

Equações Recorrentes

Introdução

Dada uma seqüência numérica, muitas vezes queremos determinar uma lei matemática, que relaciona um termo qualquer com a sua posição na seqüência. Por exemplo, numa seqüência $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$, a_i representa i-ésimo termo e é natural que se queira relacioná-lo com o valor de i . Entende-se por termo geral da seqüência, a expressão que relaciona o valor do n-ésimo termo, com a sua respectiva posição “n” na seqüência. Segue alguns exemplos de seqüência e os seus respectivos “termos gerais”:

$$(1, 2, 3, 4, \dots, n) \Rightarrow a_k = k$$

$$(1, 2, 4, 8, \dots) \Rightarrow a_n = 2^{n-1}$$

Em certas situações não se conhece de forma explícita, a lei de formação (ou termo geral) da seqüência apresentada, porém pode ser razoável relacionar um termo qualquer com alguns termos anteriores. Veja alguns exemplos:

$(0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots) \Rightarrow a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, ou seja, um determinado termo é a soma dos dois termos anteriores.

$$(1, 4, 7, 10, 13, \dots) \Rightarrow a_n = a_{n-1} + 3$$
, ou seja, um determinado termo é o anterior “mais 3”.

Essas equações que envolvem termos da seqüência são chamadas de equações recorrentes, pois para se determinar certo termo, se recorre a termos anteriores, previamente determinados. Esse artigo tem por objetivo mostrar técnicas para a manipulação de algumas equações recorrentes particulares.

Classificação de equações recorrentes

Há infinitas formas de equações recorrentes. Veja abaixo uma equação recorrente que denota um caso mais geral de representação de equações recorrentes.

$$\lambda_n a_n + \lambda_{n-1} a_{n-1} + \dots + \lambda_1 a_1 + \lambda_0 a_0 = g(k) \quad (\text{I})$$

Na equação λ_k podem ser constantes, termos dependentes de “k” ou ainda termos dependentes de outros termos da seqüência, ou seja, pode-se dizer que $\lambda_k = f(k, a_k, a_{k-1}, \dots, a_1, a_0)$. $g(k)$ é uma função, discreta, dependente da variável “k” e a_k ($0 \leq k \leq n$) são termos da seqüência em questão. As equações recorrentes serão classificadas de acordo com a forma de λ_k e $g(k)$.

1º) $\lambda_k = f(k) \Rightarrow$ Trata-se de uma equação **linear de coeficientes variáveis**

2º) $\lambda_k = cte \text{ complexa} \Rightarrow$ Trata-se de uma equação **linear de coeficientes constantes**.

3º) $\lambda_k = f(k, a_k, a_{k-1}, \dots, a_1, a_0) \Rightarrow$ Trata-se de uma equação **não linear**. Sendo dessa maneira, haverá termos que serão potências de a_k , ou ainda termos “cruzados” (como exemplo $a_k \cdot a_{k-1}$).

4º) $g(k) \neq 0 \Rightarrow$ Equação recorrente *não homogênea*.

5º) $g(k) = 0 \Rightarrow$ Equação recorrente *homogênea*.

Nesse artigo serão mostradas técnicas para manipulação de equações lineares e de coeficientes constantes.

Algumas propriedades de soluções de equações recorrentes

Como dito no item acima, as equações de estudo serão aquelas que são de coeficientes constantes e lineares. Seja a equação $\lambda_n a_n + \lambda_{n-1} a_{n-1} + \dots + \lambda_1 a_1 + \lambda_0 a_0 = 0$ (II) em que $\lambda_k \in \mathbb{R}$. Vamos enunciar algumas propriedades relacionadas à esse tipo especial de equação recorrente.

P1) Se a_n e b_n são soluções de uma dada equação recorrente como a equação (II) então o termo geral da seqüência dada por $v_n = a_n \pm b_n$ também é solução:

Prova:

$$\lambda_n v_n + \lambda_{n-1} v_{n-1} + \dots + \lambda_1 v_1 + \lambda_0 v_0 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_n (a_n \pm b_n) + \lambda_{n-1} (a_{n-1} \pm b_{n-1}) + \dots + \lambda_1 (a_1 \pm b_1) + \lambda_0 (a_0 \pm b_0) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_n a_n \pm \lambda_n b_n + \lambda_{n-1} a_{n-1} \pm \lambda_{n-1} b_{n-1} + \dots + \lambda_1 a_1 \pm \lambda_1 b_1 + \lambda_0 a_0 \pm \lambda_0 b_0 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{(\lambda_n a_n + \lambda_{n-1} a_{n-1} + \dots + \lambda_1 a_1 + \lambda_0 a_0)}_{=0, \text{ pois } a_n \text{ e solução}} \pm \underbrace{(\lambda_n b_n + \lambda_{n-1} b_{n-1} + \dots + \lambda_1 b_1 + \lambda_0 b_0)}_{=0, \text{ pois } b_n \text{ e solução}} = 0$$

Logo a expressão proposta $v_n = a_n \pm b_n$ é solução de (I).

P2) Se a_n é solução de uma dada equação recorrente como a equação (II) então a expressão recorrente dada por $v_n = k a_n$ também é solução, em que k é um escalar:

Prova:

$$\lambda_n v_n + \lambda_{n-1} v_{n-1} + \dots + \lambda_1 v_1 + \lambda_0 v_0 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_n (k a_n) + \lambda_{n-1} (k a_{n-1}) + \dots + \lambda_1 (k a_1) + \lambda_0 (k a_0) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k \underbrace{(\lambda_n a_n + \lambda_{n-1} a_{n-1} + \dots + \lambda_1 a_1 + \lambda_0 a_0)}_{=0, \text{ pois } a_n \text{ e solução}} = 0$$

Logo a seqüência proposta $v_n = k a_n$ é solução de (I).

P3) Se a_n e b_n são soluções de uma dada equação recorrente como a equação (I) então a seqüência dada por $v_n = k a_n \pm m b_n$ também é solução, em que k e m são escalares.

Prova(exercício)

Resolução de equações de recorrência

Para se resolver equações de recorrências são desenvolvidas diversas técnicas, pois cada tipo de equação requer maneiras diferentes de serem solucionadas. Aqui o grande objetivo é determinar qual a lei, ou expressão geral da seqüência que satisfaz à equação dada. Esse trabalho vai mostrar a técnica para a resolução de um tipo particular de equação recorrente. Seja a equação (II). Propomos uma solução para essa equação. Conjecturemos uma solução do tipo: $a_k = b q^k$, $b \neq 0$ (III). Vamos substituir essa

solução na equação (II) e determinar que valores de b e q vão formar a solução dessa equação. Substituindo (III) em (II) vem:

$\lambda_n b q^n + \lambda_{n-1} b q^{n-1} + \dots + \lambda_1 b q + \lambda_0 b = 0 \Rightarrow b(\lambda_n q^n + \lambda_{n-1} q^{n-1} + \dots + \lambda_1 q + \lambda_0) = 0$, como b é diferente de zero, temos que $\lambda_n q^n + \lambda_{n-1} q^{n-1} + \dots + \lambda_1 q + \lambda_0 = 0$. Veja que se trata de um polinômio em q . A essa equação polinomial em q chamamos de **equação característica**. A solução geral da equação recorrente será então uma combinação linear de potências n -ésimas de todas as raízes do polinômio característico. Veja!!

$a_n = A_n (q_n)^n + A_{n-1} (q_{n-1})^n + \dots + A_1 (q_1)^n + A_0 (q_0)^n$, em que q_i é a i -ésima raiz da equação característica e A_i são constantes a serem determinadas pelas condições iniciais do problema.

Veja alguns exemplos:

Exemplo (I) Resolver a equação: $a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 0$ com $a_1 = 0$ e $a_2 = 2$.

Solução:

A equação característica associada a essa equação de recorrência é:

$q^n - 5q^{n-1} + 6q^{n-2} = 0$, como $q \neq 0$, temos: $q^2 - 5q + 6 = 0$ em que as raízes são $q = 2$ e $q = 3$. Logo a solução dessa equação de recorrência é: $a_n = A(3)^n + B(2)^n$. Como $a_1 = 0$ e $a_2 = 2$, montamos um sistema:

$$a_0 = A(3)^0 + B(2)^0 = A + B = 0 \Rightarrow A = -B$$

$$a_1 = A(3)^1 + B(2)^1 = 3A + 2B = 2 \Rightarrow A = 2 \Rightarrow B = -2$$

. Assim, $a_n = 2 \cdot 3^n - 2^{n+1}$.

Exemplo (II) Encontrar o Termo Geral da seqüência de Fibonacci em que $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$ e $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.

Solução:

A equação característica associada a essa equação de recorrência é:

$q^n - q^{n-1} - q^{n-2} = 0$. Como $q \neq 0$, temos: $q^2 - q - 1 = 0$ que possui $q = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ como

raízes. Logo a solução dessa equação de recorrência é: $F_n = A \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + B \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$.

Aplicando as condições iniciais $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$, temos o sistema:

$$F_0 = A \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^0 + B \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^0 = A + B = 0 \Rightarrow A = -B$$

$$F_1 = A \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^1 + B \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^1 = A - B = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow B = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\text{Assim, } F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

Exemplo (III) Resolver a equação: $a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = 0$ com $a_1 = 0$ e $a_2 = 2$.

Solução:

Essa equação recorrente está vinculada, como vimos, a uma equação característica, mas como podemos ver abaixo, trata-se de uma equação que possui raiz dupla. Quando isso ocorre, procedemos da seguinte maneira:

A equação característica associada a essa equação de recorrência é $q^n - 4q^{n-1} + 4q^{n-2} = 0$. Como $q \neq 0$, temos: $q^2 - 4q + 4 = 0$ que possui $q = 2$ como raiz dupla. Esse é um tipo especial de equação e a solução proposta nesse caso é:

$$a_n = A(2)^n + B.n(2)^n .$$

Como $a_1 = 0$ e $a_2 = 2$, montamos um sistema:

$$\begin{aligned} a_0 &= A(2)^0 + B.0.(2)^0 = A = 0 \Rightarrow A = 0 \\ a_1 &= A(2)^1 + 1.B.(2)^1 = 3.0 + 2B = 2 \Rightarrow B = 1 \end{aligned} . \text{ Assim, } a_n = n.2^n$$

Progressões Aritméticas (PA)

Uma progressão aritmética é um tipo especial de seqüência recorrente, em que a relação entre dois termos consecutivos é dada por: $a_n = a_{n-1} + r$, o seja, qualquer termo de uma “PA” é calculado como sendo o valor do termo anterior somado de uma constante “r” chamada de **razão**. Sendo a_1 o primeiro termo de uma PA e r o valor da razão, tem-se que $a_2 = a_1 + r$. Vamos, usando as técnicas de resolução de seqüências recorrentes, encontrar a expressão geral para o n-ésimo termo dessa PA.

$$a_k = a_{k-1} + r \Rightarrow a_k - a_{k-1} = r .$$

Como essa diferença é constante, ou seja, não depende da posição “k”, pode-se escrever que:

$$a_{k-1} - a_{k-2} = r \Rightarrow a_k - a_{k-1} = a_{k-1} - a_{k-2} \Rightarrow a_k - 2a_{k-1} + a_{k-2} = 0$$

A equação característica associada é: $q^2 - 2q + 1 = 0 \Rightarrow q = 1$ (*dupla*). Assim sendo, a solução geral para o problema é: $a_n = A(1)^n + nB(1)^n \Rightarrow a_n = A + nB$. Aplicando as condições iniciais, chega-se ao sistema:

$$\begin{cases} a_1 = A + B = a_1 \\ a_2 = A + 2B = a_1 + r \end{cases} \Rightarrow A = a_1 - r , B = r . \text{ Logo, chega-se que: } a_n = a_1 + (n-1)r .$$

Cálculo da soma dos Termos de uma PA

Muitos problemas, principalmente em matemática financeira, estão relacionados com a soma de termos de uma seqüência (por exemplo o montante pago em um crediário que tenha como base de cálculo a formulação por juros simples). Assim, sendo, convém que se determine uma expressão para a soma de todos os termos de uma PA (desde o primeiro até o n-ésimo). Seja uma PA, de primeiro termo a_1 e razão “r”. Veja o raciocínio:

$$\begin{array}{c}
a_1 + \overbrace{(a_1+r)}^{a_2} + \dots + \overbrace{(a_1+(k-1)r)}^{a_k} + \dots + \overbrace{(a_1+(n-2)r)}^{a_{n-1}} + \overbrace{(a_1+(n-1)r)}^{a_n} \\
+ \frac{(a_1+(n-1)r) + (a_1+(n-2)r) + \dots + (a_1+(n-k)r) + \dots + (a_1+r) + a_1}{(a_1+a_n) + (a_1+a_n) + \dots + (a_1+a_n) + \dots + (a_1+a_n) + (a_1+a_n)} \\
\text{Veja que } 2S = n(a_1+a_n) \Rightarrow S = \frac{(a_1+a_n)n}{2} \text{ ou ainda } S = \frac{(2a_1+(n-1)r)n}{2}.
\end{array}$$

Propriedade Aritmética

Sejam a_{k-p}, a_k, a_{k+p} termos de uma PA, de ordens (k-p)-ésima, k-ésima e (k+p)-ésima, respectivamente. Logo podemos escrever $a_{k-p} = a_k - pr$ e $a_{k+p} = a_k + pr$. Somando os dois resultados, tem-se que $a_{k-p} + a_{k+p} = 2a_k \Rightarrow a_k = \frac{a_{k-p} + a_{k+p}}{2}$, ou seja, um termo qualquer a_k , de uma PA é igual à média aritmética de dois termos quaisquer, equidistantes do mesmo.

Progressões Geométricas (PG)

Uma progressão geométrica é um tipo especial de seqüência recorrente, em que a relação entre dois termos consecutivos é dada por: $a_n = qa_{n-1}$, o seja, qualquer termo de uma “PA” é calculado como sendo o valor do termo anterior multiplicado por uma constante “q” chamada de **razão**. Sendo a_1 o primeiro termo de uma PG e q o valor da razão, tem-se que $a_2 = a_1q$. Vamos, usando as técnicas de resolução de seqüências recorrentes, encontrar a expressão geral para o n-ésimo termo dessa PA.

$a_k = qa_{k-1} \Rightarrow a_k - qa_{k-1} = 0$. A equação característica associada é dada por: $R - q = 0$, logo chega-se que $R = q$, assim, o termo geral da solução dessa equação recorrente é: $a_n = Aq^n$. Visto que $a_1 = Aq^1$, $A = \frac{a_1}{q}$. Chega-se então à expressão do termo geral de uma PG que é dada por: $a_n = a_1q^{n-1}$.

Cálculo da soma dos Termos de uma PG

Em geral, a obtenção de expressões fechadas, que denotem a soma dos n primeiros termos de uma seqüência traz facilidades no que tange a resolução de problemas até do dia a dia. Vamos determinar uma expressão para o cálculo da soma dos n primeiros termos de uma PG de primeiro termo a_1 e razão q. Veja:

Vamos nos utilizar de um resultado importante, gerado na teoria dos produtos notáveis, em que se tem a seguinte fatoração: $x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)$.

Obs: Esse resultado acima explicitado pode ser provado usando a técnica da indução finita. Esse exercício fica proposto para você leitor.

Queremos calcular a soma: $S = a_1 + a_1q + \dots + a_1q^{n-2} + a_1q^{n-1} = a_1(1 + q + \dots + q^{n-2} + q^{n-1}) =$

$$= \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}; \text{ Assim, tem-se que } S = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}.$$

Seja o caso particular em que $0 < q < 1$. Quando isso acontece, o termo geral da PG tende a diminuir muito, quando o valor de n cresce. Vamos definir um tipo de PG em que $0 < q < 1$ e $n \rightarrow \infty$, como sendo uma “PG infinita”. O desafio agora é determinar o valor da soma de todos esses infinitos termos. Veja!!

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 \overbrace{(q^n - 1)}^{\rightarrow 0}}{q - 1} = \frac{-a_1}{q - 1} = \frac{a_1}{1 - q}. \text{ Logo } S_\infty = \frac{a_1}{1 - q}.$$

Outro resultado que pode ser muito útil na resolução de algumas questões é o valor do produto de todos os termos de uma PG. Seja $P = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$. Veja!!

$$P = \prod_{k=1}^n a_k = a_1 \cdot (a_1 q) \cdot (a_1 q^2) \cdot \dots \cdot (a_1 q^{n-1}) = (a_1)^n q^{\overbrace{(1+2+\dots+n-1)}^{PA, r=1}} = (a_1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}. \text{ Logo chega-se}$$

que: $P = (a_1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

Propriedade Geométrica

Sejam a_{k-p}, a_k, a_{k+p} termos de uma PG, de ordens $(k-p)$ -ésima, k -ésima e $(k+p)$ -ésima, respectivamente. Logo podemos escrever $a_{k-p} = a_k q^{-p}$ e $a_{k+p} = a_k q^p$. Multiplicando os dois resultados, tem-se que $a_{k-p} \cdot a_{k+p} = (a_k)^2 \Rightarrow a_k = \sqrt{a_{k-p} \cdot a_{k+p}}$, ou seja, um termo qualquer a_k , de uma PG é igual à média geométrica de dois termos quaisquer, equidistantes do mesmo.

Exemplo (IV) Resolver a equação $a_n - 4a_{n-1} = 3$, com $a_1 = 0$.

Solução

Veja que a hipótese simplificadora (c) foi violada, ou seja, essa equação não é homogênea, pois não é do tipo $f(a_k) = 0$ e sim do tipo $f(a_k) = 3$. Quando isso acontece não se pode dizer que uma solução possível é alguma do tipo $a_k = bq^k$. Vamos verificar isso: $bq^n - 4bq^{n-1} = 3$. Veja que temos uma situação indeterminada, pois existem muitos pares (b, q) que satisfazem a equação encontrada, para cada “ n ”. Logo um jeito de escapar desse problema é tornando a equação uma equação homogênea.

$a_n - 4a_{n-1} = 3$, mas $a_{n-1} - 4a_{n-2} = 3$, logo $a_n - 4a_{n-1} = a_{n-1} - 4a_{n-2}$ e arrumando, temos:

$a_n - 5a_{n-1} + 4a_{n-2} = 0$. Essa equação sim é homogênea e pode-se aplicar a solução do

tipo $a_k = bq^k$. A equação característica associada é: $q^n - 5q^{n-1} + 4q^{n-2} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow q^2 - 5q + 4 = 0$. Raízes $q = 1$ e $q = 4$. Logo a solução geral é do tipo:

$a_n = A(1)^n + B(4)^n$ ou $a_n = A + B(4)^n$. Como $a_1 = 0$, podemos calcular

$a_2 = 3 - 4a_1 = 3 - 0 = 3$, assim agora pode-se montar o sistema:

$$\begin{cases} a_1 = A + B \cdot (4)^1 = 0 \Rightarrow A = -4B \\ a_2 = A + B \cdot (4)^2 = A + 16B = 3 \Rightarrow B = \frac{1}{4} \end{cases} \text{ Assim } a_n = \frac{-4 + 4^n}{4} = 4^{n-1} - 1.$$

Outra solução, **sem usar recorrência**:

Vamos escrever a equação para todos os valores de n , menores que n .

$$\begin{aligned} (a_n - 4a_{n-1}) &= 3 \\ 4(a_{n-1} - 4a_{n-2}) &= 4 \cdot 3 \\ 4^2(a_{n-2} - 4a_{n-3}) &= 4^2 \cdot 3 \\ &\dots \\ + 4^{n-2}(a_2 - 4a_1) &= 4^{n-2} \cdot 3 \\ \hline a_n - 4^{n-1}a_1 &= 3 + 4 \cdot 3 + 4^2 \cdot 3 + \dots + 4^{n-2} \cdot 3 = 3 \overbrace{(1 + 4 + 4^2 + \dots + 4^{n-2})}^{PG, \text{razão } 4} = 3 \cdot \left(\frac{4^{n-1} - 1}{4 - 1} \right) \\ a_n - 4^{n-1} \overset{=0}{a_1} &= 4^{n-1} - 1, \text{ logo: } a_n = 4^{n-1} - 1 \end{aligned}$$

Veja que equações desse tipo vão, de fato, exigir mais criatividade do que técnicas específicas.

Exemplo (V) Resolver a equação $a_n - 4a_{n-1} = 3^n$, com $a_1 = 0$.

Solução

Para resolvermos esse tipo de equação, temos que encontrar uma maneira de fazer com que a parte 3^n , não continue na equação e que a mesma se torne uma equação homogênea. Veja!!!

$$\left. \begin{aligned} a_n - 4a_{n-1} &= 3^n = 3 \cdot 3^{n-1} \\ a_{n-1} - 4a_{n-2} &= 3^{n-1} \end{aligned} \right\} \Rightarrow a_n - 4a_{n-1} = 3(a_{n-1} - 4a_{n-2}), \text{ assim: } a_n - 7a_{n-1} + 12a_{n-2} = 0$$

Equação característica associada é: $q^2 - 7q + 12 = 0$, com raízes $q = 3$ e $q = 4$. A expressão geral fica da forma: $a_n = A(3)^n + B(4)^n$, com $a_1 = 0$ e $a_2 = 3^2 = 9$. Aplicando as condições iniciais tem-se que:

$$\begin{aligned} a_1 = A(3)^1 + B(4)^1 = 0 &\Rightarrow A = -\frac{4B}{3} \\ a_2 = A(3)^2 + B(4)^2 = 9 &\Rightarrow 9 \cdot \left(-\frac{4B}{3} \right) + 16B = 9 \Rightarrow B = \frac{9}{4} \Rightarrow A = -3 \end{aligned}$$

Logo, $a_n = 9 \cdot 4^{n-1} - 3^{n+1}$ ou ainda $a_n = 9(4^{n-1} - 3^{n-1})$.

Outra solução, **sem usar recorrência**:

Vamos escrever a equação para todos os valores de n , menores que n .

$$\begin{aligned}
(a_n - 4a_{n-1}) &= 3^n \\
4(a_{n-1} - 4a_{n-2}) &= 4 \cdot 3^{n-1} \\
4^2(a_{n-2} - 4a_{n-3}) &= 4^2 \cdot 3^{n-2} \\
&\dots \\
+ 4^{n-2}(a_2 - 4a_1) &= 4^{n-2} \cdot 3^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_n - 4^{n-1}a_1 &\stackrel{=0}{=} 3^n + 4 \cdot 3^{n-1} + 4^2 \cdot 3^{n-2} + \dots + 4^{n-2} \cdot 3^2 = \sum_{k=0}^{n-2} 4^k 3^{n-k} = 3^n \sum_{k=0}^{n-2} \left(\frac{4}{3}\right)^k = 3^n \cdot \left(\frac{\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} - 1}{\left(\frac{4}{3}\right) - 1} \right) = \\
&= 3^n \cdot \left(\frac{\frac{4^{n-1} - 3^{n-1}}{3^{n-1}}}{\frac{1}{3}} \right) = 3^{n+1} \left(\frac{4^{n-1} - 3^{n-1}}{3^{n-1}} \right) = 9(4^{n-1} - 3^{n-1}), \text{ logo, } a_n = 9(4^{n-1} - 3^{n-1}).
\end{aligned}$$

Outras seqüências

Seja a equação recorrente expressa por: $a_n - qa_{n-1} = rq^{n-1}$. Vamos resolver essa equação utilizando o raciocínio igual ao utilizado no exemplo (V).

$a_n - qa_{n-1} = rq^{n-1} \Rightarrow a_{n-1} - qa_{n-2} = rq^{n-2} \Rightarrow a_n - qa_{n-1} = q(a_{n-1} - qa_{n-2}) \Rightarrow$
 $\Rightarrow a_n - 2qa_{n-1} + q^2a_{n-2} = 0$. O polinômio (em t) característico para essa recorrência é dado por $t^2 - 2qt + q^2 = 0$ que tem uma raiz dupla $t = q$. Logo a solução geral par essa recorrência é $a_n = A(q)^n + B \cdot n(q)^n$. Vamos definir condição inicial do tipo: $a_1 = a_1$. Da relação de recorrência, encontra-se o valor de $a_2 = (a_1 + r)q$. Aplicando as condições iniciais na expressão geral de a_n , chega-se que:

$$a_n = (a_1 + (n-1)r)q^{n-1}$$

Veja que quando n aumenta, a primeira parte do termo geral se comporta como uma PA e a segunda parte define uma PG, a essa seqüência especial dá-se o nome de **Progressão Aritmético-Geométrica (PAG)**. Talvez seja um desafio maior calcular a soma dos primeiros “n” termos de uma PAG. Vamos aceitar esse desafio? Veja!!

$$\begin{aligned}
\text{Calculando } S &= \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n (a_1 + (k-1)r)q^{k-1} = \sum_{k=1}^n (a_1q^{k-1} + krq^{k-1} - rq^{k-1}) = \\
&= \left(\sum_{k=1}^n a_1q^{k-1} \right) + \left(\sum_{k=1}^n krq^{k-1} \right) - \left(\sum_{k=1}^n rq^{k-1} \right) = (a_1 - r) \overbrace{\left(\sum_{k=1}^n q^{k-1} \right)}^{\text{Soma de PG}} + r \left(\sum_{k=1}^n kq^{k-1} \right) = \\
&= \frac{(a_1 - r)(q^n - 1)}{q - 1} + r \overbrace{\left(\sum_{k=1}^n kq^{k-1} \right)}^y.
\end{aligned}$$

Agora precisamos determinar uma fórmula fechada para Y . Siga o raciocínio:
 $Y = 1.1 + 2.q + 3.q^2 + \dots + (n-1)q^{n-2} + nq^{n-1}$ (I)
 $qY = q + 2q^2 + 3q^3 + \dots + (n-1)q^{n-1} + nq^n$ (II)

$Y - qY = \overbrace{1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}}^{PG, \text{ razão } q} - nq^n = \frac{q^n - 1}{q - 1} - nq^n$. Logo o valor de Y é dado por:

$Y = \frac{nq^n}{q-1} - \frac{q^n - 1}{(q-1)^2}$. Com isso calculamos o valor de S , original como sendo:

$$S = \frac{(a_1 - r)(q^n - 1)}{q - 1} + \frac{rnq^n}{q - 1} - \frac{r(q^n - 1)}{(q - 1)^2} = \frac{(a_1 + (n - 1)r)q^{n+1} - (a_1 + nr)q^n - (a_1 - r)q + a_1}{(q - 1)^2}.$$

Exemplo (VI)

Seja $P(x) = x^{2007} + x^{2006}(1+x) + x^{2005}(1+x)^2 + \dots + x(1+x)^{2006} + (1+x)^{2007}$. Determine o coeficiente do termo em x^{500} de $P(x)$.

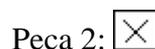
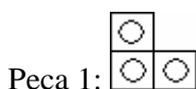
Solução:

Veja que uma parcela qualquer dessa soma tem um fator x a menos que a parcela anterior bem como um fator $(1+x)$ a mais. Logo se trata de soma de uma PG de primeiro termo x^{2007} e razão $q = \left(\frac{1+x}{x}\right)$. Aplicando na fórmula da soma da PG chega-se à:

$$S = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{x^{2007} \left(\left(\frac{1+x}{x} \right)^{2008} - 1 \right)}{\left(\frac{1+x}{x} \right) - 1} = \left((1+x)^{2008} - x^{2008} \right).$$

Veja que no desenvolvimento de $(1+x)^{2008}$, a parcela em x^{2008} se cancela e consequentemente o coeficiente do termo em x^{500} é dado por $\binom{2008}{500}$.

Exemplo (VII) Considere um tabuleiro retangular de dimensões $2 \times n$. Dispostos de dominós com as seguintes configurações:

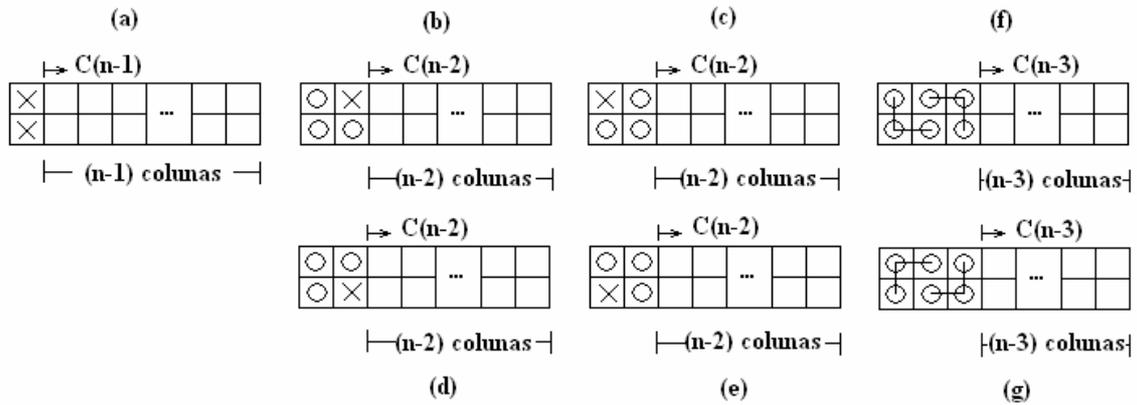


De quantas maneiras se pode cobrir o tabuleiro dispondo apenas das peças 1 e 2.

Obs.: Duas peças distintas (de qualquer tipo) não podem se superpor.

Solução:

Vamos denotar por $C(n)$ o número de combinações procurado. Vamos estudar algumas das as possíveis configurações para o problema em questão.



Veja que entre as configurações possíveis, há uma delas em que, depois de preenchidas as casas do tabuleiro se retorna ao mesmo problema, agora com um tabuleiro $2 \times (n-1)$, logo o número de combinações, agora procurado é $C(n-1)$. O mesmo acontece para a configuração em que se retorna a situação de um tabuleiro $2 \times (n-2)$, sendo que há quatro configurações possíveis e para o caso de se ter retornado a um tabuleiro $2 \times (n-3)$ há duas possíveis configurações, logo se pode propor a seguinte equacionamento: $C(n) = C(n-1) + 4C(n-2) + 2C(n-3)$. Quais seriam as condições iniciais desse problema?

Para o caso em que $n = 1$: Há uma possibilidade (a)

Para o caso em que $n = 2$: Há cinco possibilidades (a,a);(b);(c);(d);(e)

Para o caso em que $n = 3$: Há onze possibilidades (a,a,a);(a,b);(a,c);(a,d);(a,e);(b,a);(c,a);(d,a);(e,a);(f);(g)

Logo: $C(1) = 1$, $C(2) = 5$ e $C(3) = 11$.

Resolvendo a equação de recorrência: $C(n) - C(n-1) - 4C(n-2) - 2C(n-3) = 0$. O Polinômio característico associado: $q^3 - q^2 - 4q - 2 = 0$. Por inspeção, $q = -1$ é raiz. Logo utilizando o dispositivo prático de Briot-Ruffini, chega-se que as outras raízes são $q = 1 \pm \sqrt{3}$. O termo geral de $C(n) = A(-1)^n + B(1 + \sqrt{3})^n + C(1 - \sqrt{3})^n$. Aplicando as condições iniciais chega-se que $A = 1$, $B = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $C = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ e assim tem-se que:

$$C(n) = (-1)^n + \frac{1}{\sqrt{3}} \left[(1 + \sqrt{3})^n - (1 - \sqrt{3})^n \right].$$

A transformada Z

Vamos definir um operador $Z\{x(k)\} = X(z)$, que translada uma seqüência, dependente da variável inteira k , em uma equação totalmente algébrica, na variável complexa “z”. O transformador Z é definido como sendo: $Z\{x(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k}$. Veja que esse operador resulta na convergência de uma série (soma infinita), ou seja, o resultado da transformação do domínio k para o domínio z é o valor para o qual a série converge. Quando essa conta for feita, se terá uma expressão, na variável z e é de tamanha importância que se estude onde, ou em que região do plano complexo, essa convergência pode ocorrer. Vamos calcular algumas transformadas de algumas seqüências conhecidas!

Propriedade 1: A transformada Z de uma combinação linear de funções é a combinação linear das respectivas transformadas Z dessas funções. Sejam $a, b \in \mathbb{C}$.

$$Z\{ax(k) \pm by(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} (ax(k) \pm by(k)) z^{-k} = a \sum_{k=0}^{\infty} x(k) z^{-k} \pm b \sum_{k=0}^{\infty} y(k) z^{-k} = aX(z) \pm bY(z)$$

Algumas transformadas essenciais

1º) Seja a seqüência $x(k)$ dada por: $x(k) = a^{-k}$, $k \geq 0$

$$Z\{x(k)\} = X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a^{-k} z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \overbrace{(az)^{-k}}^{\text{Soma de PG infinita}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{az}} = \frac{z}{z - a^{-1}}. \quad \text{Claro que esse}$$

resultado só faz sentido se $|az| < 1$, para que a somatória seja um caso particular de PG infinita.

2º) Seja a seqüência $x(k)$ dada por: $x(k) = c$, $k \geq 0$.

$$Z\{x(k)\} = X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} cz^{-k} = c \sum_{k=0}^{\infty} \overbrace{(z)^{-k}}^{\text{Soma de PG infinita}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{cz}{z-1}. \quad \text{Claro que esse resultado só}$$

faz sentido se $|z| < 1$, para que a somatória seja um caso particular de PG infinita.

3º) Termo de avanço. Calcular a transformada Z de $x(k+m)$ em função de $x(k)$.

$$\begin{aligned} Z\{x(k+m)\} &= \sum_{k=0}^{\infty} \overbrace{x(k+m)}^t z^{-k} = \sum_{t=m}^{\infty} x(t) z^{-(t-m)} = \sum_{t=m}^{\infty} x(t) z^{-t} z^m = z^m \sum_{t=m}^{\infty} x(t) z^{-t} = \\ &= z^m \sum_{t=m}^{\infty} x(t) z^{-t} = z^m (X(z) - x(0) - x(1)z^{-1} - x(2)z^{-2} - \dots - x(m-1)z^{-(m-1)}) = \end{aligned}$$

$$= z^m X(z) - x(0)z^m - x(1)z^{m-1} - x(2)z^{m-2} - \dots - x(m-2)z^2 - x(m-1)z.$$

$$\text{Assim, } Z\{x(k+m)\} = z^m X(z) - x(0)z^m - x(1)z^{m-1} - x(2)z^{m-2} - \dots - x(m-2)z^2 - x(m-1)z.$$

4º) Termo de atraso: Calcular a transformada Z de $x(k-m)$ em função de $x(k)$

$$\begin{aligned} Z\{x(k-m)\} &= \sum_{k=0}^{\infty} \overbrace{x(k-m)}^t z^{-k} = \sum_{t=-m}^{\infty} x(t) z^{-(t+m)} = \sum_{t=-m}^{\infty} x(t) z^{-t} z^{-m} = z^{-m} \sum_{t=-m}^{\infty} x(t) z^{-t} = \\ &= z^{-m} \sum_{t=-m}^{\infty} x(t) z^{-t} = z^{-m} (X(z) + z^m x(-m) + x(-m+1)z^{m-1} + x(-m+2)z^{m-2} + \dots + x(-1)z) = \end{aligned}$$

$$= X(z)z^{-m} + x(-m) + x(-m+1)z^{-1} + x(-m+2)z^{-2} + \dots + x(-1)z^{-(m-1)}$$

$$\text{Assim, } Z\{x(k-m)\} = X(z)z^{-m} + x(-m) + x(-m+1)z^{-1} + x(-m+2)z^{-2} + \dots + x(-1)z^{-(m-1)}.$$

Veja que para as seqüências em que para $k < 0$, implicarem que $x(k) = 0$, o resultado acima fica resumido em: $Z\{x(k-m)\} = X(z)z^{-m}$.

5º) Calcular a transformada Z de $x(k) = \begin{cases} k & , k \geq 0 \\ 0 & , k < 0 \end{cases}$.

$$Z\{x(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} kz^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} k \overbrace{(z^{-1})^k}^b = b \overbrace{\sum_{k=0}^{\infty} kb^{k-1}}^{Y \Rightarrow \text{Exemplo (V)}}. \text{ Esse somatório foi resolvido no exemplo}$$

$$(V). Z\{x(k)\} = b \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{nb^n}{b-1} - \frac{b^n - 1}{(b-1)^2} \right) = z^{-1} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\overbrace{\left(\frac{n}{z^n}\right)}^{\rightarrow 0}}{z^{-1} - 1} - \frac{\overbrace{z^{-n} - 1}^{\rightarrow 0}}{(z^{-1} - 1)^2} \right) =$$

$$Z\{x(k)\} = z^{-1} \left(\frac{1}{(z^{-1} - 1)^2} \right) = \frac{z}{(z-1)^2}.$$

6º) Multiplicação por a^k .

$$Z\{a^k x(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (a^{-1}z)^{-k} = X\left(\frac{z}{a}\right).$$

7º) Calcular a transformada Z de $x(k) = (k+b)a^k$

Vamos definir $y(k) = k+b$. Aplicando a 6º transformada, vem que $Z\{a^k y(k)\} = Y\left(\frac{z}{a}\right)$.

$$\text{Logo temos que } Z\{a^k y(k)\} = \frac{\left(\frac{z}{a}\right)}{\left(\frac{z}{a}-1\right)^2} + \frac{b\left(\frac{z}{a}\right)}{\left(\frac{z}{a}-1\right)} = \frac{b\left(\frac{z}{a}\right)^2 + (1-b)\left(\frac{z}{a}\right)}{\left(\frac{z}{a}-1\right)^2}.$$

Resolvendo equações recorrentes usando a transformada Z.

Assim como podemos passar do domínio k para o domínio z, o contrário também pode ser feito. Vamos agora entender o porquê de que quando resolvemos uma equação linear, com coeficientes constantes e homogênea, uma solução é do tipo $x(n) = Aq^n$. Acompanhe o exemplo abaixo:

Exemplo (VIII) Resolva a equação recorrente $a(k+2) - 13a(k+1) + 42a(k) = 0$, dados $a(0) = 0$ e $a(1) = 13$.

Solução:

Aplicando a transformada Z em toda a equação vem:

$$\begin{aligned} Z\{a(k+2) - 13a(k+1) + 42a(k)\} &= Z\{a(k+2)\} - 13Z\{a(k+1)\} + 42Z\{a(k)\} = \\ &= z^2 A(z) - x(0)z^2 - x(1)z - 13(zA(z) - zx(0)) + 42A(z) = A(z)(z^2 - 13z + 42) - 13z = 0 \\ \text{logo } \frac{A(z)}{z} &= \frac{13}{z^2 - 13z + 42} = \frac{13}{(z-6)(z-7)} = \frac{R}{z-6} + \frac{S}{z-7} = \frac{(R+S)z - (7R+6S)}{(z-6)(z-7)} \end{aligned}$$

Podemos montar um sistema com as seguintes equações:

$$\begin{cases} R+S=0 \\ 7R+6S=-13 \end{cases} \Rightarrow R=-13 \Rightarrow S=13. \quad \text{Assim temos: } A(z) = -13 \frac{z}{z-6} + 13 \frac{z}{z-7}.$$

Pronto, temos uma expressão algébrica na variável complexa z e queremos transformá-la em uma seqüência na variável k . Para isso é necessário que se aplique a transformada Z inversa na expressão encontrada. Foi demonstrado que para $x(k) = a^{-k}$, $k \geq 0$,

$$Z\{x(k)\} = \frac{z}{z-a^{-1}}, \text{ logo podemos dizer que } a^{-k} = Z^{-1} \left\{ \frac{z}{z-a^{-1}} \right\}, \text{ em que } Z^{-1}\{f(z)\} \text{ é o}$$

termo geral da seqüência na qual se for aplicada a transformada Z obtêm-se $f(z)$. Aplicando essa transformada Z inversa na expressão de $A(z)$ e fazendo as devidas comparações entre “ a ” e os números “6” e “7” que aparecem na expressão, temos que $a(k) = -13.(6)^k + 13.(7)^k$, ou ainda $a(k) = 13.(7^k - 6^k)$.

O exemplo abaixo mostra o porquê de que quando se tem uma equação recorrente de polinômio característico com raiz dupla a solução para a equação é da forma $x_n = A(q)^n + B.n(q)^n$. Veja!!

Exemplo (IX) Resolva a equação recorrente $a(k+2) - 4a(k+1) + 4a(k) = 0$, dados os valores de $a(0) = 0$ e $a(1) = 4$.

Solução:

Aplicando a transformada Z em toda a equação vem:

$$Z\{a(k+2) - 4a(k+1) + 4a(k)\} = Z\{a(k+2)\} - 4Z\{a(k+1)\} + 4Z\{a(k)\} = \\ = z^2 A(z) - x(0)z^2 - x(1)z - 4(zA(z) - zx(0)) + 4A(z) = A(z)(z^2 - 4z + 4) - 4z = 0 \quad \text{logo}$$

$$\frac{A(z)}{z} = \frac{4}{z^2 - 4z + 4} = \frac{4}{(z-2)^2} = \frac{1}{\left(\frac{z}{2}-1\right)^2} \quad \text{assim } A(z) = X\left(\frac{z}{2}\right) = \frac{2 \cdot \left(\frac{z}{2}\right)}{\left(\frac{z}{2}-1\right)^2}.$$

que se trata de uma função do tipo $X\left(\frac{z}{a}\right)$, a transformada inversa é dada por

$$y(k) = a^k x(k) = Z^{-1} \left\{ X\left(\frac{z}{a}\right) \right\}. \quad \text{Aplicando esse resultado temos que } a(k) = \overbrace{(2k)}^{x(k)} \cdot 2^k, \text{ logo}$$

$$x(k) = k \cdot 2^{k+1}.$$

Exemplo (X) Resolva a equação recorrente $a(k+2) - 6a(k+1) + 9a(k) = 0$, dados os valores de $a(0) = 1$ e $a(1) = 6$.

Solução:

Aplicando a transformada Z em toda a equação vem:

$$Z\{a(k+2) - 6a(k+1) + 9a(k)\} = Z\{a(k+2)\} - 6Z\{a(k+1)\} + 9Z\{a(k)\} = \\ = z^2 A(z) - x(0)z^2 - x(1)z - 6(zA(z) - zx(0)) + 9A(z) = A(z)(z^2 - 6z + 9) - z^2 = 0 \quad \text{logo}$$

$$\frac{A(z)}{z} = \frac{z}{z^2 - 6z + 9} = \frac{z}{(z-3)^2} \quad \text{assim } A(z) = \frac{z^2}{(z-3)^2}.$$

Veja o resultado da 7ª transformada e faça $b = 1$ e $a = 3$. Logo a transformada inversa de $A(z)$ vai ser algo do tipo $a(k) = (k+1).3^k$.

Exercícios propostos

1) Encontre o termo geral a_n das seqüências expressas por:

- a) $a_k - 3a_{k-1} = 0, a_0 = 1, k \geq 1$ b) $2a_k - 3a_{k-1} = 0, a_0 = 2$
c) $a_k - a_{k-1} - 12 = 0, k \geq 1, a_0 = 0$ e $a_1 = 1$ d) $a_k - 4a_{k-1} + 5 = 0, k \geq 1, a_0 = 0$ e $a_1 = 1$
e) $a_n = 2a_{n-1} + 1, a_1 = 1, k \geq 2$ f) $a_k = -2a_{k-1} + 1, a_1 = 2, k \geq 2$
g) $a_k = -2a_{k-1} + k, a_1 = 2, k \geq 2$ h) $a_k = a_{k-1} + k^2, a_1 = 1, k \geq 2$
i) $a_k = 4a_{k-1} + 2^n, a_1 = 0, k \geq 2$ j) $a_k = 4a_{k-1} + (-3)^n, a_1 = 0, k \geq 2$

2) De quantas maneiras podemos formar palavras com n letras utilizando o alfabeto $\{a, b, c, d\}$ se as letras a e b não devem aparecer juntas?

3) (Itália/1996) Dado o alfabeto com três letras a, b, c , encontre o número de palavras com n letras contendo um número par de a 's. Considere $n \geq 2$.

4) Seja $f(n)$ o número de palavras com n letras, sem zeros vizinhos, formadas a partir do alfabeto $\{0, 1, 2\}$. Encontre uma recorrência e uma fórmula para $f(n)$.

5) Considere todas as palavras com n caracteres formadas a partir do alfabeto $\{0, 1, 2, 3\}$. Quantas delas têm um número par de (a) zeros, (b) zeros e uns?

6) Dadas três varetas e n discos de distintos tamanhos colocados na primeira vareta em ordem de tamanho (do menor ao maior), mover estes n discos desde a vareta inicial até a terceira usando a segunda como auxiliar, sem colocar um disco de tamanho maior sobre um de tamanho menor. É permitido o movimento de um disco por vez. Determinar o número mínimo de movimentos para movimentar toda a coluna de discos da primeira pra a terceira vareta.

OBS.: Lembre que o disco maior só será movimentado quando todos os outros discos já tiverem sido movimentados.

7) (Eureka) Seja a seguinte equação de recorrência, que considera logaritmos em base 2:

$$f(n) = 2f(\sqrt{n}) + \log_2 \log_2 n, n \geq 3$$
$$f(2) = 1$$

Neste caso aplicamos uma troca de variável para ir desta equação a uma equação linear, e poder resolvê-la, o qual significa que haverá solução só para os valores de n que satisfaçam este câmbio. Determine a expressão geral de $f(n)$, em função de n .

8) Resolva as equações propostas no primeiro exercício utilizando a transformada Z.

9) (IME) Seja a seqüência cuja lei recorrente é dada por $v_n = 6v_{n-1} - 9v_{n-2}$ sendo dados os valores iniciais v_0 e v_1 . Definimos $v_n = 3^n u_n$. Determine:

a) uma expressão para as seqüências $\{v_n\}$ e $\{u_n\}$ em função de n, u_0 e u_1 .

b) Identificar as seqüências $\{v_n\}$ e $\{u_n\}$ para o caso particular de $v_0 = \frac{1}{3}$ e $v_1 = 1$.

10) (IME) Determinar o valor do determinante da matriz $n \times n$, em função de b .

$$\begin{bmatrix} b^2 + 1 & b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b & b^2 + 1 & b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b & b^2 + 1 & b & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & b & b^2 + 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & b^2 + 1 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

. Sugestão: Use regra de Laplace.

11) (IME) Determinar o valor do determinante da matriz $n \times n$, em função de m e x .

$$\begin{bmatrix} m + x & m & m & m & \cdots & m \\ m & m + x & m & m & \cdots & m \\ m & m & m + x & m & \cdots & m \\ m & m & m & m + x & \cdots & m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m & m & m & m & & m + x \end{bmatrix}_{n \times n}$$

. Sugestão: Use regra de Laplace.

12) (IME) Determinar o valor do determinante da matriz $n \times n$, em função de n .

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 2 \end{bmatrix}_{n \times n}$$