Material by: Caio Guimarães (Equipe Rumoaoita.com)

Aplicações 'Diferentes' Para Números Complexos
Capítulo I

Comentário Inicial

O artigo que aqui apresentamos não tem como objetivo introduzir ao leitor o assunto "números complexos". O artigo tem como objetivo aprofundar os conhecimentos de alguém que já estudou o assunto (mesmo que brevemente) abrindo os seus horizontes para novas aplicações (ou aplicações 'diferentes' como diz o título) dos números complexos.

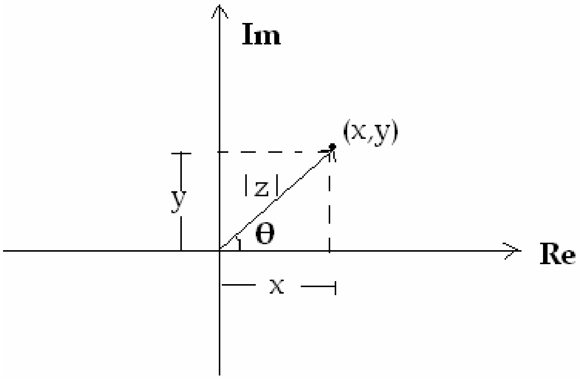
Revisão de Complexos:

A unidade complexa é definida como $i = \sqrt{-1}$ **.**

Considere o complexo $z = x + y.i \quad x, y \in \mathbb{R}$. **Definimos:**

- **Módulo (norma) de z:** $|z| = |x + y.i| = \sqrt{x^2 + y^2}$
- **Partes Real e Imaginaria de z:** $\mathbb{R}e(z) = x \qquad \operatorname{Im}(z) = y$
- **Argumento de z:** $\theta = \arg(z) = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + \mathbf{2}.k.\pi \quad k \in \mathbb{Z}$
- **Complexo conjugado de z:** $\overline{z} = x - yi$

Um número complexo pode ser representado no plano complexo como um vetor (sendo a parte real de um complexo representado no eixo horizontal e sua parte imaginária no eixo vertical). A extremidade do vetor é chamado afixo (x,y) de um complexo.



Da figura, um complexo pode ser escrito na forma trigonométrica:

$$z = |z|.(\cos\theta + i.\text{sen}\theta)$$

Notação: Usaremos no decorrer do artigo as notações:

$$cis\,\theta = \cos\theta + i.\text{sen}\theta$$

Exercícios de Revisão:

1. Prove as seguintes propriedades:

i) $z = r.\text{cis}\theta \qquad w = \rho.\text{cis}\alpha \qquad \Rightarrow z.w = (\rho.r).\text{cis}(\theta + \alpha)$

ii) $z = r.\text{cis}\theta \qquad w = \rho.\text{cis}\alpha \qquad \Rightarrow \dfrac{z}{w} = \left(\dfrac{\rho}{r}\right).\text{cis}(\theta - \alpha)$

iii) $|z| = r \qquad |w| = \rho \neq \mathbf{0} \qquad \Rightarrow \begin{cases} |z.w| = r.\rho \\ \left|\dfrac{z}{w}\right| = \dfrac{r}{\rho} \end{cases}$

iv) $z.\bar{z} = |z|^2$

v) $\bar{\bar{z}} = z$

vi) $\bar{z}_1 + \bar{z}_2 = \overline{z_1 + z_2}$

vii) $\bar{z}_1.\bar{z}_2 = \overline{z_1.z_2}$

viii) $|z| + |w| \leq |z + w|$

2. Prove por indução a lei de Moivre: $(z)^n = (r.\text{cis}\theta)^n = r^n \text{cis}(n.\theta)$ **para n natural positivo. Estenda o raciocínio para n inteiros.**

3. Mostre que: $(z)^n = 1 \Leftrightarrow z = \text{cis}\left(\dfrac{2k\pi}{n}\right)$ **para n natural, e k inteiro.**

4. Mostre que: $1 + \text{cis}\theta = 2.\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right).\text{cis}\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$

5. Utilize o resultado acima para mostrar que $\dfrac{z^n}{1+z^{2n}} \in \mathbb{R}$ **para z de módulo unitário tal que** $z^{2n} \neq -1$ **e n natural. (IME 2002)**

6. Seja $P(z) = a_0.z^n + a_1.z^{n-1} + ... + a_{n-1}.z + 1$ **um polinômio com coeficientes reais. Mostre que se x é raiz da equação P(z)=0 , então o conjugado de x também será raiz.**

7. (ITA) Sejam os números complexos distintos z e w, (onde z tem módulo unitário). Mostre que:

$$\left|\frac{z-w}{1-z.\bar{w}}\right| = 1$$

Forma Polar de Complexos:

Resultado conhecido do Cálculo Diferencial e Integral, podemos expandir funções como séries de potências de x (Expansão de Taylor):

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + - ....$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + - ....$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ...$$

Desses resultados segue que:

$$\cos x + i.\operatorname{sen} x = 1 + i.x - \frac{x^2}{2!} - i.\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - i.\frac{x^5}{5!} + - ....$$

$$e^{ix} = 1 + i.x - \frac{x^2}{2!} - i.\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - i.\frac{x^5}{5!} + - ....$$

Temos uma identidade de funções:

$$\cos x + i.\operatorname{sen} x = e^{ix}$$

Com, isso temos que todo complexo pode ser escrito na forma:

$$\boxed{z = |z|.\operatorname{cis}\theta = |z|.e^{i\theta}}$$

A demonstração da expansão da série de taylor foge aos objetivos do artigo.

Aplicação 1: Complexos em Somatórios

Binomiais:

Algo interessante que podemos retirar das propriedades de números complexos é a sua propriedade de potência. Em ciclos de 4 potências o numero complexo i se repete.

$$\begin{cases} i^0 = i^4 = i^8 = \ldots = \mathbf{1} \\ i^1 = i^5 = i^9 = \ldots = i \\ i^2 = i^6 = i^{10} = \ldots = -\mathbf{1} \\ i^3 = i^7 = i^{11} = \ldots = -i \end{cases}$$

Vamos usar esse fato para nossa vantagem.

Do desenvolvimento binomial de Newton temos:

$$(\mathbf{1}+x)^n = \mathbf{1} + C_n^{\mathbf{1}}.x + C_n^{\mathbf{2}}.x^2 + \ldots + C_n^n.x^n$$

A partir daí podemos tirar alguns resultados bastante úteis:

Fazendo x=1 **na expressão acima, temos o conhecido Teorema das Linhas do Triângulo de Pascal:**

$$\boxed{(\mathbf{1}+\mathbf{1})^n = \mathbf{1} + C_n^{\mathbf{1}} + C_n^{\mathbf{2}} + \ldots + C_n^n = \mathbf{2}^n}$$

Fazendo x=- 1**:** $\boxed{(\mathbf{1}-\mathbf{1})^n = \mathbf{1} - C_n^{\mathbf{1}} + C_n^{\mathbf{2}} + - \ldots + (-\mathbf{1})^n.C_n^n = \mathbf{0}}$

Utilizando os resultados acima é possível provar (verifique como exercício):

$$\boxed{\mathbf{1} + C_n^{\mathbf{2}} + C_n^{\mathbf{4}} + C_n^{\mathbf{6}} + \ldots = C_n^{\mathbf{1}} + C_n^{\mathbf{3}} + C_n^{\mathbf{5}} + \ldots = \mathbf{2}^{n-1}}$$

Ou seja, foi obtido facilmente, com conceitos básicos a soma binomial de combinações de n tomadas em números pares (bem como ímpares).

Será que sabemos calcular a seguinte soma?

$$1 + C_n^4 + C_n^8 + C_n^{12} + \ldots$$

Utilizando os resultados já encontrados seria interessante termos um valor para x que mude sua potência em ciclos diferentes de 2. Bom, conforme foi dito, o numero complexo i muda sua potencia em ciclos de 4. Vejamos como isso pode nos ajudar:

$$(1 + x)^n = 1 + C_n^1.x + C_n^2.x^2 + \ldots + C_n^n.x^n$$

Fazendo x = i

$$(1 + i)^n = 1 + C_n^1.i + C_n^2.i^2 + C_n^2.i^3 + \ldots$$
$$= \left(1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + C_n^8 - + \ldots\right) + i.\left(C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + - \ldots\right)$$

Da expressão acima tiramos dois resultados úteis:

$$\begin{cases} \mathbb{R}e(1 + i)^n = \left(1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + C_n^8 - + \ldots\right) \\ \mathrm{Im}(1 + i)^n = \left(C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + - \ldots\right) \end{cases}$$

Uma vez que: $(1 + i)^n = \left(\sqrt{2}.\mathrm{cis}\dfrac{\pi}{4}\right)^n \underset{\text{Moivre}}{=} \left(\sqrt{2}^n.\mathrm{cis}\dfrac{n\pi}{4}\right)$**, temos:**

$$\begin{cases} \mathbb{R}e(1 + i)^n = 2^{\frac{n}{2}}.\cos\left(\dfrac{n\pi}{4}\right) \\ \mathrm{Im}(1 + i)^n = 2^{\frac{n}{2}}.\mathrm{sen}\left(\dfrac{n\pi}{4}\right) \end{cases}$$

E com isso temos mais duas somas binomiais importantes:

$$\boxed{\begin{cases} \left(1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + C_n^8 - + \ldots\right) = 2^{\frac{n}{2}}.\cos\left(\dfrac{n\pi}{4}\right) \\ \left(C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + - \ldots\right) = 2^{\frac{n}{2}}.\mathrm{sen}\left(\dfrac{n\pi}{4}\right) \end{cases}}$$

Ora, uma vez que conhecemos:

$$\left(1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + C_n^8 - + \dots\right) = 2^{\frac{n}{2}}.\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$

$$1 + C_n^2 + C_n^4 + C_n^6 + \dots = 2^{n-1}$$

Somando ambos as expressões, chegamos ao resultado (verifique):

$$\boxed{1 + C_n^4 + C_n^8 + C_n^{12} + \dots = 2^{n-2} + 2^{\left(\frac{n}{2}-1\right)}.\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)}$$

Usando um raciocínio análogo, utilize os resultados já obtidos para obter:

$$\boxed{C_n^1 + C_n^5 + C_n^9 + \dots = 2^{n-2} + 2^{\left(\frac{n}{2}-1\right)}.\text{sen}\left(\frac{n\pi}{4}\right)}$$

Exercício: **Obter uma expressão reduzida para os seguintes somatórios:**

a) $C_n^3 + C_n^7 + C_n^{11} + \dots$

b) $C_n^2 + C_n^6 + C_n^{10} + \dots$

Exercício Resolvida:

(IME 2005) Determine uma expressão reduzida para o somatório:

$$C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + C_n^9 + \ldots$$

Solução:
Acabamos de trabalhar com somatórios binomiais com combinações tomadas em números repetindo em ciclos de 4. A questão proposta pelo IME é um somatório binomial com combinações tomadas em números repetindo em ciclos de 3.

Procuramos algo que repita sua potência da seguinte maneira:

$$x^0 = x^3 = x^6 \ldots$$

Do raciocínio acima, queremos x do tipo:

$$\mathbf{1} = x^3 \;\Rightarrow\; x = \text{cis}\left(\frac{\mathbf{2k\pi}}{\mathbf{3}}\right)$$

Usaremos o binomial de Newton para $x = \text{cis}\left(\frac{\mathbf{2k\pi}}{\mathbf{3}}\right)$:

$$\left(\mathbf{1} + \text{cis}\left(\frac{\mathbf{2\pi}}{\mathbf{3}}\right)\right)^n = \mathbf{1} + C_n^1.\text{cis}\left(\frac{\mathbf{2\pi}}{\mathbf{3}}\right) + C_n^2\left(\text{cis}\left(\frac{\mathbf{2\pi}}{\mathbf{3}}\right)\right)^2 + C_n^3.\left(.\text{cis}\left(\frac{\mathbf{2\pi}}{\mathbf{3}}\right)\right)^3 + \ldots$$

Da forma de Moivre: $\left(\text{cis}\left(\frac{\mathbf{2\pi}}{\mathbf{3}}\right)\right)^n = \left(\text{cis}\left(\frac{\mathbf{n.2\pi}}{\mathbf{3}}\right)\right)$

Logo:

$$\left(\mathbf{1} + \text{cis}\left(\frac{\mathbf{2\pi}}{\mathbf{3}}\right)\right)^n = \mathbf{1} + C_n^1.\text{cis}\left(\frac{\mathbf{2\pi}}{\mathbf{3}}\right) + C_n^2.\text{cis}\left(\frac{\mathbf{4\pi}}{\mathbf{3}}\right) + C_n^3.\text{cis}\left(\frac{\mathbf{6\pi}}{\mathbf{3}}\right) + \ldots$$

$$= \mathbf{1} + C_n^1.\left(-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} + i.\frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}\right) + C_n^2.\left(-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} - i.\frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}\right) + C_n^3.(\mathbf{1}) + \ldots$$

$$= \left(\mathbf{1} - \frac{C_n^1}{\mathbf{2}} - \frac{C_n^2}{\mathbf{2}} + C_n^3 - \frac{C_n^4}{\mathbf{2}} - \frac{C_n^5}{\mathbf{2}} + - \ldots\right) + i.\left(\frac{C_n^1.\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}} - \frac{C_n^2\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}} + \frac{C_n^4.\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}} - \frac{C_n^5\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}} + - \ldots\right)$$

Lembrando que: $\left(1+\text{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)^n=\left(1-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^n=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^n=\text{cis}\left(\frac{n\pi}{3}\right)$

Das expressões acima:

$$\text{(i)}\ \ \mathbb{R}\text{e}\left(1+\text{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)^n=\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)=1-\frac{C_n^1}{2}-\frac{C_n^2}{2}+C_n^3-\frac{C_n^4}{2}-\frac{C_n^5}{2}+-\ldots$$

$$\text{(ii)}\ \ \text{Im}\left(1+\text{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)^n=\text{sen}\left(\frac{n\pi}{3}\right)=\frac{C_n^1.\sqrt{3}}{2}-\frac{C_n^2\sqrt{3}}{2}+\frac{C_n^4.\sqrt{3}}{2}-\frac{C_n^5\sqrt{3}}{2}+-\ldots$$

Do Teorema das Linhas:

$$C_n^1+C_n^2+C_n^3+\ldots+C_n^n=2^n \qquad \text{(iii)}$$

Fazendo 2.(i) + (iii)

$$\left(2-C_n^1-C_n^2+2C_n^3-C_n^4-C_n^5+-\ldots\right)+C_n^1+C_n^2+C_n^3+\ldots+C_n^n=2^n+2\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow\ 3.\left(1+C_n^3+C_n^6+C_n^9+\ldots\right)=2^n+2\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$$

Segue que:

$$\boxed{1+C_n^3+C_n^6+C_n^9+\ldots=\frac{2^n+2\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{3}}$$

Exercícios de Fixação:

1. (IME 2005) Determine uma expressão reduzida para o somatório :

$$C_n^1 + C_n^4 + C_n^7 + C_n^{10} + \ldots$$

OBS: É o item b da questão resolvida acima. Utilize um raciocínio rigorosamente análogo.

2. Determine uma expressão reduzida para o somatório:

$$1 + C_n^1.\text{senx} + C_n^2.\text{sen}(2x) + C_n^3.\text{sen}(3x) + \ldots + C_n^n.\text{sen}(nx)$$

Sugestão: Utilize o resultado do exercício 4 da parte de Revisão de Complexos.

3. Determine uma expressão reduzida para os somatórios

$$\text{senx} + \text{sen}(2x) + \text{sen}(3x) + \text{sen}(4x) + \ldots + \text{sen}(n.x)$$
$$\cos x + \cos(2x) + \cos(3x) + \cos(4x) + \ldots + \cos(n.x)$$

4 Se n = 1, 2, 3, ..., prove que:

$$\cos\frac{2\pi}{n} + \cos\frac{4\pi}{n} + \cos\frac{6\pi}{n} + \ldots + \cos\frac{2(n-1)\pi}{n} = -1$$
$$\text{sen}\frac{2\pi}{n} + \text{sen}\frac{4\pi}{n} + \text{sen}\frac{6\pi}{n} + \ldots + \text{sen}\frac{2(n-1)\pi}{n} = 0$$

Sugestão: Lembre da expressão para somas de progressões geométricas.

5. Prove que para n= 2, 3 ,...

$$\left(\text{sen}\frac{\pi}{n}\right)\left(\text{sen}\frac{2\pi}{n}\right)\left(\text{sen}\frac{3\pi}{n}\right)\ldots\left(\text{sen}\frac{(n-1)\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}$$