Material by: Caio Guimarães (Equipe Rumoaoita.com)

Discussão de Sistemas
Teorema de Rouché – Capelli

Introdução:

Apresentamos esse artigo para mostrar como utilizar a técnica desenvolvida a partir do Teorema de Rouche-Capelli para sistemas lineares quaisquer. Não apresentaremos aqui a demonstração do teorema, para não estendermos além do nosso propósito (que é principalmente a sua aplicação).

Por que saber essa técnica de Rouche Capelli?

Os alunos de ensino médio estão acostumados a utilizar as regras de Cramer para discussões de Sistemas Lineares. A regra de Cramer, conhecidamente, não é geral, e não engloba todos os tipos de sistemas lineares (há falha quando o número de incógnitas é diferente do número de equações no sistema). Portanto apresentamos uma técnica inteiramente geral, e bem simplificada para discussões de sistemas lineares.

Curiosidade: **Nos vestibulares das décadas de 70 e 80 do IME algumas questões pediam para que a discussão do sistema fosse feita explicitamente por Rouche-Capelli, levando a crer então que a banca conhece o teorema, e nesse caso não aceitaria a resposta por Cramer.**

Definições

Apresentaremos algumas definições para nos auxiliar posteriormente

Sistema Linear

Conjunto de equações cujas variáveis aparecem como termos lineares (expoentes 1 para cada variável, e não há variáveis multiplicadas por outras variáveis).

> ex: **$xy + x^2 = 2$ não pode ser uma equação de um sistema linear pois apresenta o termo x^2 (expoente 2) e o termo xy (multiplicação de duas incógnitas).**

Termos Independentes

São os termos do sistema linear que não estão acompanhados de incógnita.

ex: **Na equação $x + y + 3z = 7$, o termo 7 é o termo independente.**

Sub-matriz:

Seja a matriz $A = [a_{ij}]$ (de ordem mxn). Sub-matriz de A é qualquer matriz formada eliminando-se um número de linhas e um número de colunas da matriz. O determinante da sub-matriz é chamado de menor **de A, se a sub-matriz for quadrada.**

Determinante Principal

É o determinante de ordem máxima, não nulo, provindo de uma matriz "menor" de A. Em geral, há mais de um determinante característico para cada matriz.

Característica de uma matriz A

É a ordem de qualquer determinante característico da matriz. Denotaremos característica pela letra p.

Matriz Incompleta

É a matriz composta pelos coeficientes das incógnitas de um sistema linear. A primeira coluna contém todos os coeficientes da primeira variável, a segunda coluna contém todos os coeficientes da segunda variável, e assim por diante.

Equações Secundárias

São as linhas que não foram utilizadas como parte do determinante principal. Se a característica da matriz for igual à sua ordem, então não haverá equações secundárias.

Determinante Característico

É o determinante formado ao completarmos o determinante principal, adicionando os termos da equação secundária que acompanham as mesmas incógnitas usadas no principal como uma nova linha (incluindo o termo independente), e completando a nova coluna inserida com os termos independentes das equações que formavam o principal.

OBS**: Havendo mais de uma equação secundária haverá mais de um determinante característico para o sistema linear.**

Se a definição ficou confusa para você, veja o exemplo dado no próximo item do artigo para melhor esclarecimento.

Sistema Linear Possível e Determinado

É um sistema cuja solução para as incógnitas existe e é única.

Sistema Linear Possível e Indeterminado

É um sistema cuja solução para as incógnitas existe mas não é única.

Sistema Linear Impossível

É um sistema cuja solução para as incógnitas não existe.

Exemplo:

1. Considere o sistema:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ 2x + y + z = 2 \\ 3x - y - z = 3 \end{cases}$$

Sua matriz incompleta será: Mi = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

O determinante de ordem 3 provindo dessa matriz é não nulo, então ele é o determinante principal do sistema e a característica do sistema é 3.

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

O sistema não possui equações secundárias, e dizemos que o seu determinante principal é o próprio determinante característico.

2. Considere o sistema:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ 2x + 8y + 4z = 3 \\ 3x + y + 6z = 2 \end{cases}$$

Sua matriz incompleta será: Mi = $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 8 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \end{bmatrix}$

Procurando o determinante de maior ordem não nulo: Reparemos que o de ordem 3 é nulo, e portanto a característica não é 3.

Escolhendo então o determinante de ordem 2 formado pelos 2 primeiros termos da primeira linha e pelos 2 primeiros termos da segunda coluna. Tal determinante é não nulo, logo é um determinante principal da matriz .

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \Rightarrow \Delta_p = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}$$

A característica p da matriz é 2.

Note que sobrou uma linha da matriz incompleta que não entrou no determinante principal (a linha 3 1 6). Essa linha é uma equação secundária, e utilizaremo-la para achar o determinante característico.

Para o determinante principal usamos a primeira linha (que tem termo independente 1) e a segunda linha (que tem termo independente 3).

Logo o determinante característico é:

$$C_r = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 8 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Ou seja, completamos o determinante principal com as incógnitas da equação secundária compatíveis com as incógnitas dos termos usados no determinante principal e com os termos independentes das respectivas equações usadas para formarmos o determinante característico.

O sistema não possui equações secundárias, e dizemos que o seu determinante principal é o próprio determinante característico.

Teorema de Rouche Capelli:

Se todos os determinantes característicos de um sistema linear forem nulos, então o sistema é possível. Se existir UM determinante não nulo, então o sistema é impossível.

No caso do sistema ser possível, sendo p a característica do sistema e n o numero de incógnitas do sistema:

$$\begin{cases} p < n \Rightarrow \text{sistema possível e indeterminado} \\ p = n \Rightarrow \text{sistema possível e determinado} \end{cases}$$

Observações:

i) Se não houver equações secundárias o sistema já será possível. Nesse caso basta analisarmos p e n para descobrirmos se ele será indeterminado ou determinado.

ii) Toda informação útil do sistema está incluída no determinante principal do sistema. Se o sistema for indeterminado, para resolver o sistema (achar as suas múltiplas soluções) devemos partir das informações do determinante principal.

Exercícios Resolvidos

Resolveremos alguns exercícios para fixação da idéia.

1. Discuta o sistema:

$$\begin{cases} 2x+3y+2z=5 \\ x-2y-z=3 \\ 3x+y+z=8 \end{cases}$$

Solução:

A matriz incompleta será: $M_i = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

O determinante principal não pode ser de ordem 3 , já que:

$$\det\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} = -4-9+2+12+2-3=0$$

Escolhendo o determinante do canto superior esquerdo:

$$\det\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = -4-3 \neq 0 \;\Rightarrow\; \Delta_p = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \quad \text{(p=2)}$$

Há uma equação secundária (portanto um característico):

$$C_r = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

Como todos os característicos (só existe um) são nulos, então o sistema é possível.

Como p =2 , e n=3 , temos p < n , e com isso o sistema é
Possível e Indeterminado

2. [IME 1998] Resolva e interprete geometricamente o sistema matricial abaixo em função de α e β:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = -4 \\ 5x - 6y + 7z = -8 \\ 6x + 8y + \alpha z = \beta \end{cases}$$

Solução:

Matriz incompleta: $M_i = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & -6 & 7 \\ 6 & 8 & \alpha \end{bmatrix}$

Para que a característica seja 3:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & -6 & 7 \\ 6 & 8 & \alpha \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow -6\alpha - 84 + 120 + 108 - 56 + 10\alpha = 0 \Rightarrow \alpha \neq 22$$

Nesse caso p=3, e não há equações secundárias, logo o sistema é possível e determinado.

Se $\alpha = 22$, devemos procurar um determinante principal de ordem 2. O canto superior esquerdo serve, pois é não nulo.

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -6 \end{vmatrix}$$

Há apenas uma equação secundária, logo apenas um característico:

$$C_r = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 5 & -6 & -8 \\ 6 & 8 & \beta \end{vmatrix} = -6\beta - 80 + 96 - 144 + 64 + 10\beta = 4\beta - 64$$

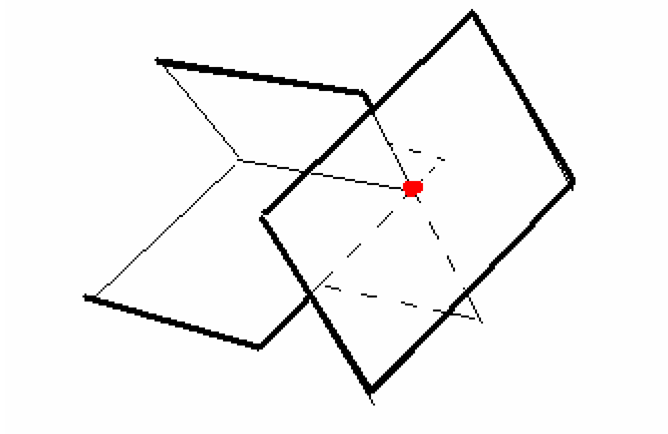
Se Cr for nulo, então o sistema é possível e indeterminado pois (p=2 < n=3)
Se Cr não for nulo, o sistema é impossível.

Logo, resumindo:

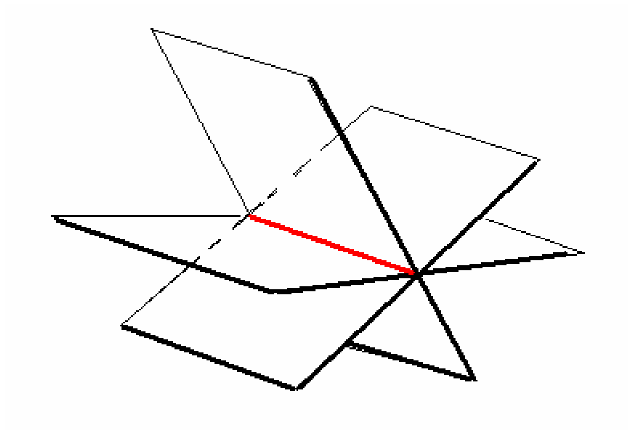
$$\begin{cases} \alpha \neq 22 \ \text{ e } \ \forall\beta \Rightarrow \text{sistema possível e determinado} \\ \alpha = 22 \ \text{ e } \ \beta = 16 \Rightarrow \text{sistema possível e indeterminado} \\ \alpha = 22 \ \text{ e } \ \beta \neq 16 \Rightarrow \text{sistema impossível} \end{cases}$$

Interpretação geométrica:

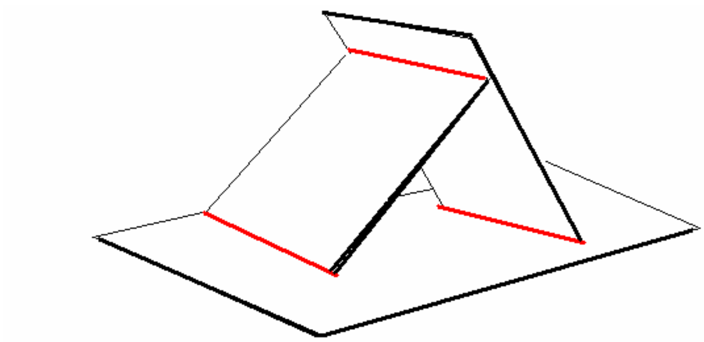
No caso do sistema possível e determinado, temos 3 equações de planos no R^3 encontrando num mesmo ponto.



No caso do sistema possível e ideterminado, temos 3 equações de planos no R^3, não paralelos (os vetores normais não são paralelos) encontrando-se num espaço de dimensão 2, uma reta (a característica do sistema nos dá que o determinante tem grau de liberdade 2).



No caso do sistema possível e determinado, temos 3 equações de planos no R^3 não paralelos (como já foi mencionado) que não se encontram simultaneamente em 3 pontos. Esse caso de impossibilidade é representado na figura:



Exercícios de Fixação:

1. Discuta o sistema:

$$\begin{cases} x+y+3z=2 \\ 2x+2y+6z=1 \\ x-y+2z=1 \end{cases}$$

2. Discuta para os diversos valores de m e n:

$$\begin{cases} 2x+3y+2z=5 \\ x-2y-z=3 \\ 3x+m-z=n \end{cases}$$

3. [IME 1999] Determine A para que seja impossível o sistema:

$$\begin{cases} x+2y-3z=4 \\ 3x-y+5z=2 \\ 4x+y+(A^2-14)z=A+2 \end{cases}$$

4. [IME 1987] Determine o valor de a para que o sistema abaixo tenha mais de uma solução e resolva-o, neste caso:

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+3y+az=3 \\ x+ay+3z=2 \end{cases}$$