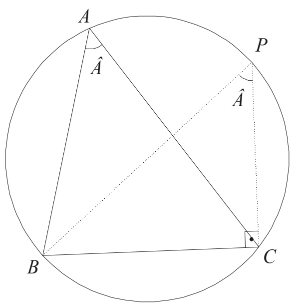
Dado um triângulo ABC, a razão entre a medida de um lado do triângulo e o seno do ângulo oposto a esse lado é igual ao dobro da medida do raio da circunferência circunscrita ao triângulo.



$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} = 2R$$

Demonstração:

Como todo triângulo é inscritível, inscreva o triângulo ABC em uma circunferência e trace um diâmetro partido de um dos vértices do triângulo, como na figura ao lado:



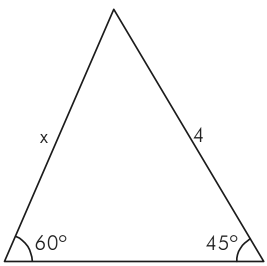
Pelo fato de $\overline{BP}$ ser um diâmetro, segue que $B\hat{C}P = 90°$. Usando o seno como uma razão trigonométrica no triângulo retângulo, têm-se:

$$\operatorname{sen}\hat{A} = \frac{a}{2R} \Rightarrow \frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = 2R$$

o resultado completo segue por analogia.

Exemplo:

Determine o valor de x na figura.



Resolução:

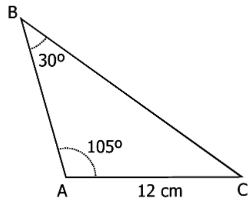
Pela lei dos senos, temos: $\frac{4}{\operatorname{sen}60°} = \frac{x}{\operatorname{sen}45°}$

$4 \cdot \operatorname{sen}45° = x \cdot \operatorname{sen}60°$

$4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \frac{4\sqrt{6}}{3}$.

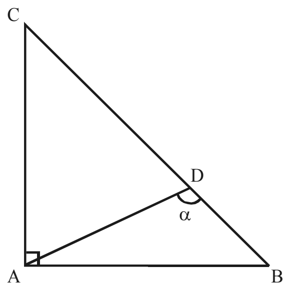
Exercícios

01. Três ilhas A, B e C aparecem num mapa, em escala $1:10\ 000$, como na figura. Das alternativas, a que melhor aproxima a distância entre as ilhas A e B é:



a) $2,3\,\text{km}$
b) $2,1\,\text{km}$
c) $1,9\,\text{km}$
d) $1,4\,\text{km}$
e) $1,7\,\text{km}$

02. Considere o triângulo retângulo abaixo.

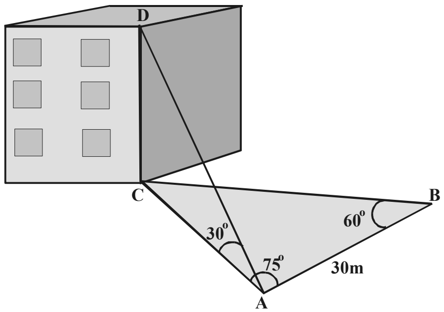


Sabendo-se que $\alpha = 120^{\circ}$, $AB = AC = 1\text{cm}$, então AD é igual a

a) $\sqrt{\dfrac{2}{3}}\,\text{cm}$
b) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}\,\text{cm}$
c) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}\,\text{cm}$
d) $\sqrt{\dfrac{3}{2}}\,\text{cm}$

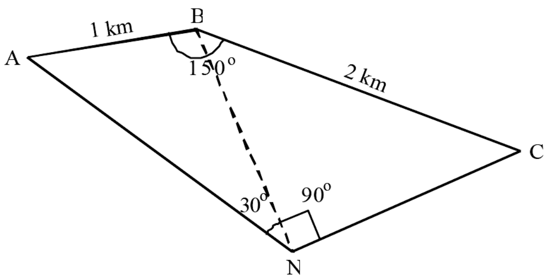
03. Uma circunferência de raio 14cm circunscreve um triângulo ABC. Calcule a medida do lado AB, sabendo-se que o triângulo ABC não é retângulo e que o ângulo $A\hat{C}B$ mede 30°.

04. Um observador, situado no ponto A, distante 30m do ponto B, vê um edifício sob um ângulo de 30°, conforme a figura abaixo. Baseado nos dados da figura, determine a altura do edifício em metros e divida o resultado por $\sqrt{2}$.
Dados: $AB = 30\text{m}$; $A\hat{C}D = 30^\circ$; $C\hat{A}B = 75^\circ$; $A\hat{B}C = 60^\circ$; $D\hat{C}A = 90^\circ$.



05. O triângulo ABC está inscrito em um círculo de raio R. Se $\text{sen}\hat{A} = \frac{3}{5}$, o comprimento do lado BC é:
a) $2R/5$
b) $3R/5$
c) $4R/5$
d) $6R/5$
e) $8R/5$

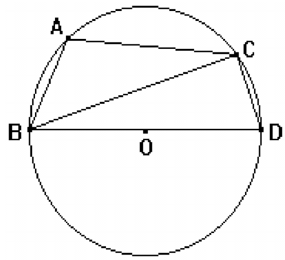
06. Sejam A, B, C e N quatro pontos em um mesmo plano, conforme mostra a figura ao lado.



a) Calcule o raio da circunferência que passa pelos pontos A, B e N.
b) Calcule o comprimento do segmento NB.

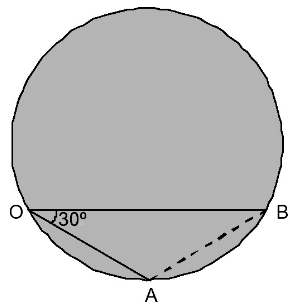
07. Em um triângulo ABC o lado AB mede $4 \cdot \sqrt{2}$ e o ângulo $\hat{C}$, oposto ao lado AB, mede 45°. Determine o raio da circunferência que circunscreve o triângulo.

08. Considere a circunferência de centro O e raio R e os triângulos inscritos ABC e BCD, conforme a figura abaixo:



a) Escreva uma relação entre as medidas dos ângulos $B\hat{A}C$ e $B\hat{D}C$.
b) Mostre que $BC = 2R\,\mathrm{sen}(B\hat{A}C)$.

09. Para medir o raio de um pequeno lago circular, uma pessoa usa o seguinte procedimento: traça um ângulo $A\hat{O}B$ de 30°, sendo que os pontos A, O e B estão sobre a margem do lago, e, em seguida, mede a distância de A a B, conforme a figura.
Justifique por que a medida do segmento AB corresponde ao raio do lago.



Coleção **olimpo**

IME ITA

opirus
EDITORA