Folha de Exercicios

Derivadas – Análise de Gráficos , Derivabilidade e Continuidade

Exercícios de Reforço (Revisão para Escola Naval)

1. Derive a função f(t)= $\left(t.2^t\right)^2 - \sqrt[3]{\sec^2(t^2-1)}$ e ache f´(1). Use ln2=0,7

2. Encontre a equação da reta tangente y= 3x² no ponto em que x=2.

3. A reta r é tangente à parábola y= ax² +2 no ponto de abscissa x=1. Sabendo que r é paralela à reta y = x, calcule a³ .

4. Um móvel se desloca segundo o movimento cuja posição em relação a um referencial é dada por S(t) = 4t³ - 8t + 1 . Descubra a velocidade da partícula no instante t=1 segundo.

5. Encontre a equação da reta tangente à elipse x² + 2y² = 2 no ponto (0,1) pertencente à curva.

6. Calcule os seguintes limites: (Sug: Utilize a regra de L´hospital, somente quando necessário)

(a) $\lim_{x\to\pi} \frac{senx - sen\pi}{x-\pi}$ (b) $\lim_{x\to 0^+} x.(\ln x)$ (c) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x^2}}{x}$

(d) $\lim_{x\to 0} (tgx)^{ctgx}$ (e) $\lim_{x\to 0^+} (\ln x)^{tgx}$ (f) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}$

(g) $\lim_{x\to\infty} x.e^{-x^2}$ (h) $\lim_{x\to 1} (\ln x).sen(\frac{1}{x})$

7. (EN-2004-adaptada) Determine a equação da reta que é normal ao gráfico da função real f(x)= arc sen$\sqrt{x}$ no ponto de abscissa x=1/2 *(a questão foi alterada, pois a questão original continha um erro no enunciado. A original não era dissertativa)*

8. Ache o valor de a para que a função
f(x) = x.sen(1/x) , se x diferente de 0
f(x) = a , se x=0
seja contínua em x=0.

9. (EN-2004) O valor das constantes reais a e b para as quais a função real:
g(x) = ax+b, se x $\leq$ -1
g(x)= ax³ + x + 2b , se se x > -1 seja derivável para todo x é:

10. A função y= |x| é derivável para todo x pertencente aos Reais? Justifique.

11. Ache a f´(3) dado que f(x) = Arctg(3x).

12. Encontre os valores de A, B, C, D que aproximam a função e^x polinômio: A + Bx + Cx² + Dx³ . (sugestão: faça uma identidade entre as duas funções)

13. É dado um cone com raio da base igual a 1 m , e altura igual a 2 m. Esse cone está virado com vértice para baixo, perpendicular ao chão de apoio. Alguém começa a encher o cone com água, de modo que a altura de água dentro do cone começa a subir com o tempo. Determine a taxa de variação da altura no instante em que a altura vale 1 m.

14. Utilize a regra da cadeia para derivar as seguintes funções:
(a) f(x) = $(e^{3x^2-4x}).\ln x$ (b) f(x) = $sen(3x^2-4x)$ (c) f(x) = $Arc\sec(2x)$

(d) f(x) = $\sec x + tgx$ (e) f(x) = $\dfrac{1}{tg^2x - tg^4x}$

Duvidas: Quem estiver interessado no gabarito das questões, ou de um resumo teórico sobre a matéria dessa folha, pode mandar um email para caiosg@globo.com

Exercícios Propostos:

1. Demonstre o fato de que se uma função é derivável em um ponto, então a função é contínua nesse ponto.

OBS: Lembre que f é contínua em x=a $\Leftrightarrow \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

2. Sendo f e g funções reais de variável real, tais que:

I) f(x) = g(x). $sen(1/x)$, se x $\neq 0$. e f(x) = 0, se x=0.

II) g é derivável em x=0 e g(0)= g´(0)=0

Calcular f´(0)

3. É dada a função g definida nos reais por

g(x) = f(x) , se x $\notin \{0,1\}$ e g(x) = 0 , se x $\in \{0,1\}$.

Verifique se g é contínua em x=1 e se é derivável neste ponto.

4. Determine os pontos na qual a função a seguir é derivável e determine a derivada nesses pontos:

f(x) = (cosx-1)/x , se x $\neq 0$ e f(x) = 0 , se x=0

5. Dada uma esfera de raio R, circunscreva nela um cone de menor volume possível. Determine também nesse caso (onde o volume é mínimo) o valor da distância entre a superfície da esfera e o vértice do cone.

6. Dada uma curva y= 1- x² , definida para $0 \le x \le 1$, determine o ponto P(Xo,Yo) da curva, tal que o retângulo de vértices (Xo, 0), (0,Yo) , (0,0) e (Xo, Yo) tenha maior área possível.

7. É dada uma parábola y=x² e uma reta fixa y=mx + b que corta a parábola em A e B. Seja P um ponto variável pertencente ao arco AOB da parábola (onde O é a origem). Determine as coordenadas de P de modo que o triangulo APB tenha maior área possível.

8. Demonstre que , para x, y positivos, temos que: $\frac{e^{x+y}}{xy} \ge e^2$

9. A função cosh(x) , cosseno hiperbólico de x, é dada por cosh(x) = $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

Determine, e classifique os pontos críticos da função cosh(x³-3x²).

10. Demonstre que a função $x^3+2x+6 = f(x)$ possui apenas uma raiz real.

11. Pede-se as dimensões de uma caixa de papelão aberta no topo, com base quadrada, tal que seu volume seja 4 L e o material gasto seja o mínimo possível.

12. (EN) Uma escada de 13 m de comprimento encontra-se encostada na parede, e sua base começa a deslizar no chão. No instante em que a base está deslizando com 5m/s, a base se encontra à 12 m da parede. Pede-se determinar, para esse instante:
(a) A taxa com que o topo da escada está escorregando na parede
(b) A taxa com que o ângulo entre a escada e o chão varia.

13. É dada uma função f, 3 vezes derivável em [a,b], tal que $f'''(x)>0$ para todo x pertencente ao intervalo [a,b]. Sabendo que $f''(c) = 0$, para c pertencente a [a,b], demonstre que f (x) é estritamente crescente nesse intervalo.

14. Construa os gráficos das seguintes funções. Fornecendo intervalos de crescimentos, assíntotas, concavidades, pontos críticos (classificando os mesmos), pontos de inflexão, limites no infinito , limites em pontos de acumulação não pertencentes ao domínio (se for o caso), e raízes.
i) $f(x)=x.\ln x$, $x>0$
ii) $f(x) = x^x$, $x> 0$ (Sugestão: lembre que $x^y = e^{y.\ln x}$)
iii) $f(x) = (x+1).[\ln(x+1)]^2$, $x> -1$

15. Seja $y = f(x)$ tal que $x^3 + y^3 - 6xy - 24 = 0$. Mostre que o ponto (2,4) pertence à curva, e determine a equação da reta normal à curva nesse ponto.

Duvidas: Quem estiver interessado no gabarito das questões, ou de um resumo teórico sobre a matéria dessa folha, pode mandar um email para caiosg@globo.com