Anexo ao Artigo de Somatórios
Prof. Filipe Rodrigues
Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA)
(2004)

Resolução do Desafio proposto pelo artigo de Somatórios

Vamos calcular o somatório $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k^2}\right)$.

Primeiramente calcularemos uma expressão para $sen(nx)$. Visto que $sen(nx)=\frac{cis(nx)-cis(-nx)}{2i}$, vem:

$$sen(nx)=\frac{cis(nx)-cis(-nx)}{2i}=\frac{1}{2i}\left[\left(cis(x)\right)^n-\left(cis(-x)\right)^n\right]=$$

$$=\frac{1}{2i}\sum_{k=0}^{n}\left[\binom{n}{k}\cos^{n-k}(x).i^k\,\text{sen}^k(x)-\binom{n}{k}\cos^{n-k}(x)(-1)^k i^k\,\text{sen}^k(x)\right]=$$

$$=\frac{1}{2i}\sum_{k=0}^{n}\left[\binom{n}{k}\cos^{n-k}(x).\text{sen}^k(x)\left(i^k-(-i)^k\right)\right]=\sum_{k=0}^{n}\left[\binom{n}{k}\cos^{n-k}(x).\text{sen}^k(x).i^k\left(1-(-1)^k\right)\right].$$

Veja que nesse último resultado, se k é par, o termo correspondente do somatório é zero, caso seja ímpar o resultado fica expresso por:

$$2i.\frac{1}{2i}\sum_{k=0}^{n}\left[\binom{n}{2k+1}\cos^{n-(2k+1)}(x).\text{sen}^{2k+1}(x).(-1)^k\right]=\sum_{k=0}^{n}\left[\binom{n}{2k+1}\cos^{n-(2k+1)}(x).\text{sen}^{2k+1}(x).(-1)^k\right].$$

Dessa forma a expressão que gera sen(nx) é dada por:

$\text{sen}(nx)=\sum_{k=0}^{n}\left[\binom{n}{2k+1}\cos^{n-(2k+1)}(x).\text{sen}^{2k+1}(x).(-1)^k\right]$. Vamos usar esse mesmo resultado para calcular

sen((2n+1)x). Substituindo "n" por "2n+1" vem:

$$\text{sen}((2n+1)x)=\sum_{k=0}^{n}\left[\binom{2n+1}{2k+1}\cos^{(2n+1)-(2k+1)}(x).\text{sen}^{2k+1}(x).(-1)^k\right]=\sum_{k=0}^{n}\left[\binom{2n+1}{2k+1}\cos^{(2n-2k)}(x).\text{sen}^{2k+1}(x).(-1)^k\right]$$

Dividindo ambos os lados da igualdade por $\text{sen}^{2n+1}(x)$ - veja que esse fator não depende de "k" logo é uma constante no somatório –, chega-se à::

$$\frac{\operatorname{sen}((2n+1)x)}{\operatorname{sen}^{2n+1}(x)}=\sum_{k=0}^{n}\left[\binom{2n+1}{2k+1}\frac{\cos^{(2n-2k)}(x).\operatorname{sen}^{2k+1}(x).(-1)^k}{\operatorname{sen}^{2n+1}(x)}\right]=\sum_{k=0}^{n}\left[\binom{2n+1}{2k+1}\cos^{(2n-2k)}(x).\operatorname{sen}^{(2k-2n)}(x).(-1)^k\right]=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\left[\binom{2n+1}{2k+1}\frac{\cos^{(2n-2k)}(x)}{\operatorname{sen}^{(2n-2k)}(x)}.(-1)^k\right]=\sum_{k=0}^{n}\left[\binom{2n+1}{2k+1}(\cot^2(x))^{n-k}.(-1)^k\right]$$, logo:

$\frac{\operatorname{sen}((2n+1)x)}{\operatorname{sen}^{2n+1}(x)}=\sum_{k=0}^{n}\left[\binom{2n+1}{2k+1}(\cot^2(x))^{n-k}.(-1)^k\right]$. Vamos atribuir $y=\cot^2(x)$. Dessa forma o somatório fica escrito como,

$\frac{\operatorname{sen}((2n+1)x)}{\operatorname{sen}^{2n+1}(x)}=\sum_{k=0}^{n}\left[\binom{2n+1}{2k+1}y^{n-k}.(-1)^k\right]=\binom{2n+1}{1}y^n-\binom{2n+1}{3}y^{n-1}+...+(-1)^{n-1}\binom{2n+1}{2n-1}y+1$, que não

passa de um polinômio, em y, do (n)-ésimo grau. Como se trata de uma igualdade, se tem que as raízes do polinômio, são as mesmas que zeram o numerador da parte esquerda da igualdade, ou seja, as raízes saem da equação $\operatorname{sen}((2n+1)x)=0$, que são:

$(2n+1)x=k\pi\Rightarrow x=\frac{k\pi}{(2n+1)}$, $k=1,2,3,...,n$. Com essa conclusão, o somatório $\sum_{k=1}^{n}\left[\cot^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right]$, é a

soma das raízes do polinômio em “y”, correspondente à parte direita da igualdade. Essa soma das raízes pode ser obtida usando as relações de Girard. Veja!!

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\cot^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right]=\frac{\binom{2n+1}{3}}{\binom{2n+1}{1}}=\frac{\frac{(2n+1)(2n)(2n-1)}{3.2.1}}{(2n+1)}=\frac{(2n-1)n}{3}.$$

Pela conseqüência da relação Fundamental da Trigonometria se tem que: $\cos\sec^2(x)=1+\cot^2(x)$, dessa forma, $\sum_{k=1}^{n}\left[\cos\sec^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right]=n+\frac{(2n-1)n}{3}=\frac{2n^2+2n}{3}$.

Partindo da desigualdade $\operatorname{sen}(x)\le x\le \operatorname{tg}(x)\ \Rightarrow\ \cos\sec(x)\ge\frac{1}{x}\ge\cot(x)\Rightarrow\ \cos\sec^2(x)\ge\left(\frac{1}{x}\right)^2\ge\cot^2(x)$,

logo: $\sum_{k=1}^{n}\cos\sec^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\ge\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2n+1}{k\pi}\right)^2\ge\sum_{k=1}^{n}\cot^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\ \Rightarrow\ \frac{2n^2+2n}{3}\ge\sum_{k=1}^{n}\frac{(2n+1)^2}{k^2\pi^2}\ge\frac{2n^2-n}{3}\ \Rightarrow$

$\frac{(2n^2+2n).\pi^2}{3.(2n+1)^2} \geq \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k^2}\right) \geq \frac{(2n^2-n).\pi^2}{3.(2n+1)^2}$. Aplicando o limite quando n tende ao infinito , em todas as partes da desigualdade vem: $\lim_{n\to\infty}\frac{(2n^2+2n).\pi^2}{3.(2n+1)^2} \geq \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k^2}\right) \geq \lim_{n\to\infty}\frac{(2n^2-n).\pi^2}{3.(2n+1)^2} \Rightarrow \frac{\pi^2}{6} \geq \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k^2}\right) \geq \frac{\pi^2}{6}$, que pelo Teorema do Confronto: $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k^2}\right) = \frac{\pi^2}{6}$.