Material by: Caio Guimarães (Equipe Rumoaoita.com)
Referência: cadernos de aula: Professor Eduardo Wagner

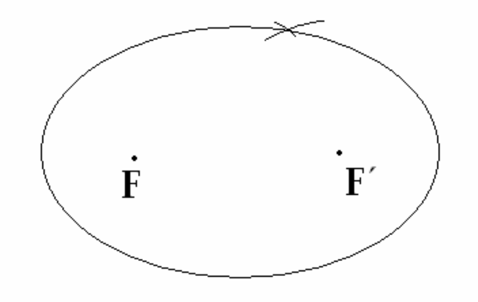
Seções Cônicas

1 - Elipses

Definição 1.1: **Dados os pontos no plano, F e F´ com FF´=2c e um comprimento 2a > 2c, é denominada Elipse de focos F e F´ com eixo maior 2a o Lugar Geométrico dos pontos P tais que PF+PF´=2a.**

Construção geométrica:

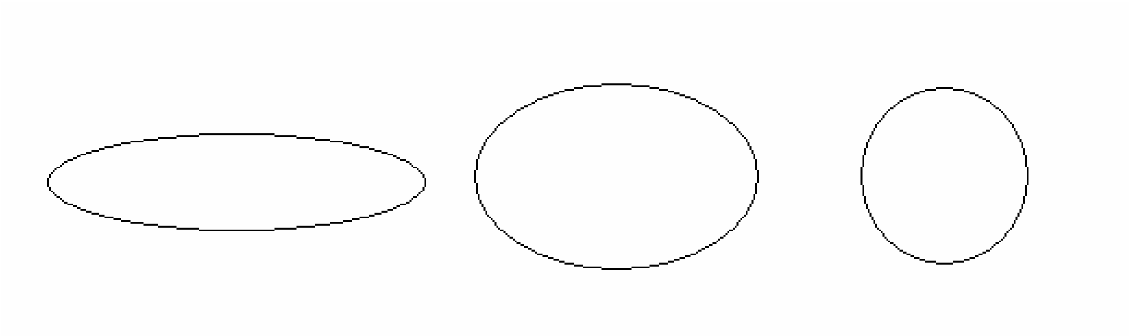
Constrói-se no papel um segmento de comprimento 2a de extremidades F e F´, e marca-se um ponto qualquer nesse segmento (chamemos esse ponto de P). Com um compasso, marca-se o comprimento FA. A partir do ponto F marca-se o arco FA no papel. Novamente com o compasso, marca-se o comprimento F´A no segmento, e em seguida traça-se o arco F´A no papel. O ponto de encontro entre os arcos traçados é um ponto da elipse. Fazendo vários pontos dessa maneira teremos um esboço da elipse:



Definição 1.2: **A quantidade excentricidade é definida pela razão e=c/a. Denotaremos as quantidades:**

a – semi-eixo maior da elipse
b – semi-eixo menor da elipse
c – semi-distância focal

A excentricidade é a quantidade que define o quanto a elipse se aproxima de uma circunferência. Uma elipse pode ser mais "gorda" se c for diminuindo em relação a 'a', ou mais "fina" se c for crescendo em relação a 'a'. Se c=0, a elipse se degenera numa circunferência.



Relação fundamental pra elipse:

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

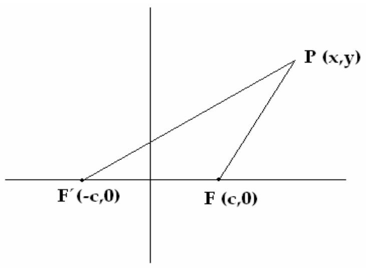
Equação canônica:

Um exercício simples de geometria analítica nos dá a equação do LG definido como elipse. Deixamos ao leitor a prova disso como uma forma de aquecimento para o que vem à diante.

A equação da elipse na forma canônica de uma elipse centrada no ponto (x_0, y_0) é:

$$\boxed{\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1}$$

Raio Vetor é um vetor que liga o foco da elipse a qualquer ponto da elipse. Existem infinitos raios-vetores para cada um dos dois focos da elipse. Porém podemos calcular seus comprimentos em função do ponto da elipse que está em sua extremidade.



PF + PF´ =2a

PF´ = 2a - PF

Logo:

$(PF')^2=(2a - PF)^2$

$PF'^2 = 4a^2 + PF^2 - 4a. PF$

Desenvolvendo essa expressão por analítica, em um sistema de eixos coordenados canônico:

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 + (x-c)^2 + y^2 - 4a.PF$$

$$\Rightarrow 4xc = 4a^2 - 4a.PF$$

$$\Rightarrow PF = a - \frac{c}{a}x$$

Sabemos que PF= 2a – PF´ , logo:

$$\boxed{\begin{cases} PF = a - ex \\ PF' = a + ex \end{cases}}$$

(x é a abcissa do ponto P)

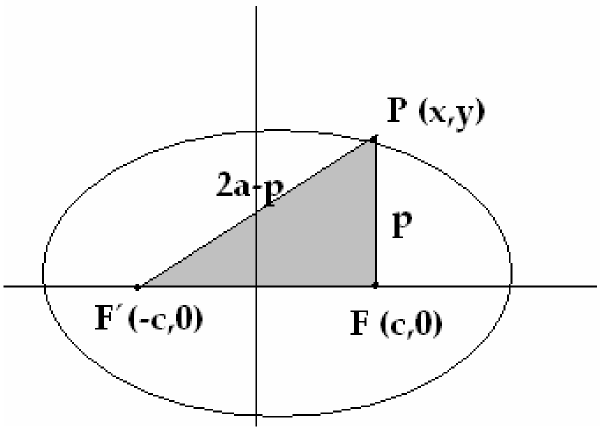
Parâmetro da elipse é definido como metade da corda focal perpendicular ao eixo maior. Latus Retum é a quantidade definida como o dobro do parâmetro da elipse.

$$PF'^2 = PF^2 + FF'^2$$

$$\Rightarrow (2a-p)^2 = (2c)^2 + p^2$$

$$\Rightarrow 4a^2 - 4ap = 4c^2$$

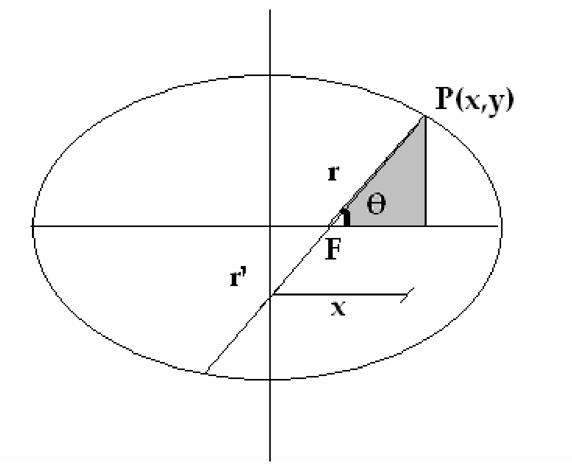
$$\Rightarrow p = \frac{a^2 - c^2}{a} = \frac{b^2}{a}$$



$$parametro: \quad p = \frac{b^2}{a}$$

$$Latus \quad retum: \quad l = \frac{2b^2}{a}$$

Forma Polar do Raio vetor:



Vimos que o raio vetor tem comprimento como sendo uma função de x:

$$r(x) = a - ex$$

Ora, podemos escrever a posição x em função de r e mais alguns parâmetros da figura:

$$x = c + r(x).\cos\theta$$

Trabalhando a expressão:

$$\Rightarrow r(x) = a - e.(c + r(x).\cos\theta)$$

$$\Rightarrow r(x).(1 + e.\cos\theta) = a - e.c$$

$$\Rightarrow r(x).(1 + e.\cos\theta) = a - \frac{c^2}{a} = \frac{b^2}{a}$$

$$\Rightarrow r(x).(1 + e.\cos\theta) = p$$

Segue então, que os raios vetores de F são função do ângulo θ:

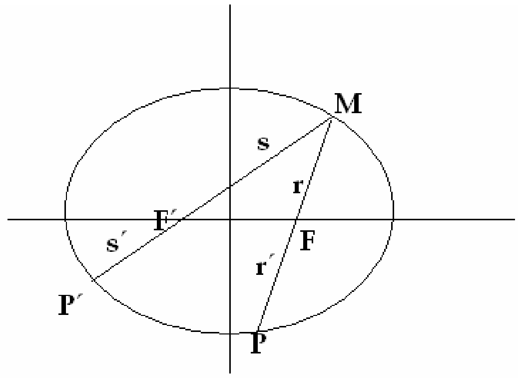
$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e.\cos\theta}$$

$$r'(\theta) = \frac{p}{1 - e.\cos\theta}$$

Questão Contextualizada Resolvida:

(IME 2004) Considere uma elipse de focos F e F′, e M um ponto qualquer dessa curva. Traça-se por M duas secantes MF e MF′, que interceptam a elipse em P e P′, respectivamente. Demonstre que a soma: $\left(\frac{MF}{FP}\right)+\left(\frac{MF'}{FP'}\right)$ é constante. Sugestão: Inicie calculando a soma: $\left(\frac{1}{MF}\right)+\left(\frac{1}{FP}\right)$

Solução:



Sejam r, r′, s, s′ os 4 raios vetores a serem considerados.
Do resultado anterior, a respeito de raios vetores na forma polar, utilizemos a sugestão:

$$\begin{cases} r(\theta)=\dfrac{p}{1+e.\cos\theta} \\ r'(\theta)=\dfrac{p}{1-e.\cos\theta} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{r}+\frac{1}{r'}=\frac{2}{p}=\frac{2a}{b^2}=c^{te}$$

Logo:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}+\dfrac{1}{r'}=\dfrac{2a}{b^2} \\ \dfrac{1}{s}+\dfrac{1}{s'}=\dfrac{2a}{b^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{r}{r}+\dfrac{r}{r'}=\dfrac{2a}{b^2}.r \\ \dfrac{s}{s}+\dfrac{s}{s'}=\dfrac{2a}{b^2}.s \end{cases}$$

Somando as duas equações:

$$\left(1+\frac{r}{r'}\right)+\left(1+\frac{s}{s'}\right)=\frac{2a}{b^2}.\left(\underbrace{r+s}_{2a}\right)=\frac{4a^2}{b^2}$$

Com isso: $\left(\frac{r}{r'}+\frac{s}{s'}\right)=\frac{4a^2}{b^2}-2=c^{te}$ como queríamos demonstrar.

Latus Retum

Havíamos definido o Latus Retum de uma elipse como sendo a quantidade expressa pelo dobro do parâmetro da elipse. Podemos redefinir a quantidade como sendo o comprimento da corda focal mínima da elipse. Para isso basta provar que, de todas as cordas focais, a de comprimento mínimo será perpendicular ao eixo principal da elipse.

$$\begin{cases} r(\theta) = \dfrac{p}{1 - e.\cos\theta} \\ r'(\theta) = \dfrac{p}{1 + e.\cos\theta} \end{cases} \Rightarrow r + r' = \frac{p}{1 - e.\cos\theta} + \frac{p}{1 + e.\cos\theta} = \frac{2p}{1 - e^2.\cos^2\theta}$$

A corda focal de tamanho r + r′ é mínima quando o denominador for máximo. Isso ocorre quando: $e^2.\cos^2\theta = 0$, ou seja, quando $\theta = 90^\circ$.

Teoremas Importantes

Antes de enunciarmos alguns teoremas importantes, daremos mais duas definições auxiliares:

Circunferência Principal da Elipse:

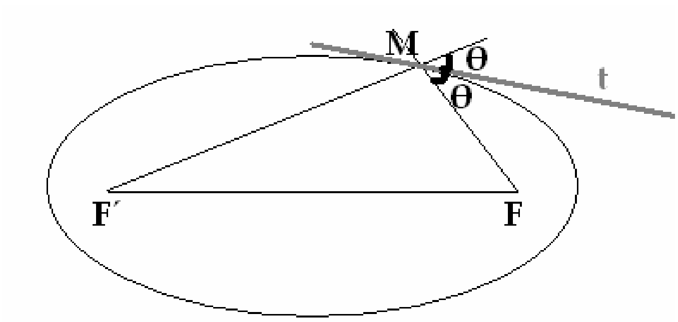
É a circunferência cujo centro coincide com o da elipse e seu raio vale a.

Circunferências Diretoras

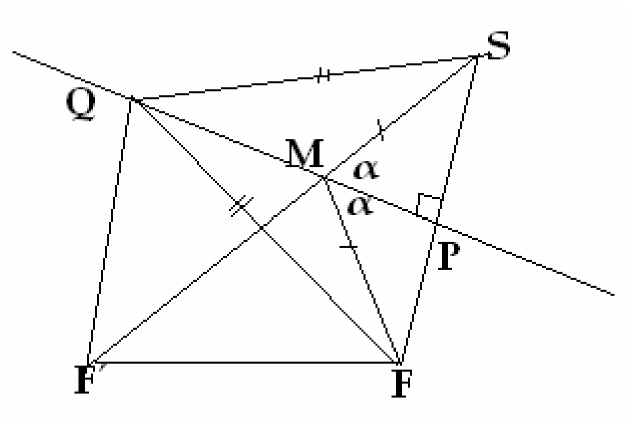
Centros em F e F′ e raio 2a.

Teorema 1.1 - Teorema das Tangentes

Seja M pertencente à elipse de focos F e F´. A bissetriz externa em M do triangulo MFF´ é tangente à elipse



Demonstração:



M pertence à elipse
A reta t é bissetriz externa
P é ponto médio do segmento FS é perpendicular ao segmento MP (ou seja, t é mediatriz do segmento FS)

Com isso MS=MF

F´S= F´M+MS = F´M+MF=2 a. Logo S está na circunferência diretora.

Seja Q pertencente à reta t, diferente do ponto M
Do triangulo QF´S:

$$QF' + QS > F'S$$

$$QF' + QF > 2a$$

Logo Q não está na elipse. Como Q é um outro ponto qualquer, tem-se que M pertence à elipse e somente M pertence à elipse. Ou seja, de todos os pontos de t, o único pertencente à elipse é M, com isso, t é tangente à elipse. CQD

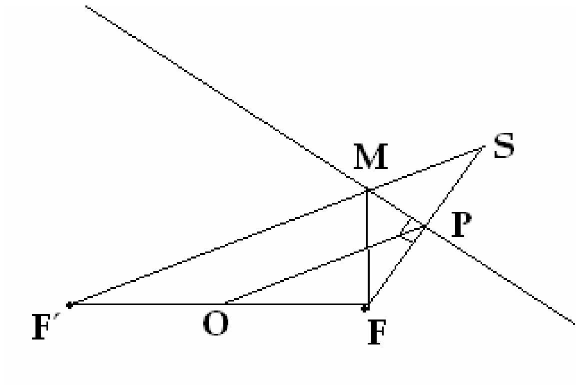
Corolário: A normal em M é bissetriz interna no triangulo MFF´.

Teoremas 1.2

i) O simétrico de um foco em relação a uma tangente está na circunferência diretora relativa ao outro foco.

ii) **A projeção de um foco em relação a uma tangente está na circunferência principal (Teorema de La Hire).**

Demonstração:

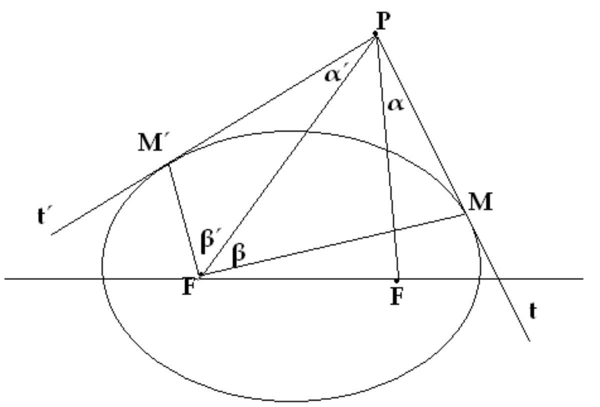


A demonstração de (i) foi feita na demonstração do teorema 1.1.

Da semelhança entre os triângulos FOP, e FF´S, temos que OP vale a metade de FS, ou seja, OP=a. Logo P, a projeção de F sobre a tangente, está na circunferência principal.

Teorema 1.3 – Teorema de Poncelet para Elipses

Seja P um ponto externo a uma elipse e t e t´ as tangentes partindo de P, como ilustrado na figura:

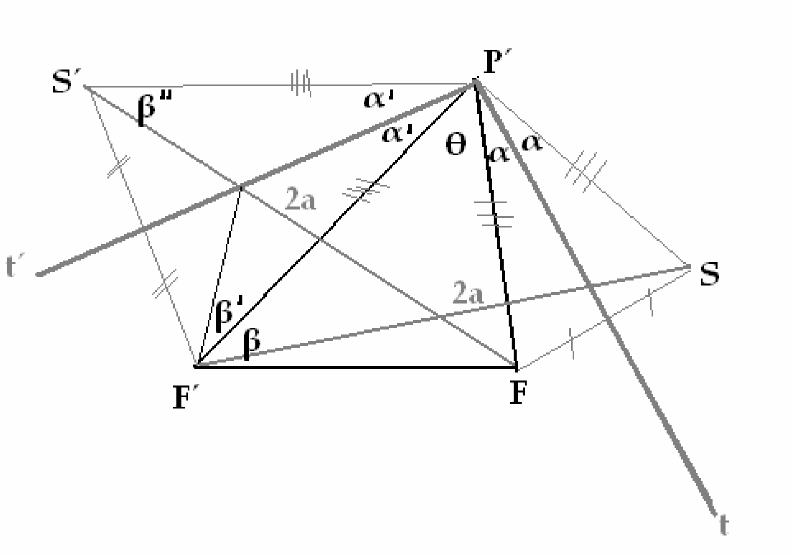


Então:

i) $\alpha = \alpha'$

ii) $\beta = \beta'$

Demonstração



(i) O triangulo PF´S é congruente ao triângulo PS´F (caso LLL)

$$S\hat{P}F' = F\hat{P}S' \Rightarrow \theta + 2\alpha = \theta + 2\alpha' \Rightarrow \alpha' = \alpha$$

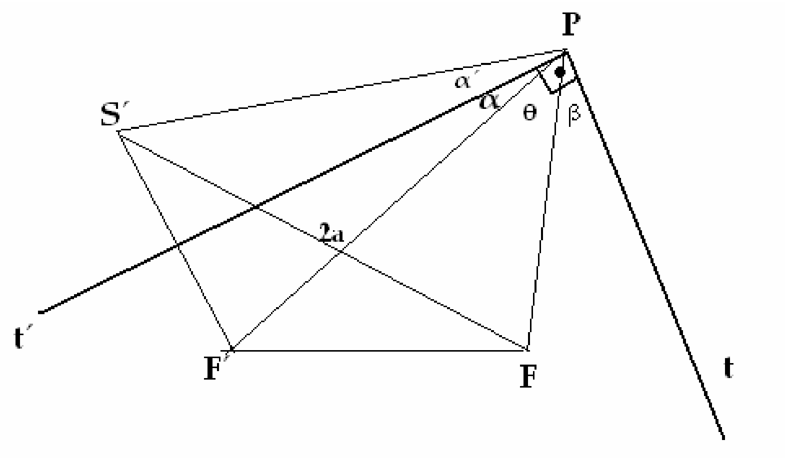
(ii) β = β″ (da congruência dos triângulos mencionados)

β´= β (da simetria)

Logo: β= β´

Questão Contextualizada Resolvida:

Uma elipse tem eixos 2a e 2b. Encontre o LG dos pontos de onde se pode traçar tangentes perpendiculares a essa elipse.



Solução:

Seja S´ o simétrico de F´ em relação a t´. Logo α= α' . Do teorema de Poncelet, α = β . Segue então que: α' = β

$\theta + \alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow \theta + \alpha + \alpha' = 90^\circ \Rightarrow \Delta FPS'$ é retângulo

Logo $PF^2 + \underbrace{PS'^2}_{PF'^2} = 4a^2$

Seja P= (x,y) o ponto variável. Um sistema de eixos ortogonais é tal que F=(0,c), e F`= (0,-c).

$$PF^2 + PF'^2 = 4a^2$$

$$\Rightarrow (x-c)^2 + y^2 + (x+c)^2 + y^2 = 4a^2$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2c^2 = 2a^2 + 2a^2$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = a^2 + (a^2 - c^2) = a^2 + b^2$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = (a^2 + b^2)$$

Logo P descreve uma circunferência de centro no centro da elipse e raio igual a $\sqrt{a^2 + b^2}$

Exercícios de Fixação

1. Os pontos A, B e C estão nesta ordem sobre uma reta r. AB=6, BC=1. Uma circunferência variável, k, é tangente em C à r. As tangentes a k traçadas por A e B cortam-se em P. Determine o LG de P.

2. O ponto A é interior à circunferência K de centro O e raio R. Uma circunferência K´ de centro P passa por A e é tangente interiormente a K. Determine o LG de P.

3. Uma elipse tem focos (0,0) e (4,0) e é tangente à reta x+2y=5. Determine o comprimento do eixo maior da elipse.

4. É dada uma circunferência de diâmetro AB=12. Seja CD uma corda perpendicular a AB. Os pontos M e N dividem CD em 3 partes iguais. Determine o LG dos pontos M e N.

5. O ponto M pertence a uma elipse de focos F e F´ com semi-eixos a=5, b=4. Determine o LG do incentro do triangulo MFF´.