Autor: Filipe R. S. Moreira – (ITA – SP)
Revisão: Thiago da Silva sobral – (ITA – SP)
Nível intermediário

# SOMATÓRIOS

Muitas vezes precisamos escrever somas de muitas parcelas, às vezes até infinitas delas e para isso usamos uma notação muito especial que facilita a nossa vida.

## 1. Notação: $a_1 + a_2 + ... + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

## 2. Propriedades de somatórios:

- Seja c uma constante real, então: $\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k$

Dem.: $\sum_{k=1}^{n} ca_k = ca_1 + ca_2 + ... + ca_n = c(a_1 + a_2 + ... + a_n) = c\sum_{k=1}^{n} a_k$

- $\sum_{k=1}^{n} (a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k \pm \sum_{k=1}^{n} b_k$

Dem.:

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k \pm b_k) = (a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + ... + (a_n \pm b_n) = (a_1 + a_2 + ... + a_n) \pm (b_1 + b_2 + ... + b_n) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_k \pm \sum_{k=1}^{n} b_k$$

- $\sum_{k=1}^{n} c\,(a_k \pm b_k) = c\left(\sum_{k=1}^{n} a_k \pm \sum_{k=1}^{n} b_k\right)$

Dem.: Análoga às outras.

- $\sum_{k=1}^{n} 1 = n$

Dem.: $\sum_{k=1}^{n} 1 = \sum_{k=1}^{n} k^0 = 1 + 2^0 + ... + n^0 = \overbrace{1 + 1 + ... + 1}^{n \text{ vezes}} = n$

## 3. Técnicas para computar somas:

### a-) Perturbação de somatórios:

Esta é uma técnica muito legal e prática e para ser usada devidamente é necessário que se ganhe um tempo estudando opções que melhor satisfaçam os problemas. Basta acrescentar ao somatório o próximo termo e assim reescrever o somatório de forma conveniente para que termos se cancelem e facilite o cálculo. Vamos ver alguns exemplos!!

Vamos calcular $\sum_{k=1}^{n} k^2$ . Como foi dito, temos que escolher o melhor somatório para perturbar, nesse caso vamos perturbar a soma dos cubos.

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 = \sum_{k=0}^{n} (k+1)^3 = 1 + \sum_{k=1}^{n} (k+1)^3 = 1 + \sum_{k=0}^{n} (k^3 + 3k^2 + 3k + 1) = 1 + \sum_{k=1}^{n} k^3 + 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k +$$

$$\sum_{k=1}^{n} 1 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \Rightarrow 3\sum_{k=1}^{n} k^2 = n^3 + 3n^2 + 2n - 3\sum_{k=1}^{n} k$$

Autor: Filipe R. S. Moreira – (ITA – SP)
Revisão: Thiago da Silva sobral – (ITA – SP)
Nível intermediário

Mas, $\sum_{k=1}^{n} k$ é soma de P.A, assim, $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. Logo, $3\sum_{k=1}^{n} k^2 = n^3 + 3n^2 + 2n$ - $3\,\frac{n(n+1)}{2}$

Então, $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$.

Outro exemplo, vamos resolver $\sum_{k=1}^{n} kk!$ Para isso, vamos perturbar $\sum_{k=1}^{n} k!$

$$\sum_{k=1}^{n} k! + (n+1)! = \sum_{k=0}^{n} (k+1)! = 1 + \sum_{k=1}^{n} (k+1)! = 1 + \sum_{k=1}^{n} (k+1)k! = 1 + \sum_{k=1}^{n} kk! + \sum_{k=1}^{n} k! \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} k! + (n+1)! = 1 + \sum_{k=1}^{n} kk! + \sum_{k=1}^{n} k! \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} kk! = (n+1)! - 1.$$

## Treinando:

1-) $\sum_{k=1}^{n} k2^k$

2-) Prove que $\sum_{k=1}^{n} k^3 - \left[\sum_{k=1}^{n} k\right]^2 = 0$.

3-) Calcule o resto da divisão de $\sum_{k=1}^{n} (k^2 + 3k + 1)k!$ por 2002.

4-) Calcule $3\sum_{k=1}^{n} (k^2 - 2)^2 + 2\sum_{k=1}^{n} (k+1)^2$ em função de n.

**Desafio**: Calcule por perturbação de somatórios $\sum_{k=1}^{n} sen(kx)$.

## b-) Operador diferença:

Essa é uma técnica muito interessante e poderosa que resolve muitos tipos de somatórios. Basta descobrir uma função contínua no intervalo que compreende o intervalo da soma, que quando aplicado o $\Delta f(k)$ resulte no somatório que queremos calcular.

Def.: $\Delta f(k) = f(k+1) - f(k)$.

Calculando $\sum_{k=1}^{n} \Delta f(k)$ temos que:

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta f(k) = f(n+1) - f(1).$$

Dem.: $\sum_{k=1}^{n} \Delta f(k) = (f(n+1) - f(n)) + (f(n) - f(n-1)) + ... + (f(2) - f(1)) = f(n+1) - f(1)$.

Observa-se então o porquê de essa ser uma técnica muito poderosa, temos uma fórmula pronta para resolver qualquer somatório, desde que se descubra uma função que quando aplicado o $\Delta f(k)$ encontre-se a "cara" do somatório que queremos. Vamos ver alguns exemplos: Vamos calcular o mesmo somatório anterior: $\sum_{k=1}^{n} kk!$

Solução: Seja $f(k) = k!$ assim, $\Delta f(k) = (k+1)! - k! = (k+1)k! - k! = k!(k+1-1) = kk!$

Autor: Filipe R. S. Moreira – (ITA – SP)
Revisão: Thiago da Silva sobral – (ITA – SP)
Nível intermediário

Logo, $\sum_{k=1}^{n} \Delta f(k) = \sum_{k=1}^{n} kk! = f(n+1) - f(1) = (n+1)! - 1$.

Vamos calcular $\sum_{k=1}^{n} sen(kx)$ . Seja $f$(k) = $cos$((k+b)x). $\Delta f(k)$ = cos((k+1)+b)x – cos((k+b)x) =

$= -2sen\left(\left(\frac{2k+1+2b}{2}\right)x\right)sen\left(\frac{x}{2}\right)$. Fazendo $1+2b=0$, temos b = -1/2.

Assim, $f(k) = \cos\left(k-\frac{1}{2}\right)x$ e $\Delta f(k) = -2sen(kx)sen\left(\frac{x}{2}\right)$.

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta f(k) = \cos\left((n+1)-\frac{1}{2}\right)x - \cos\left((1)-\frac{1}{2}\right)x = \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \cos\left(\frac{x}{2}\right) = -2sen\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)sen\left(\frac{nx}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} sen(kx) = \frac{sen\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)sen\left(\frac{nx}{2}\right)}{sen\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

## Treinando:

**1-)** Calcule $\sum_{k=1}^{n} \cos(a+kx) \quad a, x \in \Re$.

**2-)** Prove que $\sum_{k=0}^{44} \frac{2sen1}{\cos(2k+1)+\cos 1} = 1$.

**3-)** Sejam S = $\sin^4 2^o + \sin^4 7^o + \sin^4 12^o + ... + \sin^4 82^o + \sin^4 87^o$ e
T = $\cos^4 3^o + \cos^4 8^o + \cos^4 13^o + ... + \cos^4 83^o + \cos^4 88^o$. Determine S + T.

**4-)** Calcule os mesmos somatórios do item anterior agora com a técnica do operador diferença.

## c-) Soma de derivadas:

Existem alguns somatórios que o termo geral é parecido com a derivada de uma função que sabemos somar. Por exemplo, temos a soma $\sum_{k=1}^{n} k2^k$ em que os termos são da forma $kx^k$ são muito parecidos com $kx^{k-1}$ que é a derivada de $x^k$ que é uma PG e que a soma é conhecida. Para calcular o somatório $\sum_{k=1}^{n} kx^k$ basta dividir o termo geral por *x*, integrar o termo geral resultante, que vai se tornar uma PG, somar essa PG, derivar a resposta e depois multiplicar por x. Isto é possível porque a soma das derivadas é a derivada da soma. Vale salientar que para que essa técnica funcione sempre, é necessário que a função com a qual se parece o termo geral do nosso somatório, seja contínua no intervalo que compreende o intervalo do somatório Vejamos:

$$\sum_{k=1}^{n} kx^k = x\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = x\frac{d\left(\sum_{k=1}^{n} x^k\right)}{dx} = x\frac{d\left(\frac{x^{n+1}-x}{x-1}\right)}{dx} = \frac{nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x}{(x-1)^2}, \quad x \neq 1.$$

Autor: Filipe R. S. Moreira – (ITA – SP)
Revisão: Thiago da Silva sobral – (ITA – SP)
Nível intermediário

Para o caso particular de x = 2 temos a seguinte expressão: $\sum_{k=1}^{n} k2^k = (n-1)2^{n+1} + 2$ .

Obs.: É bom ficar claro que $x \neq 0$ , até porque não faz sentido o cálculo de uma soma em que todos os termos fossem zero pois o resultado seria trivial.

## d-) Soma de números binomiais:

Esta técnica envolve um conhecimento prévio de raízes da unidade. Essa associação é usada, porque temos algumas informações sobre os binomiais, por exemplo sabemos que $\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k} = 2^n$ (basta somar os números das linhas do triângulo de pascal) e sabemos que na equação $Z^n = 1, Z \in C$ , $Z^n - 1 = (Z-1)(\overbrace{Z^{n-1} + Z^{n-2} + \ldots + Z + 1}^{=0}) = 0$. Para a demonstração dessa propriedade, basta calcular o somatório abaixo e para isso basta substituir x por $\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ na expressão encontrada no exemplo de soma de senos em PA e também no exercício proposto de soma de cossenos em PA. Acompanhe o raciocínio abaixo:

Vejamos: $\sum_{k=0}^{n-1} cis\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\right) = \sum_{k=0}^{n-1}\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) =$

$$= \frac{\sin(n-1)\pi\cos(n-2)\pi}{sen\left(\frac{\pi}{n}\right)} + i\,\frac{\sin(n-1)\pi\sin(n-2)\pi}{sen\left(\frac{\pi}{n}\right)} = 0, \forall n \in Z.$$

Vejamos um exemplo para a melhor compreensão.

$\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{3k} = ?$ Seja $Z = cis\left(\frac{2\pi}{3}\right), Z \in C$

$$(1+1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \ldots$$

$$(1+Z)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}Z + \binom{n}{2}Z^2 + \binom{n}{3} + \ldots$$

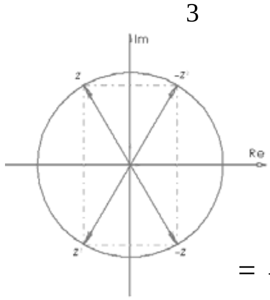
lembrando que $Z^4 = \overbrace{Z^3}^{=1}.Z = Z$

$$(1+Z^2)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}Z^2 + \binom{n}{2}Z + \binom{n}{3} + \ldots$$

$$(1+1)^n + (1+Z)^n + (1+Z^2)^n = 3\left(\binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \ldots\right) + \overbrace{(1+Z+Z^2)}^{=zero}\left(\binom{n}{1} + \binom{n}{4} + \binom{n}{7} + \ldots\right) +$$

$$+ \overbrace{(1+Z+Z^2)}^{=zero}\left(\binom{n}{2} + \binom{n}{5} + \binom{n}{8} + \ldots\right) = 3\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{3k} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{3k} = \frac{(1+1)^n + (1+Z)^n + (1+Z^2)^n}{3}$$

$= \frac{(1+1)^n + (-Z^2)^n + (-Z)^n}{3}$ . Da figura: $(-Z^2) = cis\left(\frac{\pi}{3}\right)$ e $(-Z) = (\overline{-Z^2}) = cis\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ .




$$\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{3k} = \frac{(1+1)^n + (\cos 60 + isen60)^n + (\cos(-60) + isen(-60))^n}{3} =$$

$$= \frac{(1+1)^n + (\cos(60n) + isen(60n)) + (\cos(-60n) + isen(-60n))}{3} =$$

$$= \frac{2^n + 2\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{3}.$$

OBS.: Há uma propriedade importante sobre soma de binomiais. Veja:

Autor: Filipe R. S. Moreira – (ITA – SP)
Revisão: Thiago da Silva sobral – (ITA – SP)
Nível intermediário

$\Rightarrow$ Absorção: $\sum_{k=r}^{s}\binom{n}{k}=\sum_{k=r}^{s}\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$.

Dem.: $\sum_{k=r}^{s}\binom{n}{k}=\sum_{k=r}^{s}\frac{n!}{k!(n-k)!}=\sum_{k=r}^{s}\frac{n}{k}\frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!}=\sum_{k=r}^{s}\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$

## Treinando:

1-) Calcule $\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{3k+1}$

2-) Calcule $\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{4k+1}$

3-) Calcule $\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{3k}k8^{k}$

4-) Calcule $\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{4k+2}(8k^{2}+6k+1)16^{k}$

## 4. Desafio final:

Para resolver essa questão não é necessário o conhecimento de nenhuma das técnicas acima mostradas, porém é preciso bastante raciocínio e domínio das propriedades de somatórios.

Prove que: $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2}}=\frac{\pi^{2}}{6}$.

Sugestão: Calcule $\sum_{k=1}^{n}\cot^{2}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$