Somas Telescópicas

São somas do tipo $\sum_{k=2}^{n}[F(k)-F(k-1)]=F(n)-F(1)$,vamos a alguns exemplos:

Exemplo 1) Avaliar a soma $\sum_{k=1}^{n}\cos(kx), x\neq 2k\pi$.

Solução: Vamos multiplicar e dividir o somatório por $2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$ .Daí segue que:

$2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\sum_{k=1}^{n}\cos(kx)=\sum_{k=1}^{n}2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\cos(kx)=\sum_{k=1}^{n}\left[\operatorname{sen}\left(k+\frac{1}{2}\right)x-\operatorname{sen}\left(k-\frac{1}{2}\right)x\right]$,agora fica fácil basta substituir o valor de k de 1 até n e você vai obter:

$\sum_{k=1}^{n}\left[\operatorname{sen}\left(k+\frac{1}{2}\right)x-\operatorname{sen}\left(k-\frac{1}{2}\right)x\right]=\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)$ .Agora lembre que devemos dividir por $2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$ .Então fica

$$\sum_{k=1}^{n}\cos(kx)=\frac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}-\frac{1}{2}$$

Exemplo 2) Calcular $\sum_{k=0}^{n}\tan^{-1}\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right)$

Solução: Faça $tga=u\rightarrow a=tg^{-1}u$ e $tgb=v\rightarrow b=tg^{-1}v$,temos que $tg(a-b)=\frac{tga-tgb}{1+tga.tgb}$ substituindo temos:

$tg(tg^{-1}u-tg^{-1}v)=\frac{u-v}{1+u.v}\rightarrow tg^{-1}u-tg^{-1}v=tg^{-1}\left(\frac{u-v}{1+uv}\right)$ por simplicidade tome $a_k=tg^{-1}k$ .Daí segue : $tg\left(a_{k+1}-a_k\right)=\frac{tga_{k+1}-tga_k}{1+tga_{k+1}.tga_k}=\frac{k+1-k}{1+(k+1)k}=\frac{1}{k^2+k+1}$ .Pronto agora fica fácil,vejamos:

$$\sum_{k=0}^{n}tg^{-1}\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right)=\sum_{k=0}^{n}tg^{-1}\left[tg\left(a_{k+1}-a_k\right)\right]=\sum_{k=0}^{n}\left(a_{k+1}-a_k\right)=a_{n+1}-a_1=tg^{-1}(n+1)-\frac{\pi}{4}$$

Exercícios

1)Prove que :

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}+\frac{\operatorname{sen}(2x)}{\cos(2x)}+\ldots+\frac{\operatorname{sen}(nx)}{\cos(nx)}=\cot gx-\frac{\cos(n+1)x}{\operatorname{sen} x.\cos^{n} x},\forall x\neq\frac{k\pi}{2},k\in Z$$

2)Prove que:

$$\frac{1}{\cos 0^{\circ}.\cos 1^{\circ}}+\frac{1}{\cos 1^{\circ}.\cos 2^{\circ}}+\ldots+\frac{1}{\cos 88^{\circ}.\cos 89^{\circ}}=\frac{\cos 1^{\circ}}{\operatorname{sen}^{2} 1^{\circ}}$$

3)Tome **n** como um inteiro positivo e **a** como um número real, tal que $\frac{a}{\pi}$ é um número irracional. Calcule a soma $\frac{1}{\cos a-\cos(3a)}+\frac{1}{\cos a-\cos(5a)}+\ldots+\frac{1}{\cos a-\cos(2n+1)a}$

4)Prove a identidade

$$\sum_{k=1}^{n} tg^{-1}\left(\frac{1}{2k^{2}}\right)=tg^{-1}\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

5)Avalie a soma $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n}}tg\left(\frac{a}{2^{n}}\right)$ onde $a\neq k\pi,k\in Z$

6)Prove que $\sum_{n=1}^{\infty}3^{n-1}\operatorname{sen}^{3}\left(\frac{a}{3^{n}}\right)=\frac{1}{4}(a-\operatorname{sen} a)$

7)Prove que para todo inteiro n e para todo número real $x\neq\frac{k\pi}{2^{m}}\left(m=0,1,2,..,n\right),k\in Z\big)$

$$\frac{1}{\operatorname{sen}(2x)}+\frac{1}{\operatorname{sen}(4x)}+\cdots+\frac{1}{\operatorname{sen}(2^{n} x)}=\cot gx-\cot g(2^{n} x)$$

8)Calcule $\frac{tg1}{\cos 2}+\frac{tg2}{\cot g4}+\cdots+\frac{tg2^{n}}{\cos 2^{n+1}}$

9)Avalie o produto $\prod_{k=1}^{n}\left(1-tg^{2}\frac{2^{k}\pi}{2^{n}+1}\right)$

10) Avalie o produto $\prod_{k=1}^{n}\left(1+2\cos\frac{2\pi.3^k}{3^n+1}\right)$

Gabarito

3) $\frac{\cot ga-\cot g(n+1)a}{2\,\text{sen}\,a}$

5) $\frac{1}{a}-\cot ga$

8) $tg\left(2^{n+1}\right)-tg1$

9) -2^n

10) 1