MOVIMENTOS PERIÓDICOS / MOVIMENTO HARMÔNICO SIMPLES / SUPERPOSIÇÃO DE MOVIMENTOS HARMÔNICOS SIMPLES DE MESMA DIREÇÃO E DE DIREÇÕES PERPENDICULARES / BATIMENTOS / FIGURAS DE LISSAJOUS / PÊNDULO SIMPLES

1. Movimentos periódicos

São encontrados com bastante freqüência, tantos os de origem natural como os que o homem produz com finalidades diversas.

O estudo dos M. P.s pode ser bastante complexo, assim, para o nosso propósito, analisaremos apenas o chamado movimento harmônico simples, cujo equacionamento e compreensão é mais fácil.

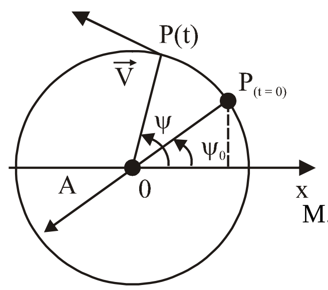
2. Movimento harmônico simples

Características:

- Movimento retilíneo (apenas um grau de liberdade)
- Movimento oscilatório em relação a um ponto chamado origem 0.
- Existência de uma força restauradora, que tende a fazer a partícula voltar à posição de equilíbrio. Esta força é proporcional a distância da partícula a origem: F = Kx.

3. Equações do M.H.S

Usamos o artifício matemático do estudo de um M.C.U para encontrar as equações do M.H.S.



Analisando a figura, vemos que a projeção do ponto **P**, sobre a reta $\overrightarrow{OX}$ descreve um M.H.S.

A equação para este movimento é $\boxed{x = A\cos(\psi_O + wt)}$ (I)

Se a análise for feita em relação ao eixo **0Y** temos a relação: $\boxed{x = A\,\text{sen}(\psi_O + wt)}$ (II)

Tanto a equação (I) como a (II) podem ser usadas, geralmente, a escolha da equação fica por conta da facilidade na resolução do problema.

Para achar as equações da velocidade e da aceleração basta descrevermos a equação horário, assim:

$$\begin{cases} x = A\cos(\psi_o + wt) \\ V = -wA\,\text{sen}(\psi_o + wt) \\ \alpha = -w^2A\cos(\psi_o + wt) = -w^2x \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = A\,\text{sen}(\psi_o + wt) \\ V = -wA\cos(\psi_o + wt) \\ \alpha = -w^2A\,\text{sen}(\psi_o + wt) = -w^2x \end{cases}$$

onde: $\boxed{\begin{array}{l} w = \text{pulsação} \\ \psi_o = \text{fase inicial (ou constante de fase)} \\ A = \text{amplitude} \\ \psi_o + wt = \text{fase do movimento} \end{array}}$

4. Velocidade e aceleração

Temos que: $V_{máx} \Rightarrow \cos(\psi_o + wt)$ ou $\text{sen}(\psi_o + wt) = -1$

Assim: $\boxed{V_{máx} = +wA}$

Analogamente: $\boxed{\alpha_{máx} = w^2A}$

5. Período no M.H.S.

Sabemos que: $\boxed{F = -Kx}$ (I) para uma partícula em M.H.S. e que $\boxed{\alpha = -w^2x}$

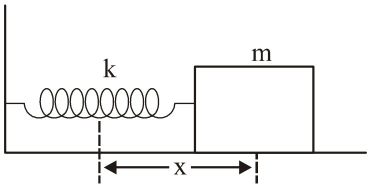
Assim: $\boxed{F = m\alpha \Rightarrow F = -mw^2x}$ (II)

De (I) e (II) temos: $\boxed{-mw^2x = -Kx \Rightarrow K + mw^2 \Rightarrow w = \sqrt{\frac{k}{m}}; T = \frac{2\pi}{w} \Rightarrow \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}}$

Está fórmula vale para qualquer corpo em M.H.S.

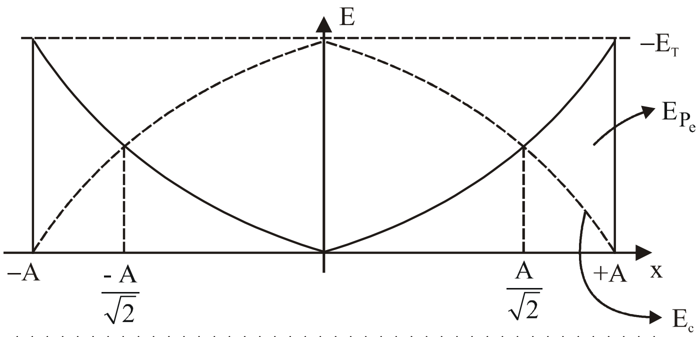
6. Sistema – Massa – Mola

Horizontal

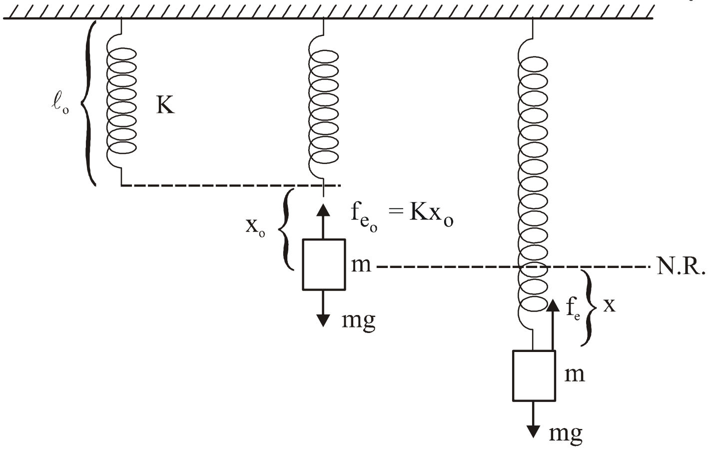


$\boxed{\zeta = \int_o^x F\,dx = \frac{1}{2}Kx^2}$

Em um sistema conservativo $\boxed{E_R = cte}$, temos $\therefore$



Vertical

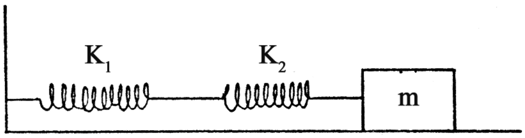


$$E_m = E_c = E_{p_e} + E_{p_g}$$
$$E_m = \frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}k(x_o + x)^2 - mgx$$
$$E_m = \frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}k(x_o^2 + x_2 + 2xx_o) - Kx_o x$$
$$E_m = \frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}k\ x_o^2 + \frac{1}{2}kx^2$$
$$E_m = \frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}kx^2 + \boxed{\frac{1}{2}k\ x_o^2} \longrightarrow \text{cte}$$

Se formos calcular ΔE_m, podemos considerar a $\boxed{E_m = \frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}kx^2}$ (igual a do sistema massa mola horizontal).

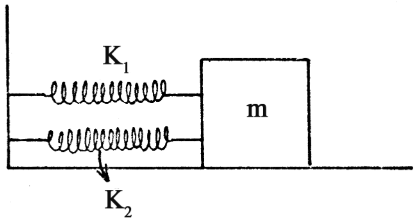
07. MOLAS

a)



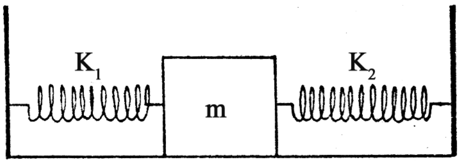
$$K_e = \frac{K_1K_2}{K_1 + K_2}$$

b)



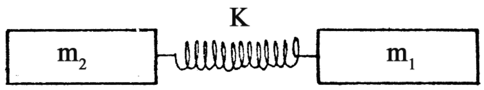
$K_2 = K_1 + K_2$

c)



$K_e = K_1 + K_2$

d)



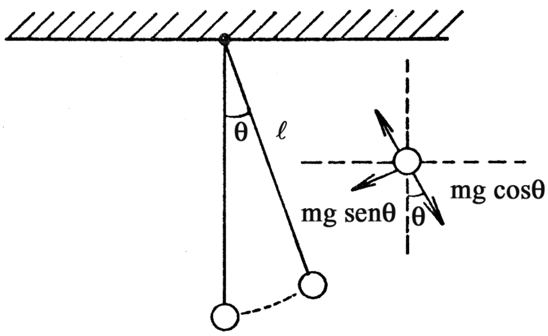
$$M_{reduzida} = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}$$

Obs.: $\boxed{k\ \alpha\ \frac{1}{\ell}}$

08. PÊNDULO SIMPLES

O pêndulo simples não descreve um M.H.S., como já vimos, para existência de um M.H.S. é necessário que a partícula descreva um movimento retilíneo, o que não é o caso do pêndulo simples.

Porém, para ângulos (θ) de abertura pequena, podemos considerar o pêndulo simples como descrevendo um M.H.S.



θ pequeno $\rightarrow$ $\text{sen}\theta \approx \text{tg}\theta \approx \theta \approx \frac{x}{\ell}$

F_R $\rightarrow$ Força restauradora

Assim ∴ $\boxed{F_R = mg\ \text{sen}\theta \rightarrow F_R \approx mg\theta \rightarrow F_R = mg\frac{x}{\ell} \rightarrow F_R = \frac{mg}{\ell}x}$

Onde $\boxed{\frac{mg}{\ell} = k}$ e $\boxed{F_R = -kx}$ (M.H.S.)

Podemos, dessa relação, calcular ainda o período do pêndulo simples.

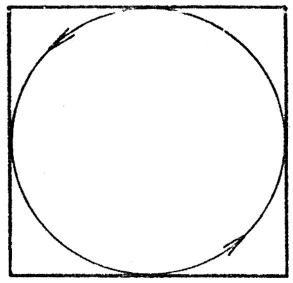
$$\boxed{T = 2\ell\sqrt{\frac{m}{K}}}\;;\quad \boxed{K = \frac{mg}{\ell}}\;\rightarrow\;\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}}$$

09. SUPERPOSIÇÃO DE M.H.S. PERPENDICULARES DE MESMA FREQÜÊNCIA. FIGURAS DE LISSAJOUS.

a) $x = A\cos(wt)$

$y = A\cos\left(wt + \frac{\pi}{2}\right)$

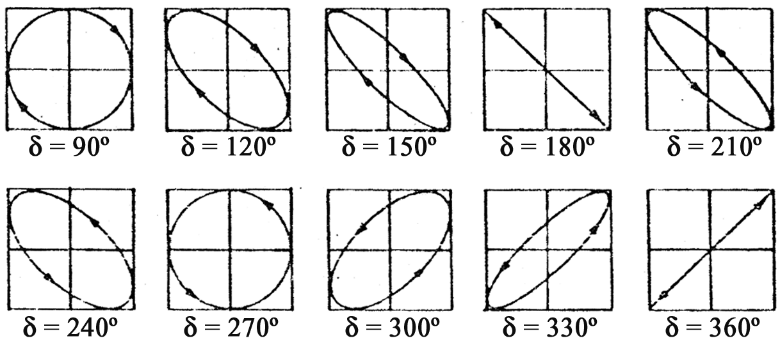
Conclusões $\begin{cases} \text{figura} \rightarrow \text{circunferência} \\ x^2 + y^2 = A^2 \end{cases}$



b) $x = A\cos(wt)$

$y = A\cos(wt + \psi)$

Pode ocorrer qualquer uma das trajetórias abaixo.



c) $x = A\cos(wt)$

$y = A\cos(wt)$

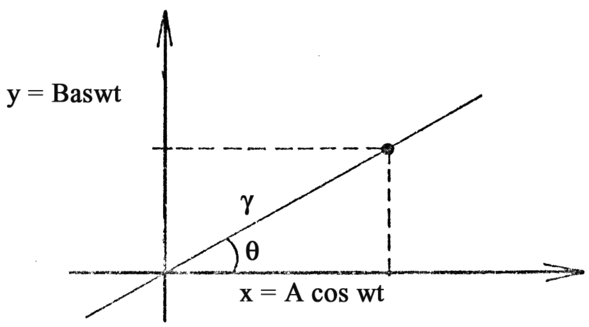
Caso visto no item anterior que cria como figura uma reta bissetriz do 1º e do 3º quadrante.

d) $x = A\cos wt$

$y = B\cos wt$; $A \neq B$

Conclusões $\begin{cases} y = \frac{B}{A}x \\ \text{figura} \rightarrow \text{reta de coeficiente angular } \frac{B}{A}. \end{cases}$

Observação: Nos dois últimos casos (**c** e **d**) o movimento resultante é um M.H.S.



$$\boxed{r = \sqrt{B^2 + A^2}\cos wt}$$

mesma fase e mesma freqüência

O movimento resultante, sendo retilíneo, torna possível a existência do M.H.S.

e) $x = A\cos(wt)$

$y = B\cos\left(wt + \frac{\pi}{2}\right)$

Conclusões $\begin{cases} \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1 \\ \text{figura} \rightarrow \text{elipse} \end{cases}$

f) $x = A\cos(wt)$

$y = B\cos(wt + \psi)$

Conclusões $\begin{cases} \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy}{AB}\cos\psi = \text{sen}^2\psi \\ \text{equação de uma elipse rotacionada.} \end{cases}$

- Regra prática de Edson Parente para obter o sentido e a inclinação da elipse rotacionada.

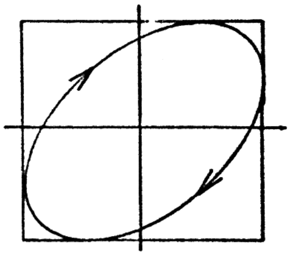
I. SENTIDO:
senψ indica o sentido do movimento

$\boxed{\begin{array}{l} \text{sen}\psi > 0 \rightarrow \text{horário} \\ \text{sen}\psi < 0 \rightarrow \text{antihorário} \end{array}}$

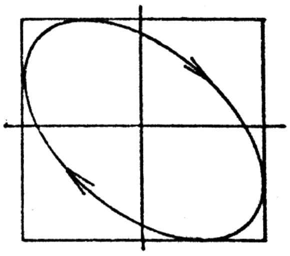
II. INCLINAÇÃO:
cosψ indica a inclinação da figura.

$\boxed{\begin{array}{l} \cos\psi > 0 \rightarrow 1^{\text{o}} \text{ e } 3^{\text{o}} \text{ quadrantes (inclinando à direita)} \\ \cos\psi < 0 \rightarrow 2^{\text{o}} \text{ e } 4^{\text{o}} \text{ quadrantes (inclinando à esquerda)} \end{array}}$

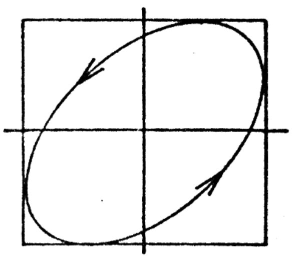
Exemplos:



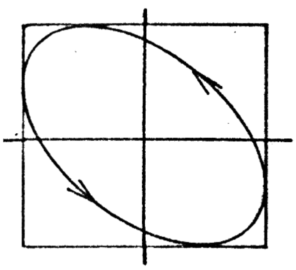
$\begin{array}{l} \cos\psi > 0 \\ \text{sen}\psi > 0 \end{array} \Rightarrow 0 < \psi < \frac{\pi}{2}$



$\begin{array}{l} \cos\psi < 0 \\ \text{sen}\psi > 0 \end{array} \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \psi < \pi$



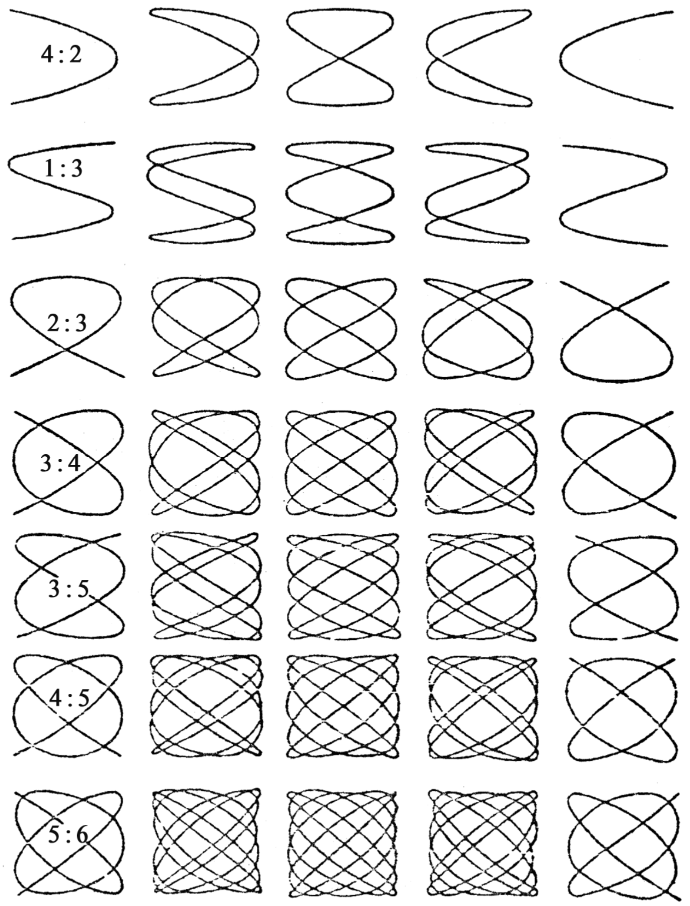
$\begin{array}{l} \cos\psi > 0 \\ \text{sen}\psi < 0 \end{array} \Rightarrow \frac{3\pi}{2} < \psi < 2\pi$



$\begin{array}{l} \cos\psi < 0 \\ \text{sen}\psi < 0 \end{array} \Rightarrow \pi < \psi < \frac{3\pi}{2}$

10. SUPERPOSIÇÃO DE M.H.S. PERPENDICULARES E FREQÜÊNCIAS DIFERENTES

Descrevem trajetórias que são também chamadas de figuras de Lissajous, porém, essas trajetórias são extremamente complexas vistas com o auxílio de osciloscópios.



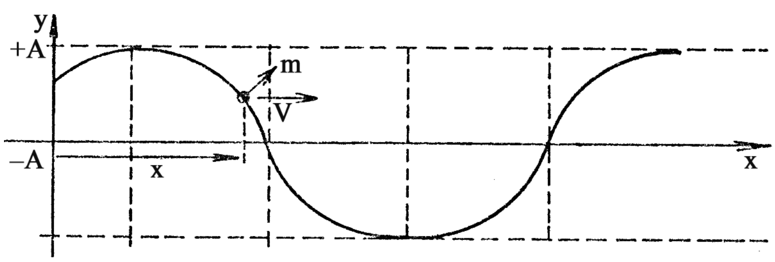
11. PRINCÍPIO DA SUPERPOSIÇÃO DE MOVIMENTOS HARMÔNICOS SIMPLES

É um fato experimental que, para muitos tipos de ondas, duas ou mais ondas podem cruzar-se na mesma região do espaço independentemente uma da outra. O fato de as ondas serem independentes uma de outra significa que o deslocamento de qualquer partícula, em dado instante, é simplesmente a soma dos deslocamentos que seriam produzidos se as ondas agissem isoladamente. Este processo de adição vetorial de deslocamento de uma partícula denomina-se superposição.

Observação:
No caso de ondas em meios deformáveis, o princípio da superposição é válido desde que a deformação e a força restaurada sejam proporcionais entre si ($F_R = C \cdot x$), considerando cada onda em M.H.S.

12. FUNÇÃO DE ONDA

Seja uma onda periódica (senoidal), cuja fonte realiza um M.H.S. de amplitude **A**, originando pulsos que se propagam com velocidade **V**. Num dado tempo **t’** uma massa **m** realiza um M.H.S. conforme sua função de onda.



$$y = A\cos(\psi_o + wt)$$

No tempo $\boxed{t' = \frac{x}{V}}$, temos:

$$\boxed{y = A\cos[\psi_o + w(t - t')] = A\cos\left[\psi_o + \frac{2\pi}{t}\left(t - \frac{x}{V}\right)\right] = A\cos\left[\psi_o + \frac{2\pi}{t}t - \frac{2\pi x}{VT}\right]}$$ onde $\boxed{w = \frac{2\pi}{T}}$ (pulsação) e

$\boxed{K = \frac{2\pi}{VT} = \frac{2\pi}{\lambda}}$ (vetor Poynting – vetor que indica o sentido de propagação do pulso).

Então: $\boxed{y = A\cos[\psi_o + wt - kx]}$ (função de onda)

Observação:

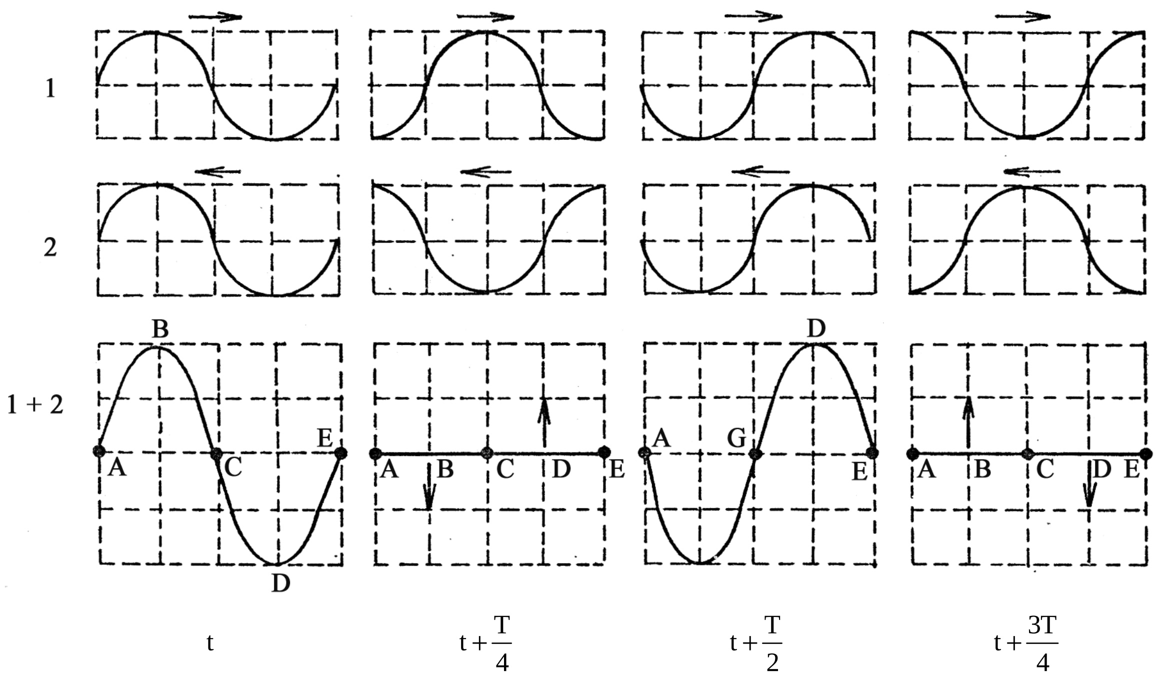
Quando x = 0, $y = A\cos[\psi_o + wt]$ é a função de onda que a fonte realiza o M.H.S. Então $v = -Aw\,\text{sen}[\psi_o + wt]$ é a velocidade com que a fonte oscila.

13. SUPERPOSIÇÃO DE MOVIMENTOS HARMÔNICOS SIMPLES DE MESMA DIREÇÃO

a) Ondas Estacionáras

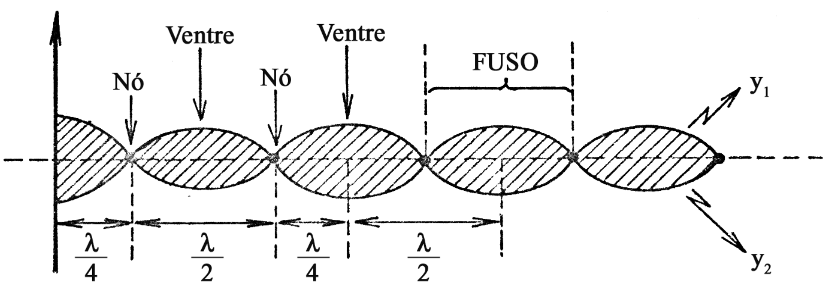
Fenômeno ondulatório (onda) resultante da superposição de duas ondas (senoidais) iguais (mesma freqüência, velocidade e amplitude) que se propagam no mesmo meio, na mesma direção e em sentidos contrários.

Consideremos duas ondas que viajem numa corda elástica.



Nos pontos **B** e **D** ocorre interferência construtiva (formação de VENTRES) e nos pontos **A**, **C** e **E** interferência destrutiva (formação de nós).

É comum se representa uma onda estacionária através de uma figura que corresponde à reunião de diversas fotografias obtidas em instantes sucessivos. A porção da onda estacionária, compreendida entre dois nós consecutivos, é denominada FUSO. A distância entre dois ventres (ou nós) consecutivos é igual à metade do comprimento de onda e a distância entre um nó e um ventre consecutivo é igual à quarta parte do comprimento de onda.



Das funções de ondas; temos:

$$\boxed{y_1 = A\cos(wt + kx)} \quad \text{e} \quad \boxed{y_2 = A\cos(wt - kx)}$$

A equação da onda resultante é

$$\boxed{y_R = y_1 + y_2 = A[\cos(wt + kx) + \cos(wt - kx)]}$$

$$\boxed{y_R = \underbrace{2A\cos(kx)}_{\text{AMPLITUDE}} \cdot \cos(wt)} \quad \text{onde} \quad \boxed{A_R = 2A\cos(kx)}$$

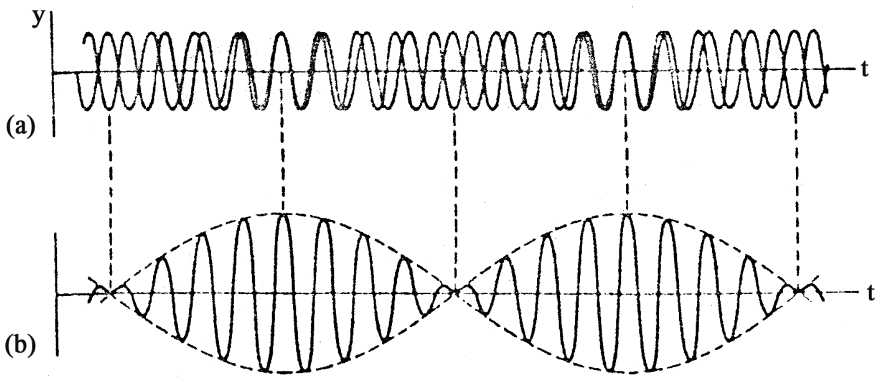
Isto é, a amplitude da onda resultante varia conforme a posição (x), ou seja, A_R é função de **x** (INTERFERÊNCIA DA POSIÇÃO).

Observações:

1. Está claro que não há transmissão de energia ao longo da corda para a direita ou para a esquerda, pois a energia não pode ultrapassar os pontos nodais, em que a corda está permanentemente em repouso (ver figura). Portanto, a energia permaneceu "estacionária" na corda, embora alterando-se entre energia cinética de vibração e energia potencial elástica.
2. As ondas (mecânica ou eletromagnética) componentes que se movem em sentidos opostos ao longo da corda ainda produzirão ondas estacionárias mesmo se tiverem amplitudes diferentes.

b) Batimentos

É o fenômeno ondulatório resultante da interferência de ondas de mesma amplitude e freqüências ligeiramente diferentes, quando duas ou mais ondas se propagam numa mesma direção e num mesmo sentido.



Das funções de ondas, temos:

$$\boxed{y_1 = A\cos w_1 t = A\cos(2\pi f_1 t)} \qquad \boxed{y_2 = A\cos w_2 t = A\cos(2\pi f_2 t)}$$

A equação da onda resultante é

$$\boxed{y_R = y_1 + y_2 = A[\cos(2\pi f_1 t) + \cos(2\pi f_2 t)]}$$

$$\boxed{y_R = \underbrace{2A\cos\left[2\pi\left(\frac{f_1 - f_2}{2}\right)t\right]}_{\text{Amplitude}} \cdot \cos\left[2\pi\left(\frac{f_1 + f_2}{2}\right)t\right]} \quad \text{onde}$$

$$\boxed{A_R = 2A\cos\left[2\pi\left(\frac{f_1 - f_2}{2}\right)t\right]} \quad \text{(AMPLITUDE DA ONDA RESULTANTE)}$$

$$\boxed{f_R = \frac{f_1 + f_2}{2}} \quad \text{(FREQÜÊNCIA DA ONDA RESULTANTE)}$$

Veja que a amplitude resultante é função de tempo **t** (INTERFERÊNCIA DO TEMPO).

Um batimento, isto é, um máximo na amplitude ($A_R = 2A$), ocorrerá sempre que $\cos\left[2\pi\left(\frac{f_1 - f_2}{2}\right)t\right]$ for igual a 1 ou a –1.

Como cada um destes valores ocorre urna vez em cada ciclo, então o número de batimentos por segundo (freqüência de batimentos) será o dobro da freqüência de amplitude $f_{Amp.}$, isto é, $|f_1 - f_2|$.

- FREQÜÊNCIA DA AMPLITUDE: $\boxed{f_{Amp} = \left|\frac{f_1 - f_2}{2}\right|}$
- FREQÜÊNCIA DE BATIMENTO: (número de batimentos por segundo): $\boxed{F_{Bat} = |f_1 - f_2|}$

Embora possam acontecer com quaisquer tipos de ondas periódicas, os batimentos são particularmente perceptíveis com as ondas sonoras, sendo utilizados, por exemplo, na afinação de instrumentos parte-se de uma situação em que ocorrem batimentos entre as duas fontes, e, alterando-se a freqüência de uma delas, percebe-se uma diminuição gradativa dos batimentos, até chegar-se à situação de unissono (freqüências iguais).

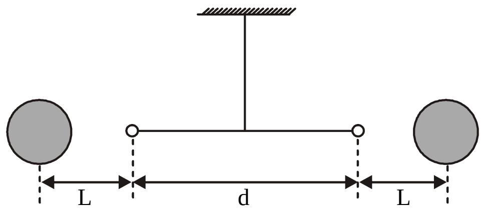
Observações:
1. Por simplicidade, admitimos que as duas ondas tem a mesma amplitude, mas isto não é necessário.
2. O movimento resultante dos batimentos não é M.H.S. será periódico se as freqüências forem comensuráveis.
   No entanto, nas ondas estacionárias, cada ponto (exceto os nós) realizam M.H.S. conforme sua amplitude.

14. SUPERPOSIÇÃO DE MOVIMENTOS HARMÔNICOS SIMPLES DE DIREÇÕES PERPENDICULARES

A trajetória do movimento resultante da superposição de dois M.H.S. de direções perpendiculares denomina-se FIGURAS DE LISSAJOUS. (Visto anteriormente).

QUESTÕES DESAFIO

1. Nos extremos de uma barra, de peso desprezível e de comprimento **d**, são fixas duas pequenas esferas de massas **m**. A barra é suspensa, por uma articulação, de tal modo, que pode girar sem atrito, junto de seu eixo vertical, que passa pelo meio da mesma. Em uma mesma reta que a barra, são fixas duas esferas grandes com massas **M**. A distância entre os centros das esferas grande e pequena é **L**. Determine o período de pequenas oscilações descritas pelo pêndulo giratório.



Movimento Harmônico Simples

2. Um corpo oscila com movimento harmônico simples de amplitude **A**. Que distância o corpo cobre em um período? Qual o deslocamento do corpo em um período?

3. Qual o módulo da aceleração de um oscilador de amplitude A e freqüência f quando a sua velocidade for um máximo? Em que instante o deslocamento é máximo?

4. Certo ou errado.
   a) No movimento harmônico simples, o período é proporcional ao quadrado da amplitude.
   b) No movimento harmônico simples, a freqüência não depende da amplitude.
   c) Se a aceleração de uma partícula for proporcional ao deslocamento e tiver direção oposta à do deslocamento, o movimento que efetua é harmônico simples.

5. A posição de uma partícula é dada por $x = (7\text{cm}) \cdot \cos 6\pi t$, com **t** em segundos. Qual é:
   a) a freqüência?
   b) o período?
   c) a amplitude do movimento da partícula?
   d) o primeiro instante, depois de t = 0, em que a partícula está na posição de equilíbrio? Em que direção a partícula se desloca neste instante?

6. Responda.
   a) Qual a velocidade máxima da partícula mencionada no problema 4?
   b) Qual a sua aceleração máxima?

7. Uma partícula de massa **m** parte do repouso em x = +25cm e oscila em torno da posição de equilíbrio em x = 0, com o período de 1,5s. Determinar as equações:
   a) da posição **x** em função do tempo **t**.
   b) da velocidade **v** em função de **t**.
   c) da aceleração **a** em função de **t**.

8. Resolver o problema 6 com a partícula inicialmente em x = 25cm e com velocidade v_0 = +50cm/s.

9. O período do movimento de uma partícula oscilante é de 8s. No instante t = 0 a partícula está em repouso em x = A = 10cm.
   a) Fazer o gráfico de **x** em função do tempo **t**.
   b) Achar a distância coberta no primeiro segundo depois de t = 0, no segundo, no terceiro e no quarto segundo depois de t = 0.

10. A posição de uma partícula é dada por x = 2,5cos πt, com **x** em metros e **t** em segundos.
   a) Calcular a velocidade máxima e a aceleração máxima da partícula.
   b) Achar a velocidade e a aceleração da partícula quando x = 1,5m.

Movimento Harmônico Simples e Movimento Circular

11. Uma partícula descreve um círculo com o raio de 40cm e velocidade constante de 80cm/s. Calcule:
   a) a freqüência do movimento.
   b) o período do movimento.
   c) Dar a equação da componente **x** da posição da partícula em função do tempo **t**, admitindo que, no instante t = 0, **x** seja positivo.

12. Se a amplitude do movimento de um oscilador harmônico simples for triplicada, por que fator fica multiplicada a sua energia?

Gabarito

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1. $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{dL^2}{20M}}$

2. 4A, 0

3. 0, $A(2\pi t)^2$

4.
   a) Errado
   b) Certo
   c) Certo

5. –

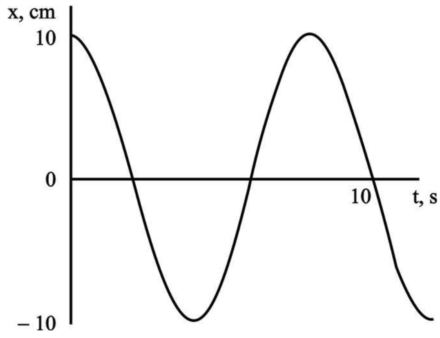
6.
   a) 1,3m/s
   b) 25m/s

7.
   a) $x(t) = (0{,}25\text{m}) \cos(4\pi/3)t$
   b) $v(t) = dx/dt = -(\pi/3\text{m/s}) \text{ sen } (4\pi/3)t$
   c) $a(t) = dv/dt = -(4\pi^2/9\text{m/s}^2) \cos(4\pi/3)t$

8.
   a) $x(t) = (0{,}277\text{m}) \cos(4\pi t/3 - 0{,}445)$
   b) $v(t) = dx/dt = -(1{,}16\text{m/s}) \text{ sen}(4\pi t/3 - 0{,}445)$
   c) $a(t) = dv/dt = -(4{,}86\text{m/s}^2) \cos(4\pi t/3 - 0{,}445)$

9.

a) $x(t) = 10 \cos(\pi t/4)$



b) 2,9cm, 7,1cm, 7,1cm, 2,9cm

10.

a) $2{,}5\pi$

b) $2{,}5\pi^2$

11.

a) f = 0,32Hz, ω = 2 rad/s

b) 3,1s

c) x(t) = (40cm) cos(2t)

12. 9

FM – 05/03/09
RevMH