

Recorrências

Turma IME/ITA – Aula I

Em certas seqüências numéricas, em alguns casos, é possível determinar um termo geral de um número da mesma em função de um ou mais de seus termos anteriores. Termos gerais desse tipo são chamados de equações de recorrência.

Ex:
$$S_n = \begin{cases} A_n = 3 \cdot A_{n-1} \\ A_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow S_n = \{1, 3, 9, 27, \dots\}$$

Podemos classificar os diversos tipos de seqüências recorrentes, quanto a sua (seu):

i) Ordem: A ordem nos dá o número de termos anteriores de quem o termo geral depende. Por exemplo, um termo geral que nos dá um termo da seqüência em função de um termo anterior é dito uma recorrência de 1ª ordem; o que nos dá um termo em função de 2 termos anteriores é dito uma recorrência de 2ª ordem, e assim em diante.

ii) Termo Independente: Uma equação que nos dá um termo em função de termos anteriores e outras constantes aditivas, ou seja, termos independentes, são ditas recorrências não homogêneas. Equações homogêneas são as recorrências com termos gerais sem termos independentes.

iii) Linearidade: Uma recorrência é dita linear quando o expoente dos termos anteriores do termo geral são todos iguais a 1, e caso contrário é dita não linear

ex: Recorrência não linear: $A_n = 2 \cdot (A_{n-1})^2 + 3$

*OBS: Somente a equação de recorrência não define uma seqüência. É sempre necessário tirar algum dado sobre os termos iniciais da seqüência recursiva.

Resolução de Recorrências Lineares:

Nesse caso procedemos da seguinte maneira:

i) 1ª Ordem

$$\begin{cases} A_1 = a \\ A_n = b \cdot A_{n-1} + c \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} A_n = b \cdot A_{n-1} + c \\ A_{n-1} = b \cdot A_{n-2} + c \\ A_{n-2} = b \cdot A_{n-3} + c \\ \dots \\ A_2 = b \cdot A_1 + c \end{array} \right\}$$

Multiplicando a 2ª equação por b, a 3ª por b², ..., e depois somando:

$$\begin{aligned}
 A_n &= b.A_{n-1} + c \\
 bA_{n-1} &= b^2.A_{n-2} + bc \\
 b^2A_{n-2} &= b^3.A_{n-3} + b^2c \\
 &\dots \\
 b^{n-2}A_2 &= b^{n-1}.A_1 + b^{n-2}.c \\
 \hline
 A_n &= b^{n-1}.a + (1 + b + b^2 + \dots + b^{n-2}).c
 \end{aligned}$$

ii) 2ª Ordem - Homogênea

$$\begin{cases}
 A_1 = a \\
 A_2 = a' \\
 A_n = b.A_{n-1} + c.A_{n-2}
 \end{cases}$$

É possível provar, nesse caso, que a solução dessa recorrência, (2ª ordem homogênea e linear) é do tipo:

$$A_n = p.(x_1)^n + q.(x_2)^n$$

Onde x_1, x_2 são as raízes de: $x^2 = b.x + c$

*OBS:

- Essa equação é formada pelos coeficientes da equação de recorrência e é chamada de equação característica da recorrência.

- As constantes m e n são tiradas pelos dados iniciais da equação. Substituindo pra n=1, e pra n=2 temos duas equações das quais o sistema nos darão os valores dessas constantes.

Exemplo Resolvido:

Questão:

Determine a lei de recorrência da sequência com primeiro e segundo termos, respectivamente 1 e 2, tal que o termo geral é obedecido:

$$A_n = 5A_{n-1} - 6.A_{n-2}$$

Solução: Equação característica: $x^2 = 5x - 6 \Rightarrow$ Raízes {2,3}

$$\begin{cases}
 A_n = p.2^n + q.3^n \\
 n = 1 \Rightarrow 1 = 2p + 3q \Leftrightarrow p = \frac{1}{2}, q = 0 \\
 n = 2 \Rightarrow 2 = 4p + 9q
 \end{cases}$$

Logo a lei de recorrência é

$$A_n = \frac{1}{2}.2^n = 2^{n-1}$$

Exercícios:

1. Quantas são as seqüências de n números formadas por n algarismos em que os únicos dígitos que podem ser utilizados são 0 e 1, nas quais o 0 figura um número ímpar de vezes?

2. Resolva o mesmo problema, no qual 0 figura um número ímpar de vezes, só que podendo utilizar agora os dígitos 0, 1 e 2.

3. Resolva as seguintes relações de recorrência:

(a) $a_1 = 0, a_2 = 2, a_n + 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 0$ para $n \geq 3$.

(b) $a_0 = 1, a_1 = 2, a_n - 2a_{n-1} - a_{n-2} = 0$ para $n \geq 2$.

4. Considere uma caixa de chocolate BIS, vista de cima, que pode ser considerada uma tabela de $n \times 2$ quadrados. Cada unidade de BIS ocupa exatamente 2 quadrados dessa caixa. Considerando que não podemos colocar um BIS em cima do outro, determine de quantas formas podemos organizar exatamente essa caixa, completando todos os espaços.

5. (IME 2004-05)

Calcule o determinante da matrix $n \times n$ em função de b , onde b é um número real tal que $b^2 \neq 1$.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} b^2+1 & b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b & b^2+1 & b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b & b^2+1 & b & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & b^2+1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b^2+1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b & b^2+1 \end{pmatrix}}_{n \text{ colunas}} \left. \vphantom{\begin{pmatrix} b^2+1 & b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b & b^2+1 & b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b & b^2+1 & b & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & b^2+1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b^2+1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b & b^2+1 \end{pmatrix}} \right\} n \text{ linhas}$$

6. (IME 2000)

Quatro cidades, A , B , C e D , são conectadas por estradas conforme a figura abaixo. Quantos percursos diferentes começam e terminam na cidade A , e possuem:

(a) exatamente 50 km?

(b) $n \times 10$ km?

