

Trigonometria

Introdução

Desde os primórdios da história, a experiência matemática do homem se confunde com a necessidade de resolver problemas envolvendo trigonometria.

Neste contexto, a trigonometria é a parte da Matemática que tenta despertar nos estudantes desta bela ciência o prazer da descoberta e entendimento, através da resolução de problemas e da análise de situações das mais engenhosas.

Banco de problemas

Esta lista contém o banco de problemas para as turmas ITA e IME de Matemática 2010 de qualquer vestibular do país. Os problemas estão divididos em vários tópicos: **Secção Vestibular, Secção Escolas Militares e Secção Olimpíadas**. Todos os problemas aqui contidos envolvem um raciocínio matemático apurado e certa dose de criatividade!

Um pouco de História

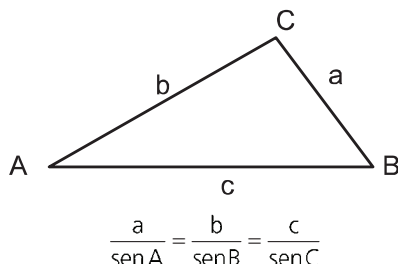
A palavra trigonometria tem origem na Grécia da palavra *trigonon* (triângulo) + *metrûm* (medida). Etimologicamente, trigonometria significa medida de triângulos.

Por vezes, pensa-se que a origem da Trigonometria está exclusivamente ligada à resolução de situações de medição de terrenos ou determinação de medidas sobre a superfície da terra. No entanto, enquanto ramo do conhecimento científico, é impossível separar a Trigonometria da Astronomia. Daí que o seu desenvolvimento como ciência exata viesse a exigir medições e cálculos de grande precisão. É neste contexto que o astrônomo grego Hiparco de Niceia (180-125 a.C.) é considerado o fundador da Trigonometria. Foi ele que introduziu as medidas sexagesimais em Astronomia e elaborou a primeira tabela trigonométrica. Hiparco utilizou a trigonometria para fazer medições, prever eclipses, fazer calendários e na navegação.

A Hiparco seguiram-se outros no estudo e desenvolvimento da trigonometria, como, por exemplo, Ptolomeu.

No séc.III, os indianos e os árabes deram nova dimensão à trigonometria ao introduzirem a trigonometria esférica. A Trigonometria tem como objetivo principal o estudo das relações entre lados e ângulos de um triângulo e constitui instrumento indispensável na resposta a necessidades da Astronomia e ainda da navegação, cartografia e da topografia.

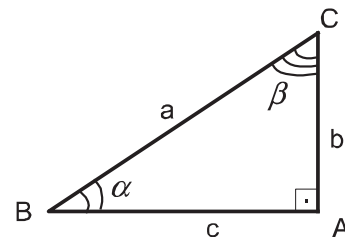
O estabelecimento de certas relações que hoje chamamos **fórmulas fundamentais da Trigonometria** deve-se aos matemáticos hindus, do séc. V ao séc. XII. De entre eles destaca-se Aryabhata (séc.VI), um astrônomo indiano, tendo já nesta altura associado o seno de um ângulo ao centro à medida da corda correspondente e elaborado também uma tábua de valores do seno. Matemáticos árabes, depois de traduzirem as obras deixadas pelos hindus, desenvolveram o estudo das razões trigonométricas em triângulos retângulos e estabeleceram, para qualquer triângulo, o chamado teorema ou **lei dos senos**.



A Trigonometria começa a afirmar-se como ciência autônoma a partir do séc. XI quando Al-Biurine reúne todas as demonstrações, quer de origem grega, quer de origem indiana, até então conhecidas e usadas em Trigonometria. Deve-se ainda aos árabes a introdução desta ciência na Europa Ocidental. Na Europa, a instituição da Trigonometria como ciência autônoma em relação à Astronomia, é iniciada através da tradução e publicação dos manuscritos clássicos, bem como da elaboração de uma introdução completa à Trigonometria, e ficou a dever-se a Johaness Müller, um astrônomo prussiano, mais conhecido por Regiomontano (1436-1476). A obra de Regiomontano continha, por exemplo, a "Lei dos senos" aplicada a triângulos esféricos. No séc.XVI, François Viète (1540-1603) estabeleceu várias relações trigonométricas tendo-as associado às soluções de equações do 3º grau – é a ligação da Trigonometria à Álgebra. Viète introduziu novos teoremas que permitiram relacionar lados e ângulos de triângulos não retângulos. Neper e Briggs usaram o cálculo logarítmico para estabelecerem novas fórmulas trigonométricas (séc. XVII). No séc.XIX, a Trigonometria atinge o seu ponto máximo, ficando ligada à análise através das séries. Hoje, a Trigonometria usa-se em muitas situações, nomeadamente na Física.

Relações entre os elementos de um triângulo retângulo

Consideremos o triângulo ABC retângulo em A e procuremos determinar as funções trigonométricas a partir de seus elementos principais.



$$\begin{aligned} m(\overline{AB}) &= c & m(\widehat{A}) &= 90^\circ \\ m(\overline{BC}) &= a & m(\widehat{B}) &= \alpha \\ m(\overline{AC}) &= b & m(\widehat{C}) &= \beta \end{aligned}$$

O lado que se opõe ao ângulo reto num triângulo é conhecido por hipotenusa (lado BC na figura) e os lados que são adjacentes ao mesmo são conhecidos por catetos (lado AB e lado AC).

$$\text{seno } \text{ângulo} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{Cos } \text{ângulo} = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$$

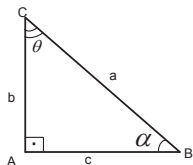
$$\text{Tg } \text{ângulo} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$$

$$\text{Tgx} = \frac{\text{sen } x}{\text{cos } x} \quad \text{sec } x = \frac{1}{\text{cos } x}$$

$$\text{Cosec } x = \frac{1}{\text{sen } x} \quad \text{cotg } x = \frac{\text{cos } x}{\text{sen } x}$$

Ângulos complementares

Observando a figura, notamos que:



$$\text{Mas, } \alpha + \theta + 90 = 180 \Rightarrow \alpha + \theta = 90$$

α e θ são ângulos complementares. Assim, dizemos que cofunções de ângulos complementares são iguais.

Generalizando:

$$\text{sen } \alpha = \cos (90 - \alpha)$$

$$\cos \alpha = \text{sen } (90 - \alpha)$$

$$\text{tg } \alpha = \text{cotg } (90 - \alpha)$$

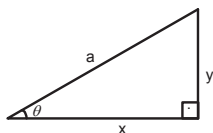
$$\sec \alpha = \text{cosec } (90 - \alpha)$$

Resolução de triângulos retângulos

Resolução de triângulos retângulos "significa encontrar os comprimentos de cada lado e as medidas de cada ângulo desse triângulo." Isto é:

Conhecendo a hipotenusa e um ângulo agudo

Dada a figura:



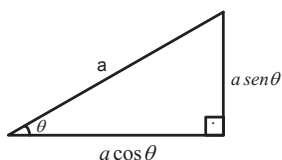
cálculo de x:

$$\cos \theta = \frac{x}{a} \rightarrow x = a \cdot \cos \theta$$

cálculo de y:

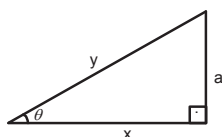
$$\text{sen } \theta = \frac{y}{a} \rightarrow y = a \cdot \text{sen } \theta$$

Concluimos que:



Conhecendo um ângulo agudo e o comprimento do cateto oposto a esse ângulo.

Dada a figura:



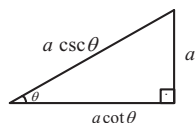
Cálculo de x:

$$\text{cotg } \theta = \frac{x}{y} \rightarrow x = a \cdot \text{cotg } \theta$$

Cálculo de y:

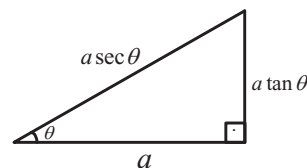
$$\text{cosec } \theta = \frac{a}{y} \rightarrow y = a \cdot \text{cosec } \theta$$

Concluimos que:



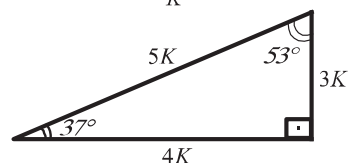
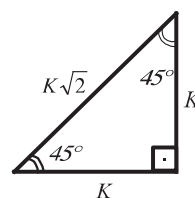
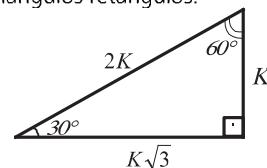
Conhecendo um ângulo agudo e o comprimento do cateto adjacente a esse ângulo

De acordo com as ideias anteriores de maneira análoga temos:



Razões trigonométricas dos ângulos de 30°, 37°, 45°, 53° e 60°

As razões trigonométricas desses ângulos obedecem a partir dos seguintes triângulos retângulos.



Então, com relação aos triângulos anteriores, concluímos que:

R.T. / ÂNGULO	30°	37°	45°	53°	60°
SEN	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
COS	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{2}$
TAN	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{4}{3}$	$\sqrt{3}$
COT	$\sqrt{3}$	$\frac{4}{3}$	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
SEC	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\sqrt{2}$	$\frac{5}{3}$	2
COSEC	2	$\frac{5}{3}$	$\sqrt{2}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Relação fundamental da trigonometria e suas derivadas

Relação fundamental da trigonometria

De acordo com o Teorema de Pitágoras temos:

$$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Relações decorrentes

A partir da relação fundamental da trigonometria, podemos desenvolver duas outras relações muito importantes que serão muito úteis para a resolução de exercícios de maiores graus de dificuldade: Veja!!!!

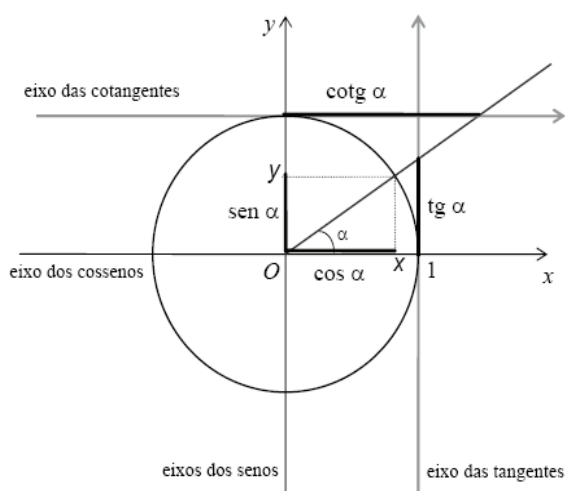
Sabe-se que: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ para $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \sec^2 \alpha \quad \text{para } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\cot^2 \alpha + 1 = \operatorname{cosec}^2 \alpha \quad \text{para } x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Representação das relações trigonométricas no ciclo

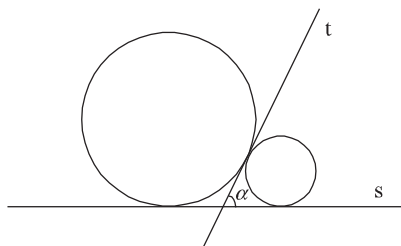
Observamos na figura abaixo as razões trigonométricas e suas relações fundamentais decorrentes no ciclo trigonométrico com relação aos eixos x e y .



Exercícios

01. (FEI-2000) Na figura abaixo, o raio da circunferência maior é o triplo do raio da menor. A reta s é tangente às duas circunferências. A reta t é tangente às duas circunferências, no mesmo ponto. Quanto vale $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$?

- A) $\frac{1}{3}$
B) $\frac{1}{2}$
C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
E) $\frac{\sqrt{2}}{3}$



02. (UFPB) O valor da expressão

$$\frac{1}{1+\sin^2 x} + \frac{1}{1+\cos^2 x} + \frac{1}{2+\operatorname{tg}^2 x} + \frac{1}{2+\cot^2 x}$$

- é igual a:
A) 0
B) 1
C) 2
D) -1
E) $\frac{1}{2}$

03. (Fuvest/2002) Se α está no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ e satisfaz

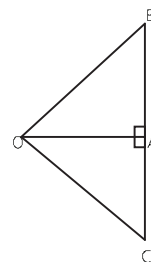
$$\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = \frac{1}{4}, \text{ então o valor da tangente de } \alpha \text{ é:}$$

- A) $\sqrt{\frac{3}{5}}$
B) $\sqrt{\frac{5}{3}}$
C) $\sqrt{\frac{3}{7}}$
D) $\sqrt{\frac{7}{3}}$
E) $\sqrt{\frac{5}{7}}$

04. Dada a figura ao lado:

Sabendo que o ângulo $O = 2\theta$ sendo AO uma bissetriz e $OB = OC = 1$. Prove que:

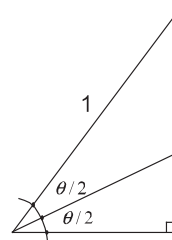
- A) $\sin(2\theta) = 2 \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta$ para $\theta \in (0^\circ \text{ a } 45^\circ)$
B) $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos \theta}{2}}$ para $\theta \in (0^\circ \text{ a } 90^\circ)$



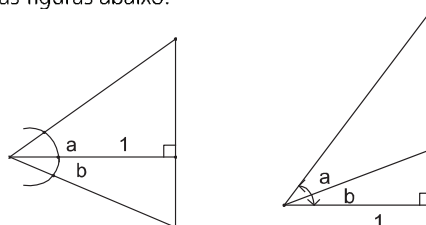
05. Calcule o $\sin 18^\circ$ e o $\cos 18^\circ$ utilizando o mesmo raciocínio da questão anterior.

06. Dada a figura prove que:

- A) $\operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\sin \theta}{1+\cos \theta}$
B) Calcule as funções trigonométricas de 15°



07. Dada as figuras abaixo:



Prove que:

$$\sin(a+B) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a$$

$$\sin(a-B) = \sin a \cdot \cos b - \sin b \cdot \cos a$$

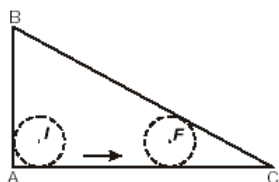
08. A diagonal de um paralelepípedo retângulo forma com as três arestas concorrentes ângulos α , β e θ . Determine a relação entre os cossenos desses ângulos.

09. Um triângulo retângulo tem hipotenusa 1 e perímetro $\frac{\sqrt{6}+2}{2}$. Qual é a medida do menor de seus ângulos?

10. Sabendo que $f(x) = a \sin x + b \cos x$ é uma função clássica na trigonometria. Prove que os valores máximo e mínimo desta função, são respectivamente, $\sqrt{a^2 + b^2}$ e $-\sqrt{a^2 + b^2}$.

11. (UFC) Seja β um ângulo agudo tal que $\sin \beta = \frac{4}{5}$. Se α é um ângulo qualquer e $M = \frac{\sqrt{3} \sin(\alpha + \beta) - (4/\sqrt{3}) \cos(\alpha + \beta)}{\sin \alpha}$ determine $\sqrt{3} \cdot M$.

12. (UFRJ) Na figura a seguir, o círculo de raio 1 cm rola da posição I para a posição F, sempre tangenciando o cateto AC do triângulo retângulo ABC.



Na posição I, o círculo também tangencia AB e na posição F, ele é tangente a BC. Os lados do triângulo valem $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm e $BC = 10$ cm. Determine a distância percorrida pelo centro do círculo.

13. (Uece) Se $\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\sqrt{5}}{4}$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, então o valor da expressão

$$\frac{20\sqrt{5}}{\frac{1}{\sin \theta} + \frac{1}{\tan \theta}}$$

- é igual a:
- A) 20 B) 25
C) 30 D) 35
E) 45

14. Sabendo que $a^2 + b^2 = 4$, então o valor de S na expressão $S = (a \cdot \cos x - b \cdot \sin x)^2 + (a \cdot \sin x + b \cdot \cos x)^2$ que é independente do arco x vale:

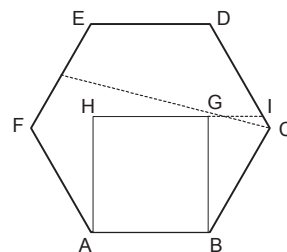
A) 1 B) 2
C) 3 D) 4
E) 5

15. (ITA-SP) Deduzir as expressões:

$$\sin a = \frac{2 \tan(a/2)}{1 + \tan^2(a/2)} \text{ e } \cos a = \frac{1 - \tan^2(a/2)}{1 + \tan^2(a/2)}$$

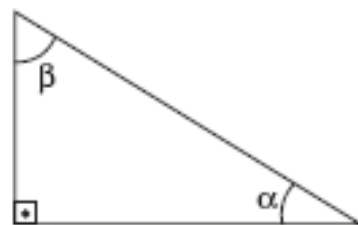
16. (IBMEC/2004) Considere na figura abaixo o quadrado ABGH e o hexágono regular ABCDEF, ambos de lado $\sqrt{2 + \sqrt{3}}$

- A) Determine a medida do segmento $\overline{CG}$.
B) Determine a medida do segmento $\overline{GI}$.
C) Determine a medida do segmento $\overline{GJ}$, que é o prolongamento de $\overline{GC}$ até o segmento $\overline{EF}$.



17. (Mack/2004) Se, no triângulo retângulo da figura, tem-se $\cos \alpha = \frac{3}{4}$, então o valor de $\sin(2\alpha + 3\beta)$ é:

- A) $\frac{3}{4}$
B) $-\frac{3}{4}$
C) $\frac{2}{3}$
D) $-\frac{2}{3}$
E) $-\frac{1}{2}$

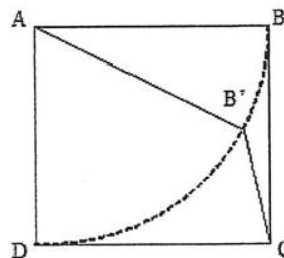


18. Seja f uma função definida nos reais em reais, descrita abaixo:

$$f(x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & \sin^2(2x) & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -\cos(4x) & 0 & 4 \cos(2x) \cdot \operatorname{cosec}(2x) \end{vmatrix}$$

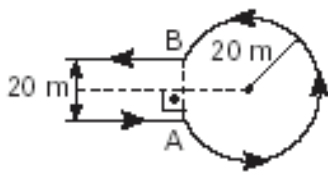
Calcule o período e a imagem da função.

19. (IME-RJ) Em um quadrado ABCD o segmento AB', com comprimento igual ao lado do quadrado, descreve um arco de círculo, conforme indicado na figura. Determine o ângulo BÂB' correspondente à posição em que a razão entre o comprimento do segmento B'C e o lado do quadrado vale $\sqrt{3 - \sqrt{6}}$.



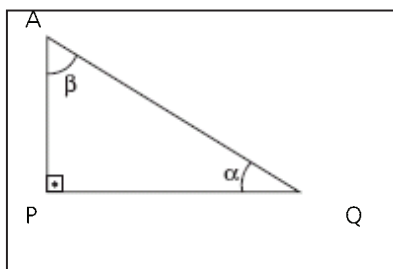
20. (Mack/2004) Percorrendo uma estrada de 20 m de largura, um veículo inicia um retorno em um ponto **A**, utilizando a trajetória circular da figura, cujo raio é 20 m. Se nessa rotatória a velocidade máxima permitida é de 20 km/h, o menor tempo necessário para que esse veículo percorra o arco AB é: (adote $\pi = 3$)

- A) 12 seg
B) 18 seg
C) 15 seg
D) 25 seg
E) 22 seg

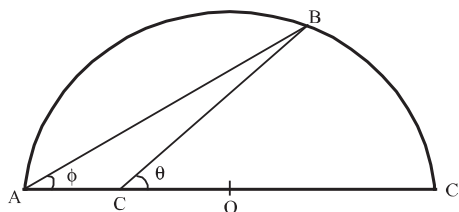


21. (Mack/2000) No triângulo retângulo da figura, $\overline{AQ} = 2 \cdot \overline{AP}$. Então, $\sin(\alpha + 3\beta)$ vale:

- A) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
B) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
C) $-\frac{1}{2}$
D) $\frac{1}{2}$
E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$



22. (UFMG/99) Observe a figura.

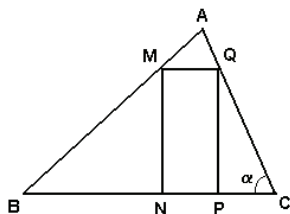


Nessa figura, O é o centro do semicírculo de diâmetro AD, $AC = CO$, $\angle BAD = \phi$ e $\angle BCD = \theta$.

Demonstre que $\frac{1}{\tan \phi} + \frac{1}{\tan 2\phi} = \frac{2}{\tan \theta}$

23. (Fuvest/96) No triângulo ABC, $AC = 5$ cm, $BC = 20$ cm e $\cos \alpha = 3/5$. O maior valor possível, em cm^2 , para a área do retângulo MNPQ, construído conforme mostra a figura a seguir, é:

- A) 16
B) 18
C) 22
D) 20
E) 24



24. Se $\sqrt{\sec^2 x + \sqrt{\sec^4 x \cdot \tan^2 x}} + \sqrt{\tan^2 x + \sqrt{\sec^2 x \cdot \tan^4 x}} = 8$.

O valor de $(\sec x)^{\frac{2}{3}} + (\tan x)^{\frac{2}{3}}$, é igual a:

- A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

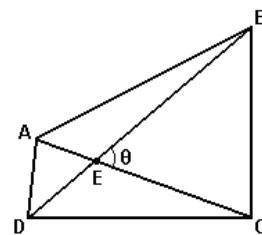
25. O valor da expressão $\frac{4-5 \cdot \cos x}{3-5 \cdot \sin x} + \frac{3+5 \cdot \sin x}{4+5 \cdot \cos x}$ é igual a:

- A) 0
B) 1
C) $\frac{3}{5}$
D) $\frac{4}{5}$
E) $\frac{1}{2}$

26. Calcule a hipotenusa do triângulo retângulo cujos ângulos agudos são **x** e **y** e os catetos são iguais a $\sin x + \sin y$ e $\cos x + \cos y$.

27. (Fuvest/2000) Na figura seguinte, **E** é o ponto de intersecção das diagonais do quadrilátero ABCD e θ é o ângulo agudo BEC. Se $EA = 1$, $EB = 4$, $EC = 3$ e $ED = 2$, então a área do quadrilátero ABCD será:

- A) $12 \cdot \sin \theta$
B) $8 \cdot \sin \theta$
C) $6 \cdot \sin \theta$
D) $10 \cdot \cos \theta$
E) $8 \cdot \cos \theta$



GABARITO									
01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
D	C	B	—	—	—	—	*	15°	—
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
*	*	B	D	—	*	B	*	*	B
21	22	23	24	25	26	27			
C	—	C	D	A	*	A			

* 08: 1

09: 15°

11: 5

12: 4

16: A) 1; B) $\frac{\sqrt{6}}{3}$; C) $2\sqrt{3} - 1$

18: período = $\frac{\pi}{2}$ e imagem = $[-\sqrt{5}, +\sqrt{5}]$

19: $\alpha = 15^\circ$ ou $\alpha = 75^\circ$

26: 2

– Demonstração.



Anotações

SEÇÃO DE ESCOLAS MILITARES

- Esta seção de escolas militares tem como objetivo principal resolver questões que já foram abordadas em vários concursos militares. Mas também aprofundando os seus conhecimentos matemáticos e adquirindo cada vez um raciocínio apurado e uma certa dose de criatividade nas resoluções dos problemas.

01. (Aman/2006) O valor do determinante

$$\begin{vmatrix} \cos 75^\circ & 0 & -\sin 15^\circ \\ -\cos 15^\circ & 2\cos 15^\circ & \cos(-15^\circ) \\ \sin^2 15^\circ & \tan 15^\circ & \cos^2 15^\circ \end{vmatrix}$$

- A) $\sin \frac{\pi}{12}$ B) $\frac{1}{2}$
C) $\sin \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{12}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
E) $\sqrt{3}$

02. (Aman/2003) Seja α um ângulo do quarto quadrante cujo cosseno é igual a $1/4$. Determine o valor de y na expressão:

$$y = \frac{\sec^2 \alpha - \sec \alpha \cdot \operatorname{cosec} \alpha}{1 - \cot \alpha}$$

Obs.: $\sec \alpha$, $\operatorname{cosec} \alpha$ e $\cot \alpha$ representam respectivamente a secante, a cossecante e a cotangente do ângulo α .

03. (Aman/2005) Em um triângulo ABC, α e β são ângulos complementares. Calcule o valor numérico da expressão:

$$(\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \alpha + \sin \beta)^2$$

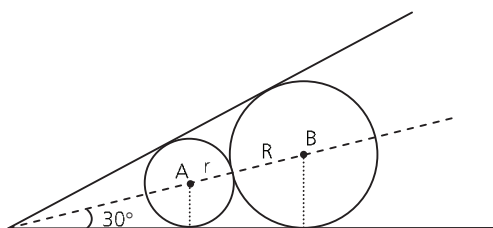
04. (Aman/2005-Modificado) ABCD é um quadrado de lado 1. P e Q são pontos em AB e BC tais que o ângulo PDQ é igual a 45° . Seja d o perímetro do triângulo PBQ que é constante. Então o valor d é igual a:

- A) 1 B) 2
C) 3 D) 4
E) 5

05. (AMAN-2004) Sejam α e β ângulos pertencentes ao intervalo $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ tais que $\sin \beta = \cos 2\alpha + 2\sin \alpha - 1$. Determine o valor de α para que o ângulo β tenha seu valor máximo.

06. (Epcar/2000) Considere dois círculos de raios (r) e (R) centrados em A e B, respectivamente, que são tangentes externamente e cujas retas tangentes comuns formam um ângulo de 60° . A razão entre as áreas do círculo maior e do menor é:

- A) 9
B) 3
C) $\frac{1}{3}$
D) $\frac{1}{9}$



07. (ITA/1981) Se $\mathbb{R}$ denota o conjunto dos números reais e (a, b) o intervalo aberto $\{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$ seja $f: \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por: $f(x) = \sqrt{\sec^2 x + \cos \sec^2 x}$.

Se $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ é tal que $\tan \alpha = \frac{a}{b}$, então $f(\alpha)$ é igual a:

- A) $\frac{a+b}{2}$ B) $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$
C) $\frac{a^2-b^2}{a \cdot b}$ D) $\frac{a^2+b^2}{a \cdot b}$
E) $a+b$

08. (Escola Naval) Sabendo que $\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{\sqrt{6}}$. O valor de E

na expressão $E = \sin^6 x + \cos^6 x$ é igual a:

- A) 0
B) -1
C) $\frac{1}{2}$
D) $-\frac{1}{2}$
E) 1

09. (ITA/2000) Sabe-se que x é um número real pertencente ao intervalo $]0, 2\pi[$ e que o triplo da sua secante, somado ao dobro da sua tangente é igual a 3. Então, o cosseno de x é igual a:

- A) $\frac{\sqrt{3}}{4}$
B) $\frac{2}{7}$
C) $\frac{5}{13}$
D) $\frac{15}{26}$
E) $\frac{13}{49}$



Anotações

IME - INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA - RESULTADO FINAL 2011/2012

FARIAS BRITO

1º Lugar Geral do Brasil no IME

(O maior número de pontos nas categorias Ativa e Reserva)



Pela primeira vez
na história do IME,
uma mulher é
1º lugar
geral do Brasil.



1ª

do Brasil no IME



ORGANIZAÇÃO EDUCACIONAL
FARIAS BRITO
Lições para toda a vida.

UNESCO
Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura

Escolas Associadas da UNESCO

www.fariasbrito.com.br