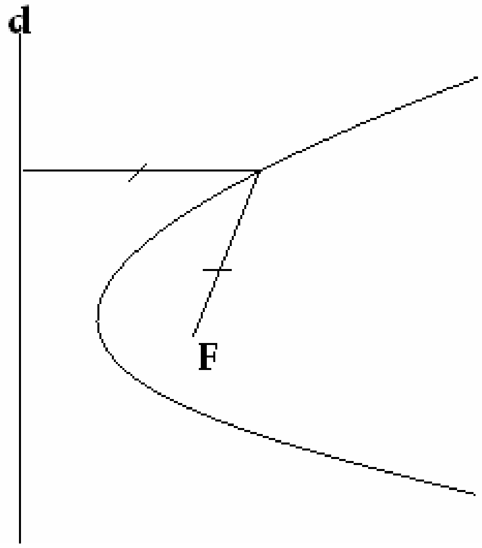
Material by: Caio Guimarães (Equipe Rumoaoita.com)
Referência: cadernos de aula: Professor Eduardo Wagner

3 - Parábolas

Definição 1.1: **Dados um ponto no plano F e uma reta d no plano, é denominada Parábola de foco F e diretriz d o lugar geométrico dos pontos P tais que a distancia de P a d é igual à distancia de P à F.**



(esboço de Parábola)

Definição 1.2:

Dizemos que o ponto da parábola mais próximo da diretriz d é chamado de vértice da parábola.

A distância do foco da parábola à diretriz da mesma é chamada de parâmetro da parábola e denotaremos por p no decorrer desse artigo.

Equação canônica

A equação reduzida da parábola cujo vértice é o ponto (x_0, y_0) **e a diretriz é uma reta paralela ao eixo das ordenadas é dada pela expressão:**

$$\boxed{(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)}$$

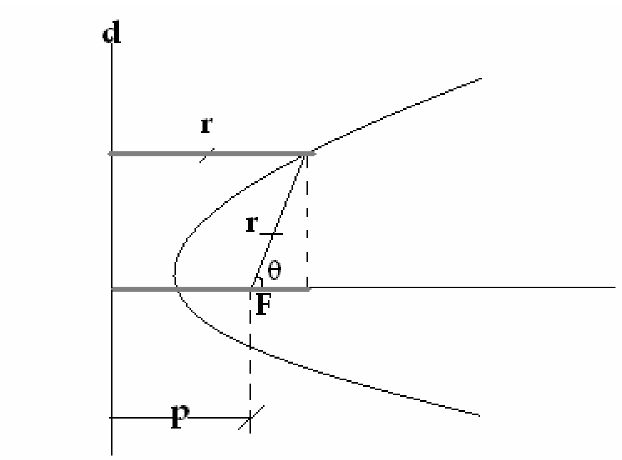
A equação reduzida da parábola A equação reduzida da parábola cujo vértice é o ponto (x_0, y_0) **e a diretriz é uma reta paralela ao eixo das ordenadas é dada pela expressão:**

$$\boxed{(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)}$$

Exercício: Demonstre a partir da definição 1.1 as expressões acima.

Raio Vetor

Assim como na definição para elipses e hipérboles, é um vetor que liga o foco da parábola a um ponto da mesma.



Segue direto da figura que:

$$r = p + r.\cos\theta$$

Portanto, temos que o raio vetor é uma função do ângulo θ :

$$\boxed{r(\theta) = \frac{p}{1 - \cos\theta}}$$

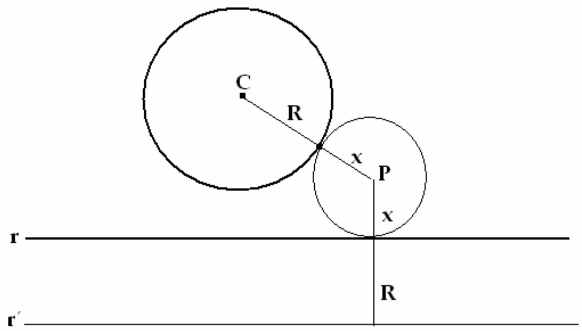
A forma polar do raio vetor, para efeito de comparação com os resultados dos raios vetores na forma polar da hipérbole e da elipse, sugere que a quantidade excentricidade **pra parábola seja considerada constante e igual a 1.**

Veremos no capítulo 5 dessa série que de fato essa definição de excentricidade nos trará outras coincidências.

Exercício: **Em uma parábola de parâmetro p, calcule o comprimento da corda focal que faz um ângulo de 45º com o eixo.**
Gabarito: 4p

Questão Contextualizada Resolvida

São dadas uma circunferência de centro C e uma reta exterior r. Determine o LG dos centros das circunferências que são tangentes exteriormente à circunferência dada e à reta r.



Solução:
Seja R o raio da circunferência dada.
Seja r´ uma reta paralela à reta r dada, distando R da mesma.

Note que a distancia de P a R é (x+R) e a distância de P a C é (x+R).

Logo P descreve uma curva tal que a distancia de P a um ponto fixo é igual à distancia de P a uma reta fixa.

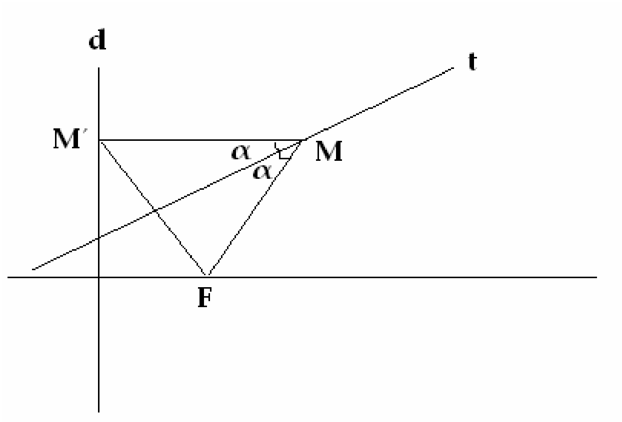
Com isso P descreve uma parábola de foco C e diretriz r.

Teoremas Importantes

Teorema 1.1 - Teorema das Tangentes

Seja M pertencente à parábola (de foco F) e M´ sua projeção sobre a diretriz da parábola. A reta tangente à parábola em M é bissetriz do ângulo $F\hat{M}M'$**.**

Prova: Análoga à prova para elipse e para hipérboles. Fica como exercício para o leitor.



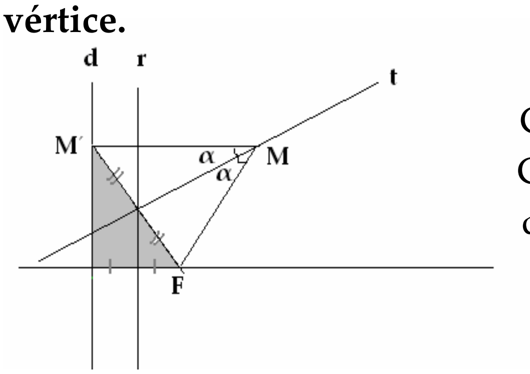
Sugestão: Considere um outro ponto Q sobre a reta t (bissetriz do ângulo M´MF). Mostre que esse ponto não pode estar sobre a parábola.

Corolário (Importantes)

(i) O simétrico do foco em relação a uma tangente da parábola pertence à diretriz.

Prova: Incluída no teorema 1.1

(ii) A projeção do foco sobre uma tangente pertence à tangente ao vértice.



Prova:

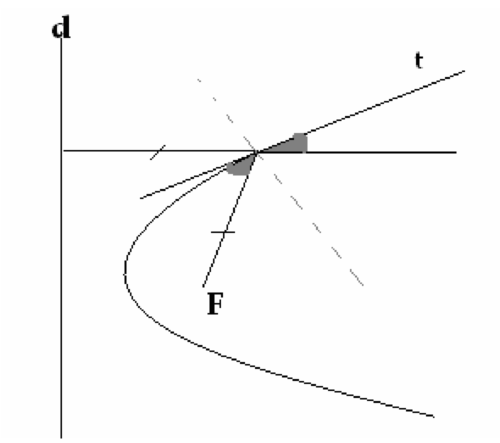
Considere o triangulo hachurado.

Como t é bissetriz, e MM´=MF, temos que t é mediatriz do segmento M´ F.

Da semelhança no triangulo hachurado, segue que r divide a distancia de F a d em 2 partes iguais. Como o vértice se encontra eqüidistante de F e da diretriz d, temos que r passa pelo vértice da parábola.

(iii) Propriedade Refletora

O ângulo entre um raio vetor qualquer e a tangente na extremidade do raio vetor é igual ao ângulo entre a mesma tangente e uma paralela ao eixo principal passando pelo ponto. (Vide figura)



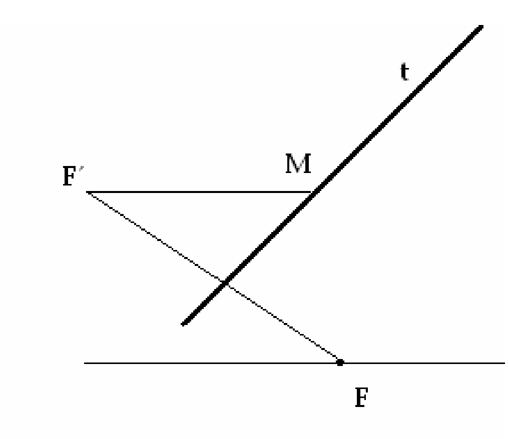
Prova : Pela sua simplicidade, deixamos ao leitor que apenas verifique esse fato.

Essa propriedade é conhecida como a propriedade refletora das parábolas. ("Todo raio incidente pelo foco numa parábola sai paralelo ao seu eixo")

A idéia da antena parabólica (um parabolóide) se baseia no fato de que sinais vindo de muito longe (do infinito) devem convergir num ponto (o foco do parabolóide) único.

Determinação Geométrica do Ponto de Tangencia

Dados o eixo principal da parábola, o foco F e uma tangente t, como determinar o ponto M de tangência?



- Traçar o simétrico F´ de F em relação a t (F´ pertence à diretriz)

- Traçar uma paralela ao eixo e perpendicular à diretriz a partir de F´.

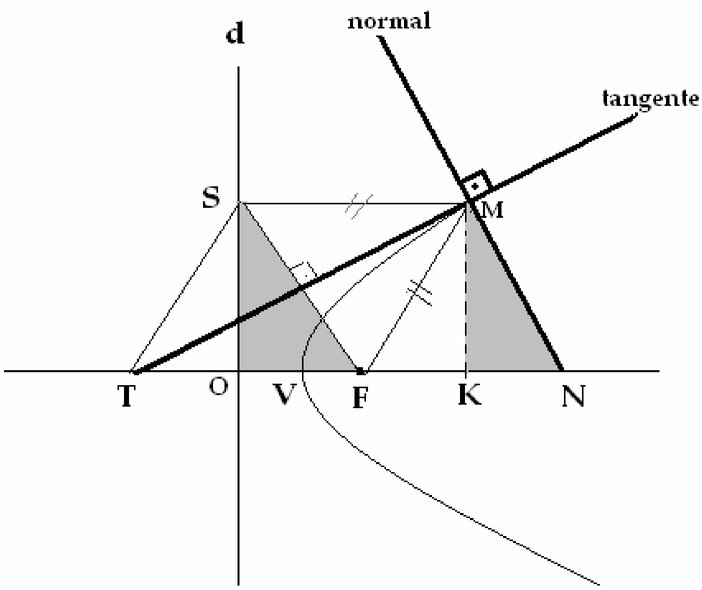
O ponto de encontro será M (o ponto de tangência)

Subtangente e Subnormal

Considere a figura abaixo, onde M é o ponto de tangencia.

Subnormal – **É a projeção ortogonal de MN sobre o eixo principal da parábola. (subnormal = KN)**

Subtangente – **É a projeção ortogonal de MT sobre o eixo principal da parábola. (subtangente = KT)**



Propriedades:

i) **A subnormal tem comprimento constante e igual a p.**

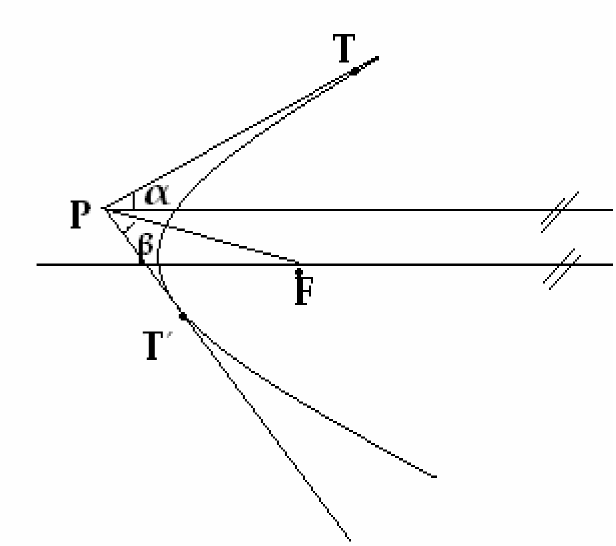
Prova:
Da análise geométrica da figura acima, vemos que os 2 triângulos hachurados são congruentes. Logo : $p = OF = KN$

ii) **O vértice é ponto médio da subtangente.**

Prova: Exercício para o leitor.
Sugestão: Mostre que os triângulos ΔOTS e ΔFKM são congruentes.

OBS: Numa questão de 2002 do IME, foi definido o conceito de subnormal. O conceito definido na questão não corresponde ao conceito encontrado nos livros de matemática. O conceito apresentado nesse artigo é o reconhecido como verdadeiro conceito de subnormal.

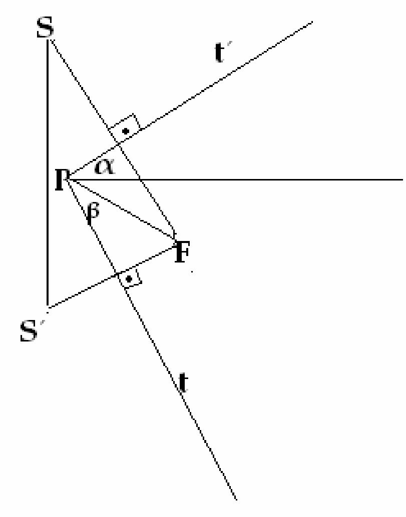
Teorema 1.2 – Teorema de Poncelet para Parábolas

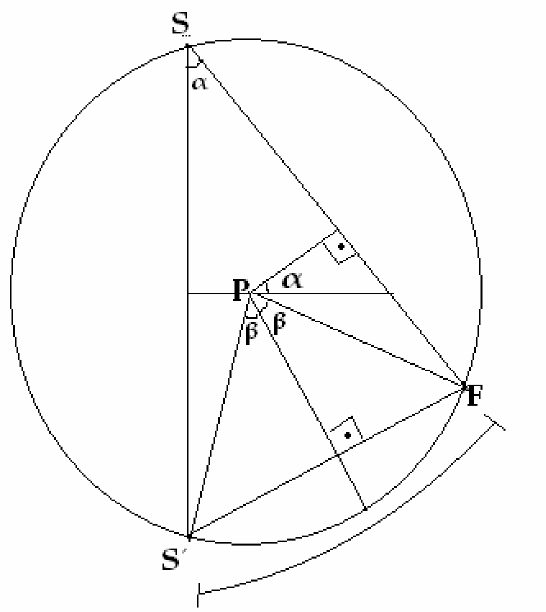


Sejam t e t′ retas tangentes a uma parábola em T e T′ a partir de P. Então os ângulos α e β são iguais.

Prova:
Considere o simétrico S de F em relação a t e o simétrico S′ de F em relação a t′, e considere em seguida o triângulo formado por SS′F.

As retas t e t′ são mediatrizes dos lados dos triângulos e se cruzam em P. Logo, P é o circuncentro do triangulo.





Verifique a correspondência de ângulos feitas na figura acima.

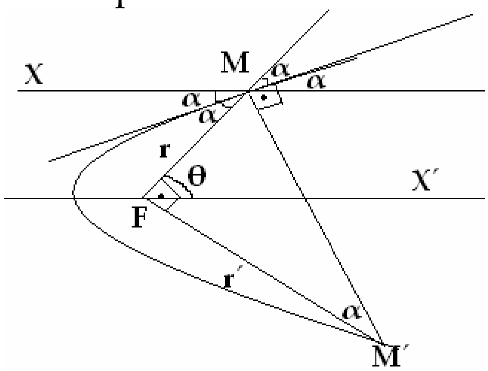
O ângulo $S\hat{S}'F = \alpha$ "enxerga" o arco $\overset{\frown}{S'F}$,
O ângulo central $S\hat{P}F = 2\beta$, também "enxerga" o arco $\overset{\frown}{S'F}$

Logo $\beta = \alpha$, **CQD**

Questão Contextualizada Resolvida

[IME 96/97] Em uma parábola (P), com foco F e parâmetro p, considere uma corda MM´ normal à parábola em M. Sabendo que o ângulo $M\hat{F}M' = 90^0$, calcule os segmentos FM e FM´.

Solução: Podemos fazer um desenho da parábola na situação, usando o teorema das tangentes. Pela Geometria do Triângulo é fácil verificar que o $M\hat{M}'F = \alpha$



Forma polar dos raios vetores:

$$\begin{cases} r = \dfrac{p}{1-\cos\theta} \\ r' = \dfrac{p}{1-\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)} = \dfrac{p}{1-sen\theta} \end{cases}$$

$$X\hat{M}F = F\hat{M}M' \quad \Rightarrow \alpha = \frac{\theta}{2}$$

Do triangulo FMM´:

$$tg\alpha = \frac{r}{r'} = \frac{\dfrac{p}{1-\cos\theta}}{\dfrac{p}{1-sen\theta}} \quad \Rightarrow tg\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1-sen\theta}{1-\cos\theta}$$

Lembrando que podemos escrever senθ e cosθ em função de t=tg(θ/2):

$$sen\theta = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \Rightarrow t = \frac{1-\dfrac{2t}{1+t^2}}{1-\dfrac{1-t^2}{1+t^2}} = \frac{1-2t+t^2}{2t^2}$$

$\Rightarrow 2t^3 = t^2 - 2t + 1 \quad \Rightarrow \quad 2t^3 - t^2 + 2t - 1 = 0 \quad \Rightarrow$ A única raiz real é t=1/2

$$\Rightarrow tg\theta = \frac{2t}{1-t^2} = \frac{4}{3} \quad \Rightarrow sen\theta = \frac{4}{5} \quad , \quad \cos\theta = \frac{3}{5}$$

Logo: $r = \dfrac{p}{1-\frac{3}{5}} = \dfrac{5p}{2} \qquad e \qquad r' = \dfrac{p}{1-\frac{4}{5}} = 5p$

$$\boxed{MF = \frac{5p}{2} \quad e \quad M'F = 5p}$$

Exercícios de Fixação

1. Determine o LG dos pontos de onde se pode traçar tangentes perpendiculares a uma parábola

1. Por um ponto P externo a uma parábola são traçadas as tangentes PM e PM´ à parábola de foco F. Mostre que
$P\hat{F}M = P\hat{F}M'$

2. [IME 1985] Seja uma parábola de foco F e diretriz d. Por um ponto P, pertencente a d, traçam-se tangentes à parábola que a interceptam em A e B. Demonstre que A, B e F estão em linha reta.

3. Pelo ponto P traçam-se as tangentes perpendiculares PM e PM´ a uma parábola.

   a) Mostre que MM` é uma corda focal
   b) Mostre que FP é perpendicular a MM´.

4. [IME] No triangulo ABC os vértices B e C são fixos e o vértice A percorre uma reta paralela à reta suporte de BC. Determine o Lugar Geométrico do Ortocentro do triangulo ABC.