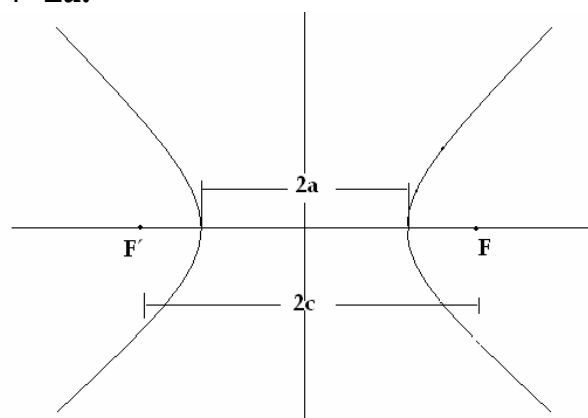


Material by: Caio Guimarães (Equipe Rumoaqita.com)

Referência: cadernos de aula: Professor Eduardo Wagner

2 - Hipérboles

Definição 1.1: Dados os pontos no plano, F e F' com $FF'=2c$ e um comprimento $2a < 2c$, é denominada Hipérbole de focos F e F' com eixo transversal (ou eixo real) $2a$ o Lugar Geométrico dos pontos P tais que $|PF-PF'|=2a$.



Esboço de uma Hipérbole

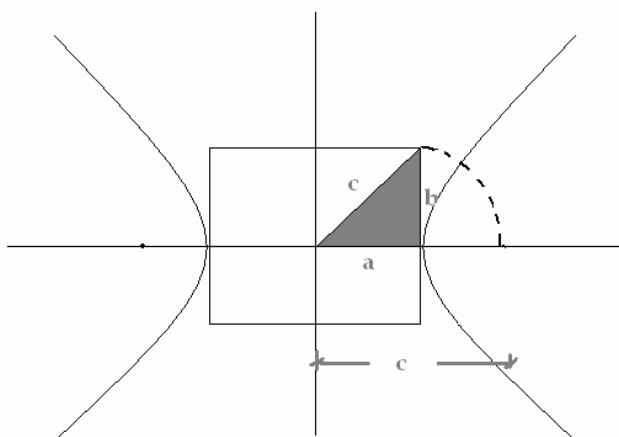
Definição 1.2: A quantidade excentricidade é definida pela razão $e=c/a$. Denotaremos as quantidades:

a – semi-eixo transversal (ou real) da hipérbole

b – semi-eixo não-transversal (ou imaginário) da hipérbole

c – semi-distância focal

Relação fundamental pra Hipérbole:



Do triângulo retângulo da figura, temos a relação fundamental:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

OBS: Não confundir com a relação fundamental da elipse: $a^2 = b^2 + c^2$

Equação canônica

Um exercício simples de geometria analítica nos dá a equação do LG definido como hipérbole. Deixamos ao leitor a prova disso como uma forma de aquecimento para o que vem à diante.

A equação da elipse na forma canônica de uma hipérbole centrada no ponto (x_0, y_0) , e focos no eixo x é:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Podemos representar hipérboles com focos no eixo y (por exemplo $F'=(0,c)$ e $F=(0,-c)$). A equação na forma canônica da hipérbole nessa situação é:

$$\frac{(y - y_0)^2}{a^2} - \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1$$

Veremos no capítulo 4 (Rotação e Translação de Cônicas) que uma hipérbole pode ter sua equação alterada mudando o sistema de coordenadas. É muito comum vermos a equação de uma hipérbole dada por:

$$x.y = c^{te}$$

Exemplo: Uma curva isoterma de um gás num gráfico P x V descreve uma hipérbole, pois de acordo com a lei de Clapeyron $PV=n.R.T = \text{constante}$

Algumas Observações:

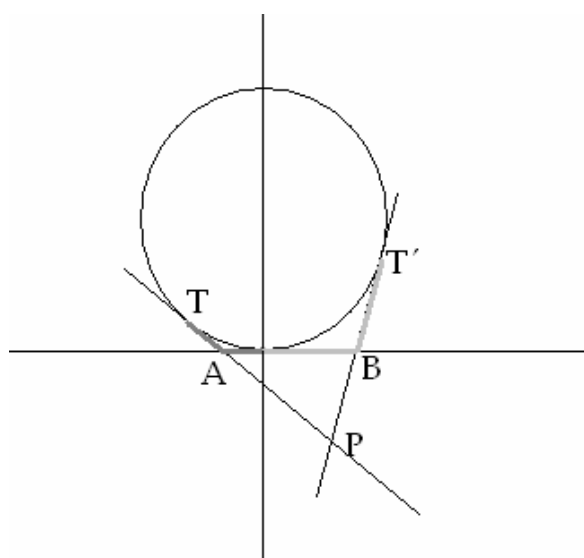
- i) No caso de elipse, $a > c$, e $a > b$ (da desigualdade triangular do triângulo fundamental da elipse). Porém no caso da hipérbole a única restrição é que $c > a$ (podendo a ser maior ou menor que b).
- ii) Da definição do LG hipérbole, note que $PF' - PF = 2a$ gera o ramo direito da hipérbole ($PF' > PF$) e $PF - PF' = 2a$ gera o ramo esquerdo da hipérbole.

Questão Contextualizada Resolvida

[IME 2005] Considere os pontos $A(-1,0)$ e $B(2,0)$ e seja C uma circunferência de raio R tangente ao eixo das abscissas na origem. A reta r_1 é tangente a C e contém o ponto A e a reta r_2 também é tangente a C e contém o ponto B . Sabendo que a origem não pertence às retas r_1 e r_2 , determine a equação do LG descrito pelo ponto de interseção de r_1 e r_2 ao se variar R no intervalo $(0, +\infty)$

Solução:

A tendência natural do candidato ao resolver uma questão de cônicas no IME é partir para as contas e equações de geometria analítica. Em muitas questões de Lugares Geométricos podemos reconhecer a curva pedida pela simples definição da cônica em questão. É o caso dessa questão do IME, como veremos:



$$AT = AO = 1 \text{ (tangentes a partir de A)}$$

$$BT' = BO = 2 \text{ (tangentes a partir de B)}$$

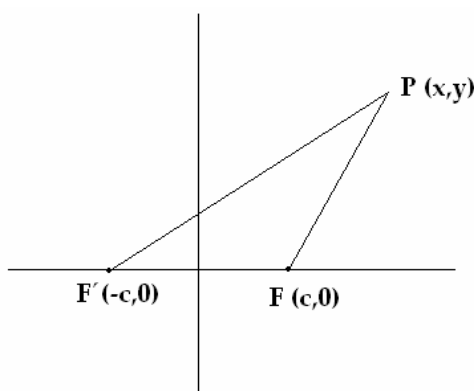
$$\text{Logo: } PT = PA + 1 \text{ e } PT' = PB + 2$$

$$PT = PT' \text{ (tangentes a partir de P)}$$

$$\text{Com isso: } PB - PA = 1$$

Da definição de hipérbole, temos que P descreve uma hipérbole de focos A e B , eixo real igual a 1. Nessa situação P descreve um dos ramos da hipérbole. O segundo ramo será traçado quando a circunferência estiver abaixo do eixo das abscissas. O ponto $(1,0)$ não está definido no LG já que as tangentes não podem passar pela origem.

Raio Vetor, assim como na definição para elipses, é um vetor que liga o foco da hipérbole a qualquer ponto da hipérbole. Podemos calcular seus comprimentos em função do ponto da hipérbole que está em sua extremidade.



Para um dos ramos da hipérbole:

$$PF' - PF = 2a$$

$$PF' = 2a + PF$$

Logo:

$$(PF')^2 = (2a + PF)^2$$

$$PF'^2 = 4a^2 + PF^2 + 4a \cdot PF$$

Desenvolvendo essa expressão por analítica:

$$(x + c)^2 + y^2 = 4a^2 + (x - c)^2 + y^2 + 4a \cdot PF$$

$$\Rightarrow 4xc = 4a^2 + 4a \cdot PF$$

$$\Rightarrow PF = \frac{c}{a}x - a$$

Sabemos que $PF = 2a - PF'$, logo:

$$\begin{cases} PF = ex - a \\ PF' = ex + a \end{cases}$$

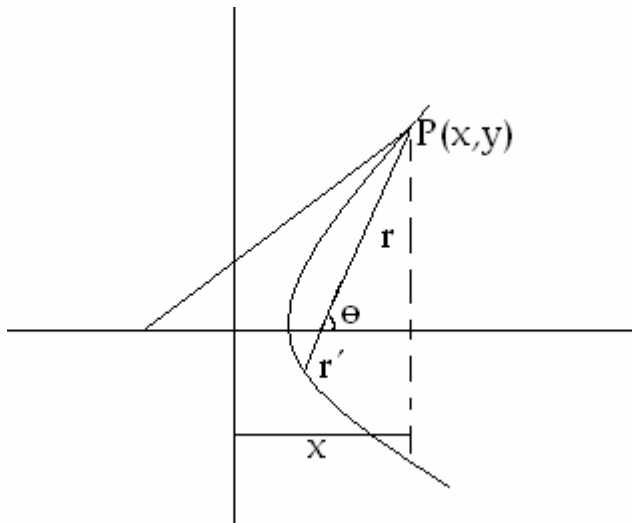
(ramo direito da hipérbole)

Seguindo um raciocínio análogo para o ramo esquerdo da hipérbole $(PF' - PF) = 2a$:

$$\begin{cases} PF = -ex + a \\ PF' = -ex - a \end{cases}$$

(ramo esquerdo da hipérbole)

Forma Polar do Raio vetor:



Vimos que o raio vetor tem comprimento como sendo uma função de x . Para um ponto P do ramo direito da hipérbole, e para o raio vetor em relação ao foco direito:

$$r(x) = ex - a$$

Ora, podemos escrever a posição x em função de r e mais alguns parâmetros da

figura:

$$x = c + r(x) \cdot \cos \theta$$

Trabalhando a expressão:

$$\Rightarrow r(x) = e \cdot (c + r(x) \cdot \cos \theta) - a$$

$$\Rightarrow r(x) \cdot (1 - e \cdot \cos \theta) = e \cdot c - a$$

$$\Rightarrow r(x) \cdot (1 - e \cdot \cos \theta) = \frac{c^2 - a^2}{a} = \frac{b^2}{a}$$

$$\Rightarrow r(x) \cdot (1 - e \cdot \cos \theta) = p$$

Definimos como parâmetro p da hipérbole a quantidade b^2/a para que as equações polares dos raios vetores se assemelhem aos da elipse.

Segue então, que os raios vetores de F são função do ângulo θ :

$$r(\theta) = \frac{p}{1 - e \cdot \cos \theta}$$

$$r'(\theta) = \frac{p}{1 + e \cdot \cos \theta}$$

Exercício: Descreva os raios vetores de F em função de θ para o ramo esquerdo. Escreva também os raios vetores de F' em função de θ para pontos de ambos os ramos.

Assíntotas da Hipérbole

Um resultado do cálculo diferencial é que as assíntotas oblíquas em relação a uma curva possuem coeficientes angulares e lineares dados por:

$$\begin{cases} m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \\ h = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - m.x) \end{cases}$$

A equação de uma hipérbole centrada na origem é:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \therefore \quad y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$$

Logo:

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\pm \frac{b}{a} \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} \right) = \pm \frac{b}{a}$$

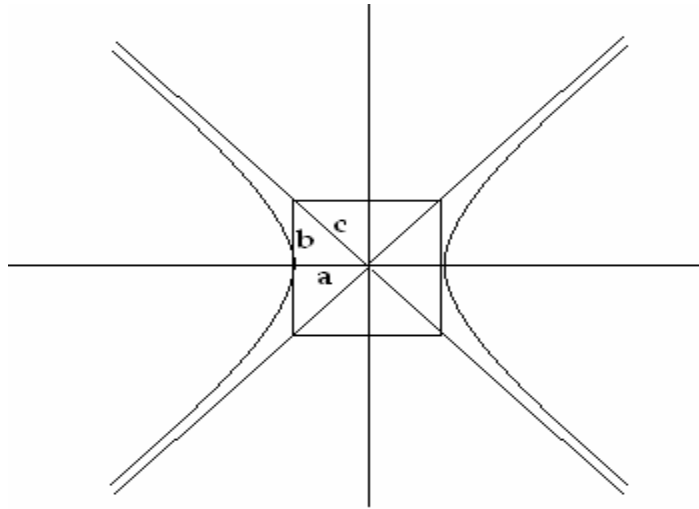
Usando as noções de limite (Regra de L'Hospital)

$$\begin{aligned} h &= \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - m.x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\pm \frac{b}{a} (\sqrt{x^2 - a^2} - x) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\pm \frac{b}{a} \left(\frac{\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} - 1}{\frac{1}{x}} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\pm \frac{b}{a} \left(\frac{a^2.x}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}} \right) \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

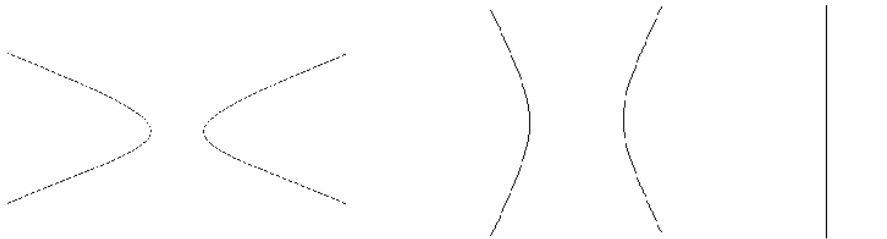
Equação das Retas Assíntotas às hipérboles centradas na origem:

$$y = \pm \frac{b}{a}.x$$

Ou seja, as assíntotas a uma hipérbole na forma canônica são as diagonais do retângulo fundamental da hipérbole (veja figura abaixo)



Fica então evidenciado que a aparência da hipérbole (uma hipérbole mais aberta ou mais fechada) depende da relação b para a . Como $c^2 = b^2 + a^2$, podemos dizer que essa 'aparência' depende da excentricidade c/a da hipérbole. Se $b \gg a$, então a hipérbole se degenera em 2 retas paralelas.



Quando $a = b$, dizemos que **hipérbole é equilátera** (o retângulo fundamental é um quadrado), e suas assíntotas, portanto, formam entre si um ângulo reto.

Teoremas Importantes

Antes de enunciarmos alguns teoremas importantes, daremos mais duas definições auxiliares (exatamente igual ao conceito para elipses)

Circunferência Principal:

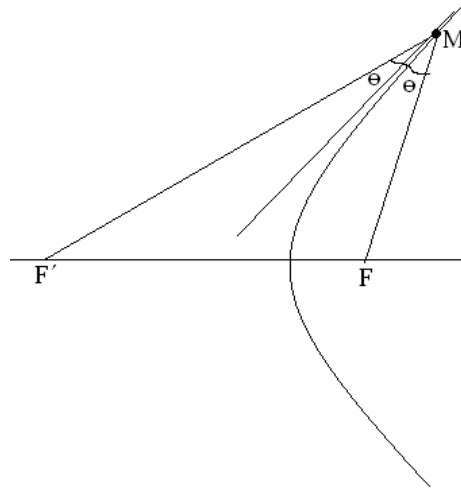
É a circunferência cujo centro coincide com o da elipse e seu raio vale a .

Circunferências Diretoras:

Centros em F e F' e raio $2a$.

Teorema 1.1 - Teorema das Tangentes

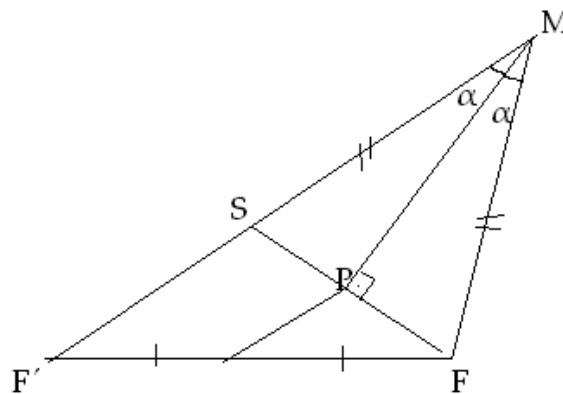
Seja M pertencente à hipérbole de focos F e F' , a tangente em M é a bissetriz do ângulo $\widehat{FMF'}$



Demonstração : Exatamente análoga à demonstração para elipse.

Teoremas 1.2

- i) O simétrico de um foco em relação a uma tangente pertence à circunferência diretora com centro no outro foco.
- ii) A projeção de um foco em relação a uma tangente está na circunferência principal (Teorema de La Hire).



Demonstração:

Seja S o simétrico de F em relação à tangente à hipérbole em M, e P a projeção de F sobre a tangente. Do teorema das tangentes, temos que a reta tangente é mediatriz do triângulo FMS.

Com isso: $MS = MF$

Da definição de hipérbole: $MF' - MF = 2a$.

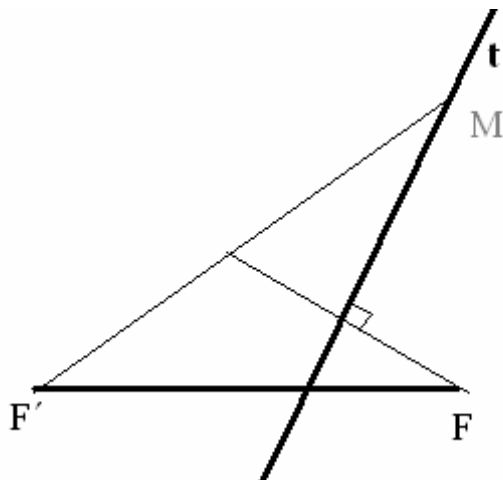
Como $MS = MF$, $MF' - MS = F'S = 2a$.

Logo S está na circunferência diretora de F' (sua distância a F' é $2a$)

Sendo O o centro da hipérbole (ponto médio de F' e F), da semelhança dos triângulos $\Delta F'SF \sim \Delta OPF$, temos que $OP = a$

Com isso P está na circunferência principal da hipérbole. CQD

Consequência Geométrica: Dada uma reta t e os focos F' e F , como determinar o ponto de tangência?



Sejam t e $F'F$ dados.

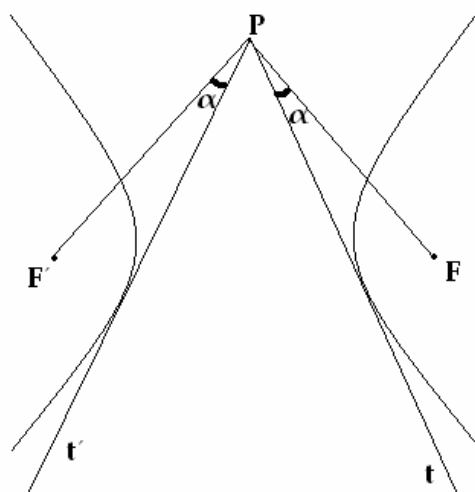
A partir de F , traçar o simétrico em relação a t .

A partir de F' , traçar uma reta unindo-o com o simétrico de F em relação a t .

O ponto de interseção dessa reta com t será o ponto de tangência da hipérbole com a reta t .

Demonstração: Segue direto dos teoremas 1.1 e 1.2

Teoremas 1.3 - Teorema de Poncelet pra Hipérboles



A partir de um ponto P traça-se as tangentes t e t' à hipérbole.

Sendo T e T' os pontos de tangência, então:

$$F'PT' = FPT$$

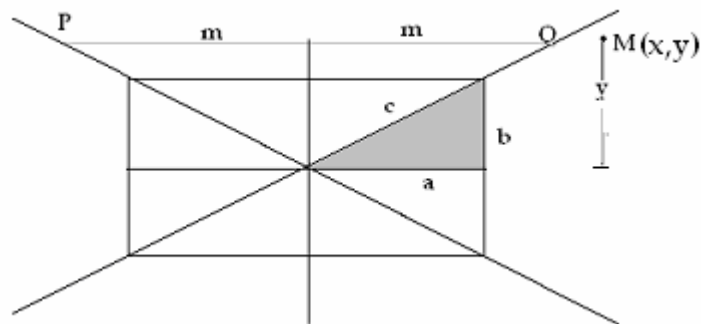
Exercício: Demonstre o teorema de Poncelet para hipérboles.

Sugestão: O raciocínio é rigorosamente análogo à demonstração de Poncelet para elipses.

Questão Contextualizada Resolvida 2

M é um ponto de uma hipérbole. Uma paralela ao eixo transversal passando por M corta as assíntotas em P e Q. Mostre que o produto MQ.MP é constante

Solução:



Da semelhança de triângulos:

$$\frac{a}{m} = \frac{b}{y} \Rightarrow m = \frac{ay}{b}$$

$$\begin{aligned}
 MP \cdot MQ &= (x + m) \cdot (x - m) = x^2 - m^2 \\
 &= x^2 - \frac{a^2 y^2}{b^2} = \frac{b^2 x^2 - a^2 y^2}{b^2} \cdot \frac{a^2}{a^2} \\
 &= a^2 \cdot \underbrace{\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)}_{\substack{(x,y) \text{ pertence} \\ \text{à hipérbole}}} = a^2 \cdot 1 = a^2
 \end{aligned}$$

Logo o produto é constante e vale a^2 .

OBS: Se fosse traçada uma paralela ao eixo não transversal, o produto seria também constante e valeria b^2 (prove como exercício).

Exercícios de Fixação

1. Mostre que o produto das distâncias de um ponto da hipérbole às assíntotas é constante. (sugestão: Utilize o resultado da questão resolvida 2).
2. Mostre que se uma reta corta as assíntotas em P e Q e a hipérbole em M e N, então $PM=NQ$. (Sugestão: Utilize o resultado da questão resolvida 2).

OBS Importante: Com o resultado dessa questão, fica evidenciado que uma se a reta é tangente à hipérbole, então o ponto de tangência é ponto médio de P e Q.

3. Uma reta tangente a uma hipérbole corta as assíntotas em P e Q. Sendo O o centro da hipérbole, mostre que o triângulo OPQ tem área constante.
4. Determine o LG dos pontos de onde se pode traçar tangentes perpendiculares a uma hipérbole.