Soluções da 1ª Lista de Trigonometria

1) Mostremos que existem dois números A e B tais que

$$tg\alpha = Acotg\alpha + Bcotg2\alpha, \text{ para } \alpha \neq \frac{k\pi}{2}\ (k \in \mathbb{Z}).$$

Seja tgα = t, então temos que:

$$t = \frac{A}{t} + \frac{B(1-t^2)}{2t} \Rightarrow 2t^2 = A + B - Bt^2.$$

Fazendo identidade de polinômios, vem que:

$$\begin{cases} -B = 2 \\ 2A + B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = -2 \\ A = 1 \end{cases}.$$

$Daí,\ tg\alpha = cotg\alpha - 2cotg2\alpha.$

Se $\alpha = \frac{k\pi}{2}$, **S** não faz sentido.

Se $\alpha \neq \frac{k\pi}{2}$, então

S = $(cotg\alpha - 2cotg2\alpha) + \frac{1}{2}(cotg\frac{\alpha}{2} - 2cotg\alpha) + \ldots + \frac{1}{2^n}(cotg\frac{\alpha}{2^n} - 2cotg\frac{\alpha}{2^{n-1}}) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ **S** = $\frac{1}{2^n}cotg\frac{\alpha}{2^n} - 2cotg2\alpha$.

2) $tg\,\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{2sen^2\frac{x}{2}}{2cos^2\frac{x}{2}}} = \pm\sqrt{\frac{1-cosx}{1+cosx}}$ (1).

$1 - \cos x = \frac{senbsenc+cosbcosc-cosa}{senbsenc} = \frac{\cos(b-c)-cosa}{senbsenc} = \frac{2sen\frac{a-b+c}{2}sen\frac{a+b-c}{2}}{senbsenc}.$

Mas a+b+c = 2p, então $1 - \cos x = \frac{2sen(p-b)sen(p-c)}{senbsenc}$ (2).

$1 + \cos x = \frac{senbsenc-cosbcosc+cosa}{senbsenc} = \frac{cosa-\cos(b+c)}{senbsenc} = \frac{2sen\frac{a+b+c}{2}sen\frac{-a+b+c}{2}}{senbsenc}$, então

$1 + \cos x = \frac{2senpsen(p-a)}{senbsenc}$ (3).

Substituindo (2) e (3) em (1), vem que:

$tg\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{sen(p-b)sen(p-c)}{senpsen(p-a)}}$.

3) Por hipótese,

$$sen2b - sen2a = sen2c - sen2b.$$

Daí, transformando diferença em produto, vem que:

$2sen(b - a)cos(b + a) = 2sen(c - b)cos(c + b) \Rightarrow$

$\Rightarrow sen[b + c - (a + c)]cos(b + a) = sen[c + a - (b + a)]cos(c + b) \Rightarrow$

$\Rightarrow sen(b + c)cos(a + c)cos(a + b) - sen(a + c)cos(b + c)cos(a + b) =$

$= sen(a + c)cos(a + b)cos(b + c) - sen(a + b)cos(a + c)cos(b + c).$

Dividindo ambos os membros da equação acima por cos(a + b)cos(b + c)cos(a + c) , vem que:

tg(b + c) - tg(a + c) = tg(a + c) – tg (a + b) , ou seja, tg(b + c), tg(a + c) e tg(a + b) estão em progressão aritmética.

4) Mostremos que existem dois números A e B tais que

$\frac{1}{sen\alpha}$ = Acotg$\frac{\alpha}{2}$ + Bcotgα.

Seja tg$\frac{\alpha}{2}$ = t, então temos que:

$\frac{1+t^2}{2t} = \frac{A}{t} + \frac{B(1-t^2)}{2t} \Rightarrow 1 + t^2 = 2A + B - Bt^2$.

Fazendo identidade de polinômios, vem que:

$\begin{cases} 2A + B = 1 \\ -B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \end{cases}$.

Daí, $\frac{1}{sen\alpha}$ = cotg$\frac{\alpha}{2}$ – cotgα.

Então, **S** = (cotg$\frac{\alpha}{2}$ – cotgα) + (cotgα – cotg2α) + ... + (cotg2^{n-1}α – cotg2^nα) ⇒

⇒ **S** = cotg$\frac{\alpha}{2}$ - cotg2^nα.

5) tg(a + b +c) – tga = $\frac{sen(a+b+c)}{\cos(a+b+c)} - \frac{sena}{cosa} = \frac{sen(a+b+c)cosa-senacos(a+b+c)}{cosacos(a+b+c)} = \frac{sen(b+c)}{cosacos(a+b+c)}$.

tgb + tgc = $\frac{senb}{cosb} + \frac{senc}{cosc} = \frac{senbcosc+senccosb}{cosbcosc} = \frac{\text{sen}(b+c)}{cosbcosc}$.

Daí, y = $\frac{sen(b+c)}{cosacos(a+b+c)} - \frac{sen(b+c)}{cosbcosc} = \frac{sen(b+c)[cosbcosc-cosacos(a+b+c)}{cosacosbcosccos(a+b+c)}$.

Mas, cosbcosc = $\frac{\cos(b+c)+\cos(b-c)}{2}$ e cosacos(a + b + c) = $\frac{\cos(2a+b+c)+\cos(b+c)}{2}$.

Então, y = $\frac{sen(b+c)[\cos(b-c)-\cos(2a+b+c)}{2cosacosbcosccos(a+b+c)}$ e finalmente, y = $\frac{sen(a+b)sen(b+c)sen(a+c)}{cosacosbcosccos(a+b+c)}$.

6) Multiplicando a primeira soma por 2sen$\frac{r}{2}$, vem que:

2sen$\frac{r}{2}$ ·**S** = 2senasen$\frac{r}{2}$ + 2sen(a + r)sen$\frac{r}{2}$ + ... + 2sen[a + (n – 1)r] sen$\frac{r}{2}$ =

= [cos(a - $\frac{r}{2}$) – cos(a + $\frac{r}{2}$)] + [cos(a + $\frac{r}{2}$) - cos(a + $\frac{3r}{2}$)] + ... + {cos[a + (2n – 3) $\frac{r}{2}$] -

– cos[a + (2n – 1) $\frac{r}{2}$]}.

Então, 2sen$\frac{r}{2}$ ·**S** = cos(a - $\frac{r}{2}$) – cos[a + (2n – 1) $\frac{r}{2}$] = 2sen$\frac{nr}{2}$sen[a + (n – 1) $\frac{r}{2}$] ⇒

⇒ **S** = $\frac{sen\frac{nr}{2}sen[a+(n-1)\frac{r}{2}]}{sen\frac{r}{2}}$.

Para r=a, analogamente, **C** = $\frac{sen\frac{na}{2}cos\frac{(n+1)a}{2}}{sen\frac{a}{2}}$.

Para r≠a, tomando **S** como uma função em *a*, ou seja, **S(a)**, e derivando, vem que:

Por um lado, **S'(a)** = {sena + sen(a + r) + sen(a + 2r) + ... + sen[a + (n – 1)r]}' =

= cosa + cos(a + r) + cos (a + 2r) + ... + cos[a + (n – 1)r] = **C** .

Por outro lado, **S'(a)** = $\{\frac{sen\frac{nr}{2}sen[a+(n-1)\frac{r}{2}]}{sen\frac{r}{2}}\}' = \frac{sen\frac{nr}{2}\cos[a+(n-1)\frac{r}{2}]}{sen\frac{r}{2}}$.

Confrontando, temos que:

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{S}'(\boldsymbol{a}) = \frac{sen\frac{nr}{2}cos\,[a+(n-1)\frac{r}{2}]}{sen\frac{r}{2}}.$$

$$\text{Logo, } \boldsymbol{C} = \frac{sen\frac{nr}{2}cos\,[a+(n-1)\frac{r}{2}]}{sen\frac{r}{2}}.$$

7) Primeiro, vamos mostrar que

$$\sec(na)\cdot\sec(n+1)a = \text{cosseca}\cdot[\text{tg}(n+1)a - \text{tg}(na)].$$

Desenvolvendo o lado direito da identidade,

cosseca·[tg(n + 1)a – tg(na)] = $\frac{1}{sena}\left[\frac{sen(n+1)a}{\cos(n+1)a} - \frac{sen(na)}{\cos(na)}\right] =$

$= \frac{1}{sena}\left[\frac{sen(n+1)a\cos(na) - sen(na)cos(n+1)a}{cosnacos(n+1)a}\right] = \frac{1}{sena}\cdot\frac{sena}{cos9na)cos(n+1)a} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ cosseca·[tg(n + 1)a – tg(na)] = sec(na)·sec(n +1)a.

Utilizando a identidade acima para calcular **S**, vem que:

S = cosseca·[tg2a – tga] + cosseca·[tg3a – tg2a] + ... + cosseca·[tg(n + 1)a – tg(na)] =

= cosseca·[tg(n + 1)a – tga] = cosseca·$[\frac{sen(n+1)a}{\cos(n+1)a} - \frac{sena}{cosa}] =$

$= \frac{sen(n+1)acosa - senacos(n+1)a}{sena\cdot cosa\cdot cos(n+1)a} \Rightarrow$ **S** = $\frac{sen(na)}{sena\cdot cosa\cdot cos(n+1)a}$.

8) Façamos uma função f, tal que f(θ) = cos(pθ) - $\cos^p$ θ.

Para p = 0, $f(\theta) = 0 \Rightarrow$ cos(pθ) = $\cos^p$θ.

Para p = 1, $f(\theta) = 0 \Rightarrow$ cos(pθ) = $\cos^p$θ.

Derivando f, vem que:

$f'(\theta)$ = -psen(pθ) + p$\cos^{p-1}$θsenθ = p[$\cos^{p-1}$θsenθ – sen(pθ)].

Se 0<p<1, senθ > sen(pθ) $\Rightarrow$ senθ – sen(pθ) > 0.

$\left.\begin{matrix} 0<cos\theta\leq 1 \\ p<1 \Rightarrow p-1<0\end{matrix}\right| \Rightarrow$ $\cos^{p-1}$θ ≥ 1 $\Rightarrow$ senθ $\cos^{p-1}$θ ≥ senθ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\cos^{p-1}$θsenθ – sen(pθ) ≥ senθ – sen(pθ) ≥ 0 $\Rightarrow$ $\cos^{p-1}$θsenθ – sen(pθ) ≥ 0.

P > 0 $\Rightarrow$ p[$\cos^{p-1}$θsenθ – sen(pθ)] ≥ 0.

Então, $f'(\theta) \geq 0$.

Como para θ = 0, temos que f(0) = 0, e que $f'(\theta) \geq 0$, então $f(\theta) \geq 0$, sendo que f se anula para θ = 0, ou seja:

$$\begin{cases} se\ \theta = 0, \cos(p\theta) = cos^p\theta \\ se\ \theta \neq 0, \cos(p\theta) > cos^p\theta \end{cases}.$$

Portanto, cos(pθ) é maior ou igual a $cos^p\theta$.

9) Sabemos que

sen x = 2sen$\frac{x}{2}$cos$\frac{x}{2}$ = 2sen$\frac{x}{2}$cos$\frac{x}{2}\cdot\frac{cos\frac{x}{2}}{cos\frac{x}{2}}$ = 2tg$\frac{x}{2}\cdot$cos² $\frac{x}{2}$, ou sen x = 2tg $\frac{x}{2}$(1 – sen² $\frac{x}{2}$) .

Como x → 0 , tg $\frac{x}{2} > \frac{x}{2}$ e sen $\frac{x}{2} < \frac{x}{2}$, então sen x > 2 · $\frac{x}{2}$[1 – ($\frac{x}{2}$)²] = x(1 – $\frac{x^2}{4}$) $\Rightarrow$sem x > x – $\frac{x^3}{4}$.

Sabemos que cos x = 1 – 2sen² $\frac{x}{2}$.

Então, como sen $\frac{x}{2} < \frac{x}{2}$, quando x → 0, vem que:

Cos x > 1 – 2 · $\frac{x^2}{4} \Rightarrow 1 - \frac{x^2}{2} > 1 - x^2$.

Como sen $\frac{x}{2}$ > x – $\frac{x^2}{4}$, temos que sen $\frac{x}{2} > \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2 \Rightarrow$ sen$\frac{x}{2} > \frac{x}{2} - \frac{x^3}{32}$.

Mas cos x = 1 – 2sen² $\frac{x}{2}$, então cos x < 1 – 2$(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{32})^2 = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{16} - \frac{x^6}{512} < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{16}$.
Logo, cos x < $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{16}$.

10) Calculemos, primeiramente, **C** + **S** e **C** – **S** .
C + **S** = (sen²a + cos²a) + [sen²(a + r) + cos²(a + r)] + ... + {sen²[a + (n – 1)r] + cos²[a + + (n – 1)r]} = n ⇒ **C** + **S** = n (1).
C – **S** = (cos²a – sen²a) + [cos²(a + r) – sen²(a + r)] + ... + {cos²[a + (n – 1)r] – sen²[a + (n – 1)r]} = cos2a + cos(2a + 2r) + ... + cos[2a + 2(n – 1)r].
Utilizando o resultado da 6ª questão, temos que:
C – S = $\frac{sen(nr) \cdot \cos[2a+(n-1)r]}{sen\ r}$ (2).
Somando (1) e (2):
2**C** = n + $\frac{sen(nr)\cos[2a+(n-1)r]}{sen\ r} = \frac{n \cdot sen\ r + sen(nr)\cos[2a+(n-1)r]}{sen\ r}$.
Então, **C** = $\frac{n \cdot sen\ r + sen(nr)\cos[2a+(n-1)r]}{2sen\ r}$.
Substituindo **C** em (1), vem que:
S = n - $\frac{n \cdot sen\ r + sen(nr)\cos[2a+(n-1)r]}{2sen\ r} = \frac{n \cdot sen\ r - sen(nr)\cos[2a+(n-1)r]}{2sen\ r}$.
Então, **S** = $\frac{n \cdot sen\ r - sen(nr)\cos[2a+(n-1)r]}{2sen\ r}$.

11) sen(a + b +c) = sen a·cos(b + c) + sen(b + c)·cos a = sen a·cos b· cos c + sen b · cos a· ·cos c + sen c· cos a· cos b – sen a· sen b· senc .
Como a,b,c são agudos, cos a, cos b, cos c estão compreendidos entre 0 e 1, então,
sen a·cos b· cos c < sen a
sen b · cos a· ·cos c < sen b
sen c· cos a· cos b < sen c
- sen a· sen b· senc < 0 .
Somando as quatro inequações acima, temos que:
sen a·cos b· cos c + sen b · cos a· ·cos c + sen c· cos a· cos b – sen a· sen b· senc < sen a + sen b + sen c.
Logo, sen(a + b + c) < sen a + sen b + sen c .

12) Seja **T(a)** = sen a + sen 2a + … + sen(na).
Derivando a expressão acima, temos que:
Por um lado, **T'(a)** = cos a + 2cos 2a + ... + ncos(na) = **S**.
E por outro lado, **T(a)** = $\frac{sen\frac{na}{2} sen\frac{(n+1)a}{2}}{sen\frac{a}{2}}$.
Então, **T'(a)** = $\frac{\left[\frac{n}{2}cos\frac{na}{2}sen\frac{(n+1)a}{2} + \frac{(n+1)}{2}cos\frac{(n+1)a}{2}sen\frac{na}{2}\right]sen\frac{a}{2} - \frac{1}{2}sen\frac{na}{2}sen\frac{(n+1)a}{2}cos\frac{a}{2}}{sen^2\frac{a}{2}}$.
T'(a) = $\frac{\frac{n}{2}\left[sen\frac{(n+1)a}{2}cos\frac{na}{2} + sen\frac{na}{2}cos\frac{(n+1)}{2}\right]sen\frac{a}{2} - \frac{1}{2}\left[sen\frac{(n+1)a}{2}cos\frac{a}{2} - sen\frac{a}{2}cos\frac{(n+1)}{2}\right]sen\frac{na}{2}}{sen^2\frac{a}{2}}$.
T'(a) = $\frac{\frac{n}{2}sen\frac{a}{2}sen\frac{(2n+1)a}{2} - \frac{1}{2}sen\frac{na}{2}sen\frac{na}{2}}{sen^2\frac{a}{2}}$.

Então, **T'(a)** = $\frac{\frac{n}{2}sen\frac{a}{2}sen\frac{(2n+1)a}{2} - sen^2\frac{na}{2}}{2sen^2\frac{a}{2}}$. Portanto, **S** = **T'(a)** = $\frac{\frac{n}{2}sen\frac{a}{2}sen\frac{(2n+1)a}{2} - sen^2\frac{na}{2}}{2sen^2\frac{a}{2}}$.

13) Primeiramente, calculemos cos a·cos 2a·cos 4a.

cos a·cos 2a·cos 4a = $\frac{1}{2sen\ a}$(sen 2a·cos 2a·cos 4a) = $\frac{1}{4sen\ a}$(sen 4a·cos 4a) = $\frac{sen\ 8a}{8sen\ a}$.

Então, sena·cos a·cos2a·cos 4a = $\frac{sen\ 8a}{8}$ (1).

Derivando a identidade acima, temos que:

cosa·cos a·cos 2a·cos 4a – sen a·sen a·cos 2a·cos 4a – 2sen a·cos a·sen 2a·cos 4a –

- 4sen a·cos a·cos 2a·sen 4a = cos 8a (2).

Dividindo (2) por (1), vem que:

cotg a – tg a – 2tg 2a – 4tg 4a = 8cotg 8a , ou

tg a + 2tg 2a + 4tg 4a = cotg a – 8cotg 8a.