

Cálculo de períodos de funções trigonométricas

1. Cálculo do período de funções da forma

$$y = m + n \cdot f(ax + b)$$

Sejam m, n, a e b constantes reais, com $a \cdot n \neq 0$. Nessas condições, enunciamos o seguinte teorema:

Se uma função f , definida por $y = f(x)$, é periódica, de período p , então a função definida por $g(x) = m + n \cdot f(ax + b)$ é periódica e seu período é $P = \frac{p}{|a|}$

Por exemplo, $f(x) = \cos x$ é uma função periódica, de período $p = 2\pi$; então, a função definida por $g(x) = 5 + 3 \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ é periódica e seu período é $P = \frac{p}{|a|} = \frac{2\pi}{|2|} = \pi$.

Deve-se notar, com muita atenção, que dos coeficientes $m = 5$, $n = 3$, $a = 2$ e $b = -\frac{\pi}{4}$, o único a influir no período é $a = 2$, isto é, o **coeficiente de x** .

Demonstração do Teorema

Devemos provar que existe um real T , tal que $g(x) = g(x + T)$, isto é
 $m + n f(ax + b) = m + n f[a(x + T) + b]$. Assim:

Se $y = f(x)$ tem período p , temos que $f(x) = f(x + p) = f(x + 2p) = f(x + 3p) = \dots$, isto é, para $k \in \mathbb{Z}$, $f(x) = f(x + kp)$. Fazendo agora a substituição de x por $ax + b$ ($a \neq 0$), obtemos: $m + n f(ax + b) = m + n \cdot f(ax + b + kp)$ que podemos escrever

$$m + n \cdot f(ax + b) = m + n \cdot f\left(ax + b + a \cdot \frac{kp}{a}\right) \text{ ou ainda}$$

$$m + n \cdot f(ax + b) = m + n \cdot f\left[a\left(x + \frac{kp}{a}\right) + b\right]$$

$$\text{Considerando } \frac{kp}{a} = T \text{ temos } \underbrace{m + n \cdot f(ax + b)}_{g(x)} = \underbrace{m + n \cdot f[a(x + T) + b]}_{g(x+T)}$$

Logo, como existe o real $T = \frac{kp}{a}$ para o qual $g(x) = g(x + T)$, a função g é periódica.

Como, por definição, período é o menor T positivo, obtemos, fazendo $k = 1$, o período de g :

$$P = \frac{p}{|a|}$$

Exemplos

1) Calcule o período da função $f(x) = \sin\left(\frac{x}{3}\right)$.

Solução:

$$P = \frac{p}{|a|} = \frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi$$

2) Calcule o período de função $f(x) = 3 \cdot \tan\left(\frac{2x}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$

Solução:

Como a função $\tan x$ tem período $p = \pi$, então: $P = \frac{\pi}{\frac{2}{3}} = \frac{3\pi}{2}$

3) Calcule o período da função $f(x) = 4 - 3\sec(-\pi x)$

solução:

$$P = \frac{2\pi}{|-\pi|} = 2$$

4) Calcule o período da função $f(x) = \sin^2 x$.

Solução:

Devemos, inicialmente, escrever a função na forma $y = m + n \cdot f(ax + b)$. Para isso, vamos lembrar a fórmula de arco dobro

$$\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x \text{ donde tiramos } \sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2} \text{ isto é, que}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x). \text{ Donde temos } P = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

Cálculo do período de somas e produtos de duas funções periódicas

Sejam f e g duas funções periódicas, definidas por $y = f(x)$ e $y = g(x)$, cujos períodos são, respectivamente, p_1 e p_2 , com $p_1 \neq p_2$. Enunciamos, então, o seguinte teorema:

Se $\frac{p_1}{p_2} = \frac{m}{n}$, onde m e n são inteiros positivos e primos entre si, então as funções definidas

por $\varphi = f + g$ e $\lambda = f \cdot g$ são periódicas e seu período é $P = np_1 = mp_2$

Demonstração: Devemos provar que existe um real T , tal que $\varphi(x) = \varphi(x+T)$ e $\lambda(x) = \lambda(x+T)$ isto é, $f(x) + g(x) = f(x+T) + g(x+T)$ e $f(x).g(x) = f(x+T).g(x+T)$
Assim:

Se f e g têm períodos p_1 e p_2 , respectivamente, podemos escrever que $f(x) = f(x + knp_1)$ (1) e $g(x) = g(x + kmp_2)$ (2) onde para $k \in \mathbb{Z}$ tem-se também $(kn) \in \mathbb{Z}$ e $(km) \in \mathbb{Z}$. Efetuando as operações (1) + (2) e (1).(2), vem (3): $f(x) + g(x) = f(x + knp_1) + g(x + kmp_2)$ e

(4): $f(x).g(x) = f(x + knp_1).g(x + kmp_2)$. Como $\frac{p_1}{p_2} = \frac{m}{n}$, então $np_1 = mp_2$. Fazendo

$knp_1 = kmp_2 = T$, as igualdades (3) e (4) são escritas $\underbrace{f(x) + g(x)}_{\varphi(x)} = \underbrace{f(x+T) + g(x+T)}_{\varphi(x+T)}$ e

$\underbrace{f(x).g(x)}_{\lambda(x)} = \underbrace{f(x+T).g(x+T)}_{\lambda(x+T)}$ logo, como existe o real $T = knp_1 = kmp_2$ para o qual

$\varphi(x) = \varphi(x+T)$ e $\lambda(x) = \lambda(x+T)$, as funções φ e λ são periódicas. Como, por definição, período é o menor T é positivo, fazendo $k=1$, obtemos o período de φ e λ :

$$P = np_1 = mp_2$$

Exemplos

1) Calcule o período da função $\varphi(x) = \operatorname{tg}(3x) + \cos(4x)$

Solução: $\operatorname{tg}(3x)$ tem período $p_1 = \pi/3$ e $p_2 = 2\pi/4 = \pi/2$. Estabelecemos, agora a razão entre p_1 e p_2 , encontrando $\frac{p_1}{p_2} = \frac{2}{3}$. Temos, então, que $P = 3p_1 = 2p_2$; logo, $P = \pi$.

2) Calcule o período da função $\lambda(x) = \sec\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \sin(3x)$

solução: $f(x) = \sec\frac{x}{2}$ temos $p_1 = \frac{2\pi}{1/2} = 4\pi$ e $g(x) = \sin(3x)$ temos

$p_2 = \frac{2\pi}{3}$. Estabelecemos, agora, a razão entre p_1 e p_2 , encontrando

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{6}{1} \Rightarrow P = 1 \cdot p_1 = 6p_2; \text{logo } P = 4\pi$$

3) Calcule o período da função $\varphi(x) = \sec x - \sin x$

solução: $\varphi(x) = \frac{1}{\cos x} - \sin x = \frac{1 - \sin x \cdot \cos x}{\cos x}$. Lembrando que $2\sin x \cdot \cos x = \sin(2x)$, temos

$$\varphi(x) = \frac{1 - \frac{1}{2}\sin(2x)}{\cos x}. \text{ Agora, } f(x) = 1 - \frac{1}{2}\sin(2x) \text{ e } g(x) = \cos x, \text{ onde } p_1 = \frac{2\pi}{2} = \pi \text{ e}$$

$$p_2 = 2\pi \text{ e } \frac{p_1}{p_2} = \frac{1}{2}. \text{ Portanto, } P = 2p_1 = 1 \cdot p_2 = 2\pi$$

Exercícios

1) Calcule o período das funções:

a) $f(x) = \frac{\cos(3x)}{\cot g(8x)}$

b) $f(x) = \operatorname{tg}^2 x$

c) $f(x) = \sin(4x)$

d) $f(x) = 5 + 4\sin(nx)$, $n \neq 0$

e) $f(x) = \sin\left(\frac{x}{3}\right) + \cos \sec(3x)$

f) $f(x) = \operatorname{tg}(2x) - \sec\left(\frac{5x}{3}\right)$

g) $f(x) = \cos(4x) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{2x}{3}\right)$

h) $f(x) = \frac{\sin\left(\frac{3x}{8}\right)}{\cos\left(\frac{4x}{5}\right)}$