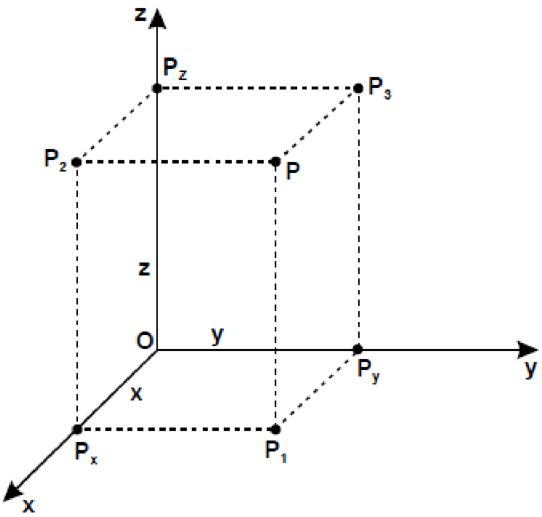
VETORES E R3 "Ultra-Fast"

Prof.: Fábio Rodrigues
fabio.miranda@engenharia.ufjf.br

Obs.: A maioria das figuras deste texto foram copiadas do livro virtual "álgebra vetorial e geometria analítica", 9ª edição, do professor Jacir Venturi, e aqui foram usadas puramente com fins didáticos e não-comerciais. Para maiores informações e download gratuito do livro, www.geometriaanalitica.com.br

1 – O ESPAÇO R3

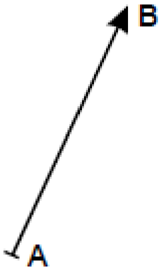
A geometria analítica no R3 tem por finalidade estudar o espaço tridimensional, tomando por base uma trinca de eixos coordenados x, y, z (também chamados de, respectivamente, eixo das abscissas, das ordenadas e das cotas).



Ao estudar geometria analítica no R2 (plano), a convenção usual adotada para desenhar o par de eixos era usar retas perpendiculares tal que o eixo x ficasse com direção horizontal e sentido positivo para a direita e o eixo y ficasse com direção vertical e sentido positivo para cima, formando quatro quadrantes.
Na verdade, pode-se atribuir sentido positivo para os eixos x e y de um par de retas perpendiculares de qualquer maneira que se desejar, desde que o par de eixos forme um SISTEMA DIRETO. Um sistema direto no R2 é tal que, ao se usar a "regra da mão direita", o "arraste dos dedos" vai do sentido positivo do eixo x para o sentido positivo do eixo y.
Da mesma forma, no R3, pode-se atribuir os sentidos dos eixos de qualquer forma, desde que seja obedecida a condição do sistema direto. Para o caso do R3, a regra da mão direita é extendida de modo que o sentido positivo do eixo das cotas é o sentido para onde aponta o dedo polegar.
A figura acima ilustra o sistema direto do R3 mais utilizado. Perceba que o estudo do R2 é apenas uma generalização do R3 quando z = 0.
O sistema coordenado do R3 divide o espaço em 8 "octantes".
A diferença básica entre R2 e R3 é a introdução de uma nova variável z em relação às já conhecidas x e y.

2 – VETORES

Vetores são entidades matemáticas às quais atribuem-se módulo, direção e sentido. Um vetor só é plenamente determinado quando se conhece essas 3 características.



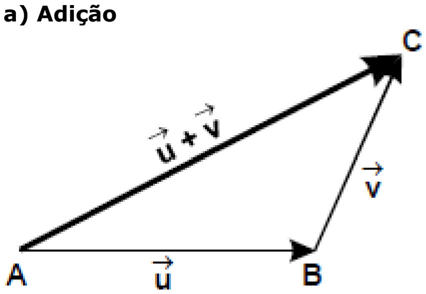
Na figura acima, o vetor tem origem no ponto A e extremidade no ponto B.
Notação usual:
$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A$
No R3, um vetor pode ser representado pela tripla $\vec{v}$ = (a, b, c), onde a, b, c são os "afixos" do vetor (coordenadas de B – A, onde A e B são os pontos, respectivamente, da origem e da extremidade do vetor.)

Obs. I: uma propriedade fundamental dos vetores é o fato de que, dados dois vetores de mesmo módulo, direção e sentido, eles são iguais independentemente do ponto de aplicação dos mesmos (isto é, da origem do vetor). Decorre desse fato que qualquer vetor pode ser transladado sem que suas propriedades se alterem.

Obs. II: vetores unitários (também chamados de versores) são vetores de módulo 1 que possuem direção dos eixos fundamentais e sentido semelhante ao dos eixos. São eles:
$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$
respectivamente referidos ao eixo x, eixo y e eixo z.

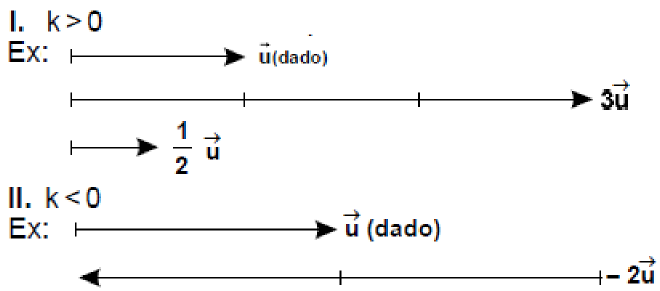
Operações com vetores:

a) Adição



$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$
Perceba que a origem do vetor soma é a origem do primeiro vetor, e que a extremidade do vetor soma é a extremidade do segundo vetor.
A adição de vetores possui as propriedades comutativa, associativa, elemento neutro e elemento oposto.
Se $\vec{v}$ = (a, b, c) e $\vec{u}$ = (d, e, f), então $\vec{u} + \vec{v}$ = (a+d, b+e, c+f).
Obs.: Subtração de vetores: é somar um vetor com o vetor oposto.

b) Multiplicação de número real (k) por vetor ($\vec{u}$):
$\vec{v} = k\vec{u}$



O vetor resultante $\vec{v}$ da multiplicação possui as seguintes características:
- módulo = ku
- direção igual à de $\vec{u}$
- sentido igual ao de $\vec{u}$ se k > 0 e inverso de $\vec{u}$ se k < 0.

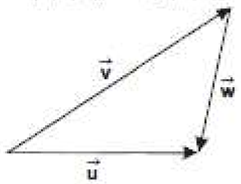
Se $\vec{u}$ = (a, b, c), então $\vec{v}$ = (ka, kb, kc).

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

Conhecendo-se $\vec{u} = (1, 2, 0)$, $\vec{v} = (0, 1, 3)$ e $\vec{w} = (-1, 3, 1)$ calcular os escalares m, n e p em $m\vec{u} + n\vec{v} + p\vec{w} = (0, 0, 14)$.

Resp.: m = -1, n = 5, p = -1

Os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ formam um triângulo, conforme a figura. Sendo $\vec{u} = (1, 2, 0)$ e $\vec{v} = (3, 0, 3)$, então $\vec{w}$ é igual a:



Resp.: (-2, 2, -3)

Determinar o vetor $\vec{x}$, tal que $5\vec{x} = \vec{u} - 2\vec{v}$, sendo $\vec{u} = (-1, 4, -15)$ e $\vec{v} = (-3, 2, 5)$.

Resp.: $\vec{x} = (1, 0, -5)$

c) Paralelismo

Dados dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, eles serão paralelos se tiverem a mesma direção, ou seja:

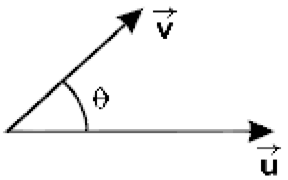
$\vec{v} = k\vec{u}$

Isolando-se k na equação acima, deduz-se que vetores paralelos possuem componentes proporcionais, sendo k a razão de proporcionalidade.

d) Produto escalar/interno

Em vetores, torna-se útil a definição de operações auxiliares entre vetores. As mais importantes são o "produto escalar" e o "produto vetorial", que possuem diversas aplicações.

Define-se produto escalar entre dois vetores do seguinte modo:



Se $\vec{u}$ = (a_1, b_1, c_1), $\vec{v}$ = (a_2, b_2, c_2) e θ o ângulo formado por eles, então o produto escalar $\vec{u} \cdot \vec{v}$ é definido por

$\vec{u} \cdot \vec{v} = u \cdot v \cdot cos\theta$

onde u e v são os módulos dos vetores.

Propriedades:

a) comutativa

b) distributiva

c) $\vec{u} \cdot \vec{v} = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2$

Observe que o resultado de um produto escalar entre vetores não é um vetor, e sim um **número escalar**.

e) Ângulo entre vetores

Decorre da definição de produto escalar:

$\vec{u} \cdot \vec{v} = u \cdot v \cdot cos\theta$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2$

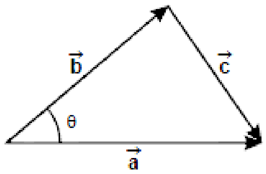
$$\Rightarrow cos\theta = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{u \cdot v}$$

f) Perpendicularismo

Decorre da definição de produto escalar que dois vetores não-nulos serão perpendiculares se $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

(Resolvido) Prove a Lei dos Co-senos usando vetores.



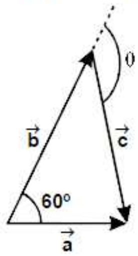
$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$

$\vec{c} \cdot \vec{c} = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})$

$|\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$

$|\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos\theta$

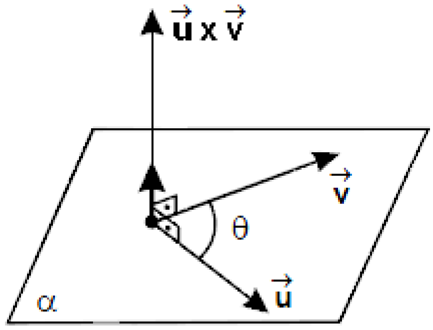
Na figura, calcular o ângulo θ entre os vetores $\vec{b}$ e $\vec{c}$, sendo $|\vec{a}| = \sqrt{2}$ e $|\vec{b}| = 2\sqrt{2}$.



Resp.: $\frac{5\pi}{6}$

g) Produto vetorial/externo

Define-se produto vetorial entre dois vetores do seguinte modo:



Se $\vec{u}$ = (a_1, b_1, c_1), $\vec{v}$ = (a_2, b_2, c_2) e θ o ângulo formado por eles, então o produto vetorial $\vec{u} \times \vec{v}$ é um **novo vetor** definido por:

- Módulo:

$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot sen\theta$

- Direção: perpendicular ao plano definido pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

- Sentido: tal que os vetores formem um sistema direto (regra da mão direita)

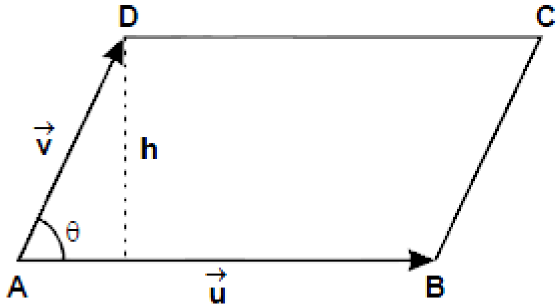
Obs.: outra notação $\vec{u} \wedge \vec{v}$

Propriedades:

a) NÃO é comutativo (pois, ao se inverter um dos vetores, mudará o sentido do vetor produto vetorial)

b) $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$

h) Área de paralelogramo



S = b.h = u.v.senθ = $|\vec{u} \times \vec{v}|$

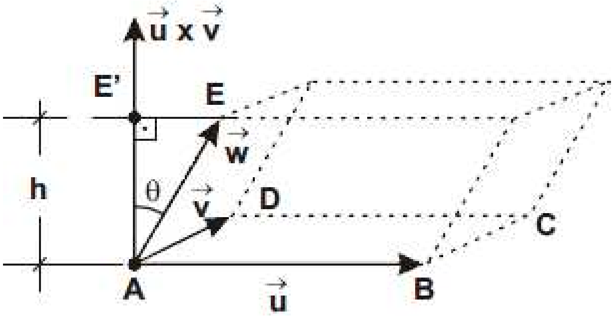
Obs.: A área de um triângulo é metade da área de um paralelogramo.

i) Produto misto

Se $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$, $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$ e $\vec{w} = (a_3, b_3, c_3)$, o produto misto desses 3 vetores é dado pelo produto vetorial dos dois primeiros com o escalar entre o vetorial e o terceiro:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

j) Volume de paralelepípedo



V = S.h = $|\vec{u} \times \vec{v}|.w|\cos\theta| = |\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w}|$

k) Condição de colinearidade entre vetores

Área nula => $|\vec{u} \times \vec{v}| = 0$ (isto é, os vetores são paralelos e o seno do ângulo entre eles é nulo)

l) Condição de coplanaridade entre vetores

Volume nulo => $|\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w}| = 0$

EXERCÍCIO DE FIXAÇÃO

Dados os vetores $\vec{u} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}$, $\vec{v} = -3\vec{i} - 5\vec{j} + 8\vec{k}$ e $\vec{w} = \vec{i} + \vec{k}$, calcular:

a) a área do paralelogramo construído sobre $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

b) o volume do paralelepípedo construído sobre $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

c) a altura (em valor absoluto) do paralelepípedo.

d) o volume do tetraedro construído sobre $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

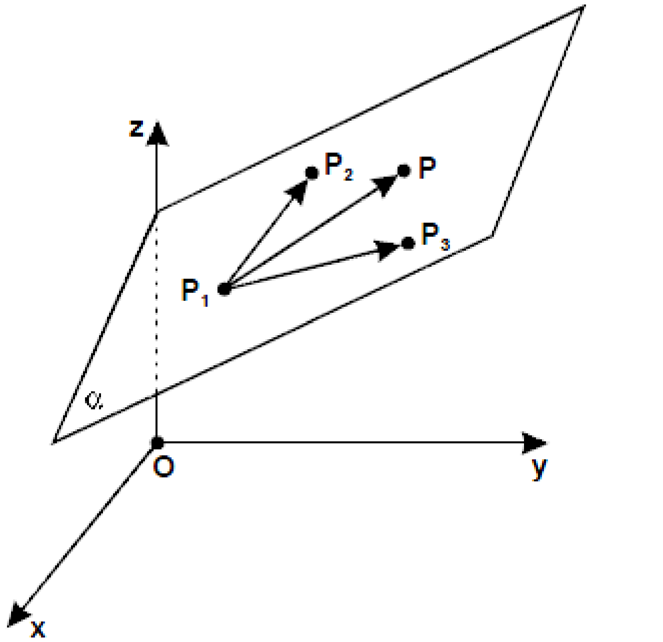
Resp.: a) 49; b) -7

c) $\frac{1}{7}$; d) $-\frac{7}{6}$

3 – GEOMETRIA ANALÍTICA NO R3

3.1) O plano no R3

a) Equação geral



O plano formado pelos pontos genericos P é definido por 3 pontos não-colineares (P_1, P_2 e P_3).

Dados

P_1 (x_1, y_1, z_1)

P_2 (x_2, y_2, z_2)

P_3 (x_3, y_3, z_3)

O ponto P pertencerá ao plano definido por esses pontos se, e somente se, os vetores $P - P_1$, $P_2 - P_1$ e $P_3 - P_1$ forem coplanares. Então, de acordo com o que foi visto na teoria de vetores:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

A resolução desse determinante conduz à equação geral do plano:

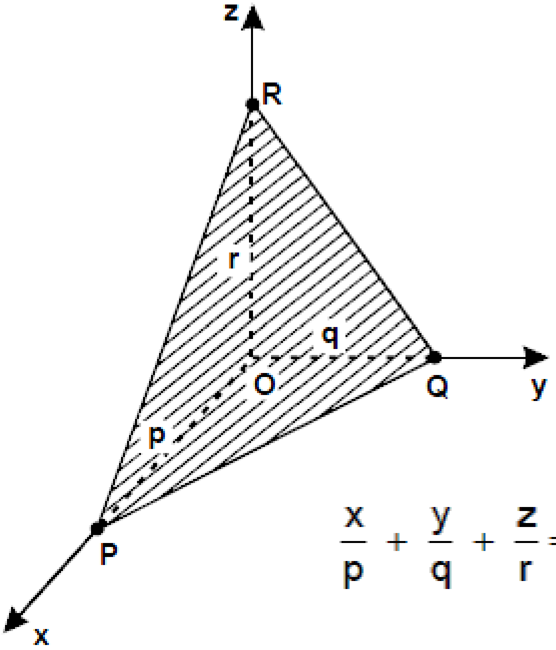
$$ax + by + cz + d = 0$$

EXERCÍCIO DE FIXAÇÃO

Obter a equação do plano que contém os pontos A = (3, 0, 1), B = (2, 1, 1) e C = (3, 2, 2).

Resp.: $x + y - 2z - 1 = 0$

b) Equação segmentária



$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1$$

Obter a equação segmentária do plano $\alpha: 2x + 3y - 4z - 24 = 0$.

Resp.: $\frac{x}{12} + \frac{y}{8} + \frac{z}{-6} = 1$

c) Equação paramétrica

Dois vetores não paralelos definem um plano. Se temos um ponto desse plano e dois de seus vetores, conseguimos definir equações paramétricas do plano:

$A\ (x_0, y_0, z_0)$, $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$, $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$, $P\ (x, y, z)$

Temos que, para qualquer ponto P pertencente ao plano,

$\overrightarrow{AP} = s\vec{u} + t\vec{v}$

onde s e t são parâmetros (lembrar da condição de paralelismo de vetores).

Desenvolvendo essa equação vetorial, chegamos a

$x = x_0 + sa_1 + ta_2$

$y = y_0 + sb_1 + tb_2$

$z = z_0 + sc_1 + tc_2$

que constituem o corpo de equações paramétricas do plano.

d) Vetor normal ao plano

Dados os planos:

$\alpha_1: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$

$\alpha_2: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$

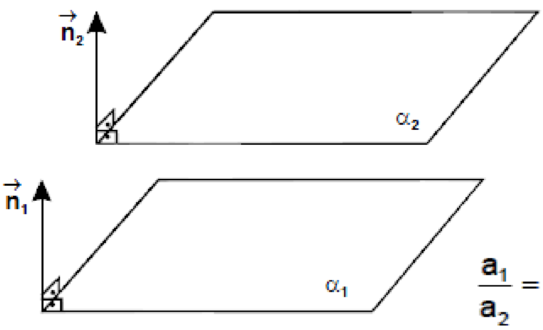
Então $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$ são respectivamente os vetores normais aos planos α_1 e α_2 e podem ser representados por:

$\vec{n}_1 = a_1\vec{i} + b_1\vec{j} + c_1\vec{k}$

$\vec{n}_2 = a_2\vec{i} + b_2\vec{j} + c_2\vec{k}$

d.1) Condição de paralelismo de planos

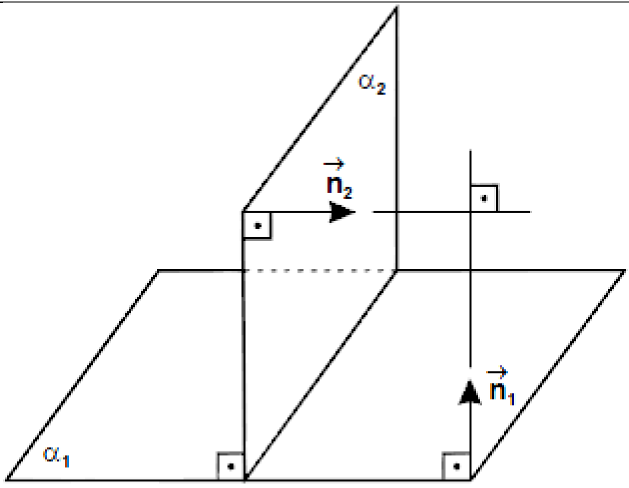
Os vetores normais são paralelos.



$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

d.2) Condição de perpendicularismo de planos

Os vetores normais são perpendiculares.



$$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

Calcular a e b para que os planos $2x + 3y + 3 = 0$ e $(a - 2)x + 6y + (b - 1)z + 5 = 0$ sejam paralelos.

Resp.: $a = 6$ e $b = 1$

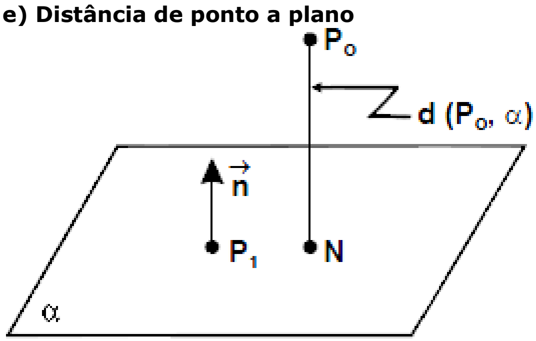
Determinar k para que os planos $2x + 3z - 1 = 0$ e $3x + y + kz + 2 = 0$ sejam ortogonais.

Resp.: $k = -2$

Equação do plano que contenha $P = (0, 1, 2)$ e seja paralelo a $\alpha: 2x + 3y - z + 5 = 0$.

Resp.: $2x + 3y - z - 1 = 0$

e) Distância de ponto a plano



Dados:

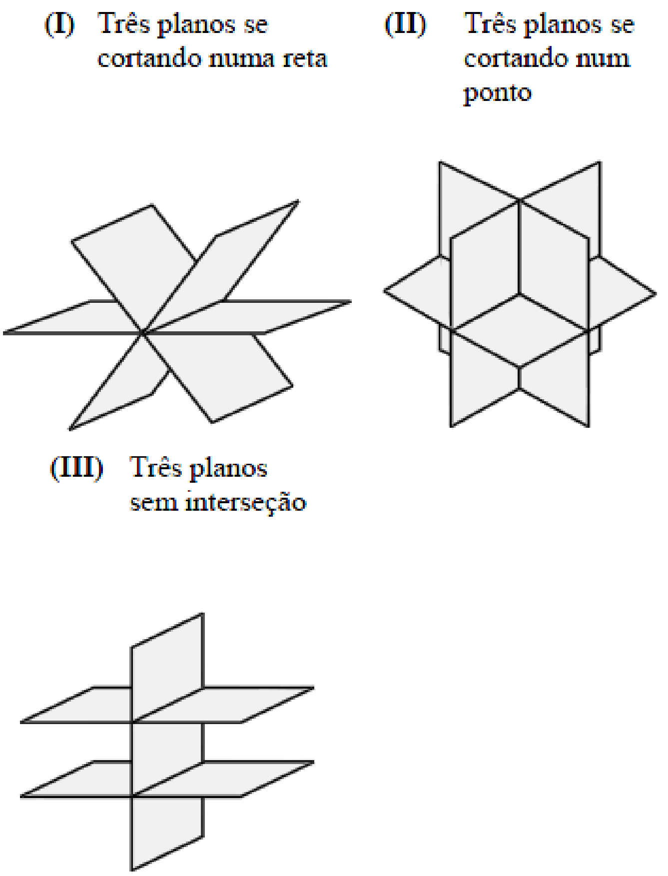
$P_o = (x_o, y_o, z_o)$

$\alpha: ax + by + cz + d = 0$

$$\boxed{d(P_o, \alpha) = \frac{|ax_o + by_o + cz_o + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$$

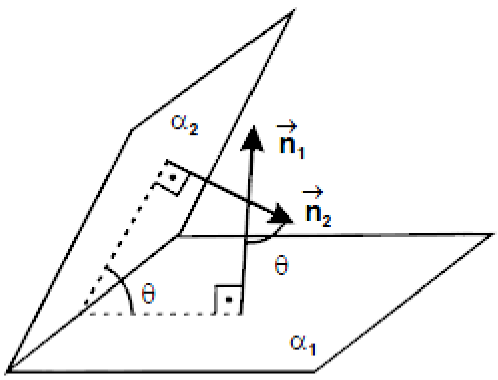
f) Intersecção de planos

Para se determinar os possíveis pontos de intersecção entre dois planos, resolver o sistema formado por suas equações.



No caso I, a solução será uma equação de reta (infinitos pontos de intersecção = > sistema possível indeterminado).
No caso II, a solução será um único ponto (sistema possível determinado).
No caso III, não haverá solusão para o sistema (sistema impossível).

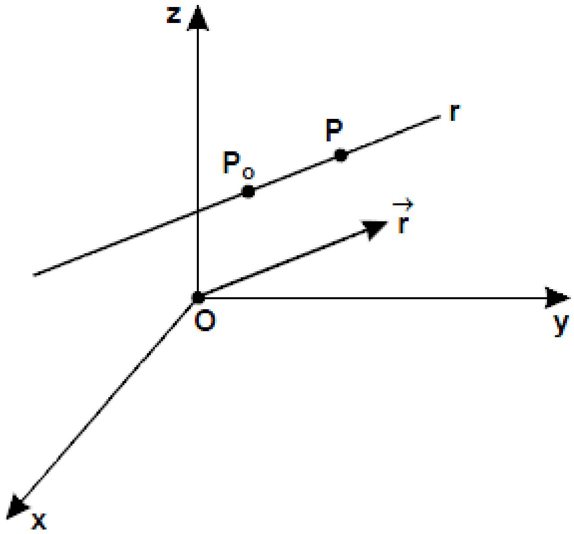
g) Ângulo entre dois planos



Pode ser determinado pelo ângulo entre os vetores normais. Então, basta aplicar o produto escalar para análise de ângulo entre vetores para os vetoreis normais.

3.2) A reta no R3
Os estudos da reta no R3 são análogos ao estudo da reta no R2, com o adendo de uma nova variável z.

Seja $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e $\vec{r} = (a,b,c)$ um vetor diretor (*ou seja, indica a direção da reta)



a) Equação cartesiana dos pontos P (x,y,z) pertencentes à reta

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$$

b) Equações paramétricas

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c} = t$$

onde t é um parâmetro. Então:

$x = x_0 + at$
$y = y_0 + bt$
$z = z_0 + ct$

4 – ESFERA
Seja C (x_0, y_0, z_0) o centro da esfera e r o seu raio. Sendo o lugar geométrico dos pontos P (x, y, z) que distam r de C, sua equação é dada por

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$$

5 – QUESTÕES SOBRE VETORES E R3 DA ESCOLA NAVAL

1) Considere π o plano que contém o centro da esfera de equação $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 4z + 13 = 0$ e a reta de equações paramétricas
$x = 2 + t$
$y = 1 - t$
$z = 3 + 2t$
onde t é um parâmetro real. O volume do tetraedro limitado pelo plano π e pelos planos coordenados é, em unidades de volume,
a) 50/3
b) 50/9
c) 100/9
d) 200/9
e) 100/3

2) Considere $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ vetores no R3 que satisfazem ao sistema
$\vec{x} + \vec{y} + \vec{z} = (2, -1, -2)$
$\vec{x} + 2\vec{y} + 3\vec{z} = (5, -2, -8)$
$\vec{x} + 3\vec{y} + 9\vec{z} = (15, -6, -24)$
O produto $\vec{x} \cdot (\vec{y} \times \vec{z})$ vale:
a) -1
b) 0
c) 1/2
d) 1

e) 2

GABARITO
1) C
2) B