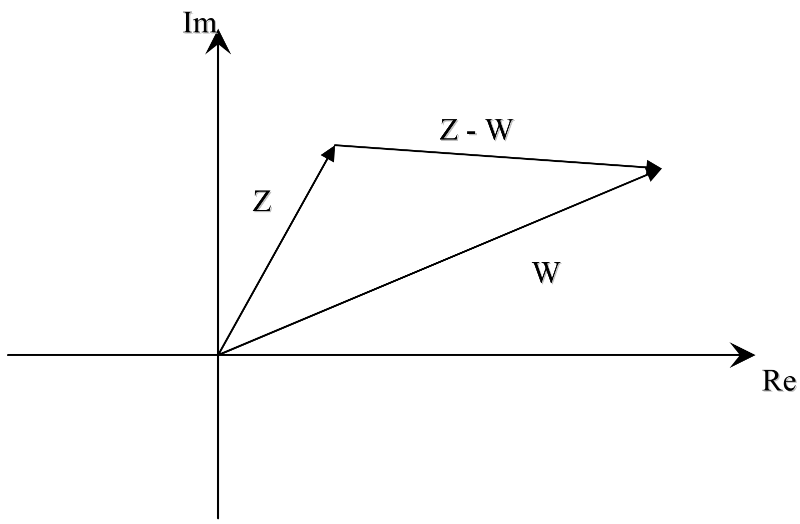
Material by: Caio Guimarães (Equipe Rumoaoita.com)

Aplicações 'Diferentes' Para Números Complexos
Capítulo II

Aplicação 2: Complexos na Geometria

Na rápida revisão do capítulo I desse artigo mencionamos que todo complexo possui representação trigonométrica baseado na geometria de sua representação no plano complexo.

Distância entre Dois Complexos:

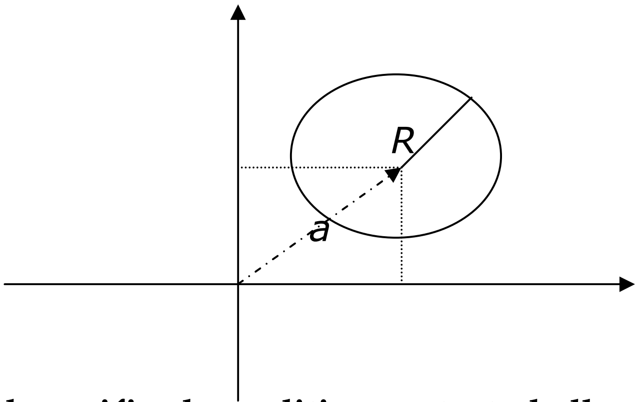


Do conceito de subtração vetorial, na figura acima é fácil observar que a distancia entre os afixos de dois complexos Z e W é dada pelo tamanho do vetor Z – W. Ou seja $d(Z,W)=|Z-W|$

Essa simples análise nos permite interpretar geometricamente as imagens de diversos conjuntos no plano complexo.

Exemplo 1: Circunferência no Plano Complexo:

O conjunto dado por: $\{z : |z-a| = R \quad , \ a \in C, \ R \text{ real}\}$ **é o conjunto de todos os pontos tais que suas distancias ao complexo a é constante e vale R. O lugar geométrico descrito é exatamente a definição de uma circunferência de centro a e raio R.**



Isso poderia ter sido verificado analiticamente, trabalhando com a expressão z = x + yi , onde x e y são as coordenadas reais de z no plano complexo.

$$z = x + yi \quad \therefore \quad |z-a| = |(x-x_a) + i.(y-y_a)| = \sqrt{(x-x_a)^2 + (y-y_a)^2}$$

$$\Rightarrow \quad |z-a| = R$$

$$\Leftrightarrow \quad (x-x_a)^2 + (y-y_a)^2 = R^2$$

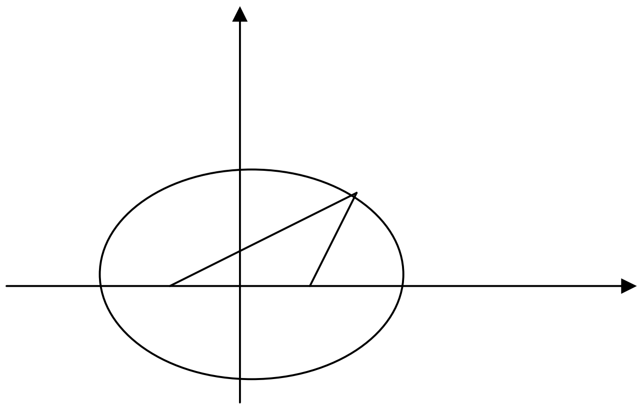
O que nos dá exatamente a equação analítica de uma circunferência de centro (x_a , y_a) e raio R.

Exemplo 2: Elipses e Hipérboles no Plano Complexo:

Considere os conjuntos dados por:

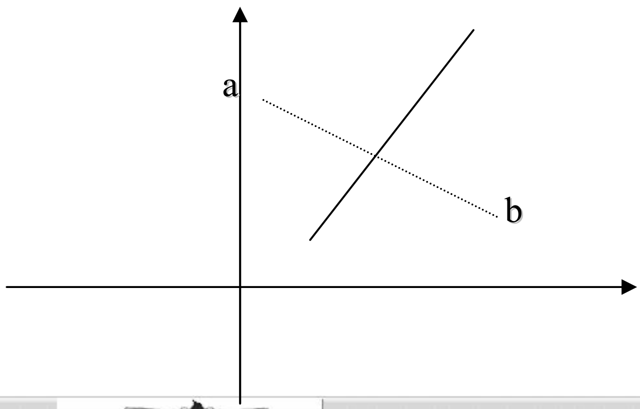
$\{z : |z-\mathbf{1}|+|z+\mathbf{1}|=\mathbf{4}\}$ e $\{z : ||z-\mathbf{1}|-|z+\mathbf{1}||=\mathbf{1}\}$

Representam, respectivamente, todos os pontos tais que a soma de suas distancias a dois pontos fixos é constante 4; e todos os pontos tais que o módulo das diferenças de suas distâncias a dois pontos fixos é constante e vale 1. Os lugares geométricos descritos são exatamente as definições de elipse e hipérbole respectivamente com focos nos complexos (1,0) e (-1,0).



Exemplo 3: Retas

O conjunto dado por $\{z : |z-a|=|z-b| \quad ; \ a,b \in C\}$ **representa todos os pontos tais que a sua distancia ao complexo a é igual à sua distancia ao complexo b. O lugar geométrico acima é exatamente a definição de uma reta mediatriz do segmento que liga a e b.**



Questão Contextualizada Resolvida:

(ITA) Mostre que as imagens dos complexos z tais que:
$(z-1)^5 = z^5$ **estão em linha reta paralela ao eixo imaginário.**

Solução:
Como o módulo de um complexo é sempre um número positivo, da igualdade dada no enunciado segue que:

$$|z-1| = |z|$$

Ou seja, z pertence à reta mediatriz do segmento que liga os pontos (0,1) e (0,0); isto é, z pertence à reta x = ½ do plano complexo. CQD

Exercício de Fixação:

1. Dê o esquema da representação geométrica no plano complexo dos seguintes conjuntos:

a) $\{z : |z-1| + |z+1| = 1\}$
b) $\{z : |z-1| - |z+1| = 1\}$
c) $\{z : |z-1| = |z+i|\}$
d) $\{z : |z-2+3i| \leq 4\}$
e) $\{z : |z-2+3i| > 4\}$
f) $\{z : 6 > |z| > 4\}$
g) $\{z : |z-1| + |z+1| = 2\}$
h) $\{z : |z-1|.(4-|z-3|) = 0\}$

2. (ITA 2003) Determine o conjunto dos números complexos z par os quais o número w pertence ao conjunto dos Reais. Interprete (ou esboce) o conjunto geometricamente.

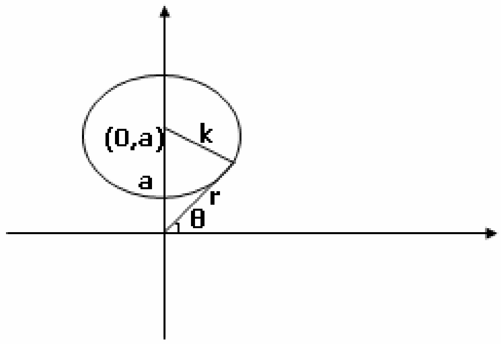
$$\omega = \frac{z+\overline{z}+2}{\sqrt{|z-1|+|z+1|-3}}$$

Muitas vezes um problema de números complexos se complica pelo excesso de 'álgebra' que se encontra na sua resolução. Muitos desses problemas podem ser simplificados ao o tratarmos por sua geometria. Veja os exemplos resolvidos a seguir:

Exemplo 1:

(ITA) Considere o conjunto dos complexos z tais que $|z-a| = k$, onde a e k são constantes reais positivas tais que a > k . Determine o complexo z pertencente à imagem desse conjunto com o menor argumento.

Solução:



A representação geométrica do conjunto no plano complexo é a mostrada ao lado. Note que as imagens de z percorrem a circunferência ilustrada, e para que z tenha argumento mínimo z deve ser tal que seu vetor representante é tangente à circunferência.

Do triangulo retângulo formado segue: $a^2 = r^2 + k^2 \quad \therefore \quad r = \sqrt{a^2 - k^2}$

Da geometria do problema é fácil verificar que: (verifique)

$$\cos\theta = \frac{k}{a} \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{r}{a} = \frac{\sqrt{a^2-k^2}}{a}$$

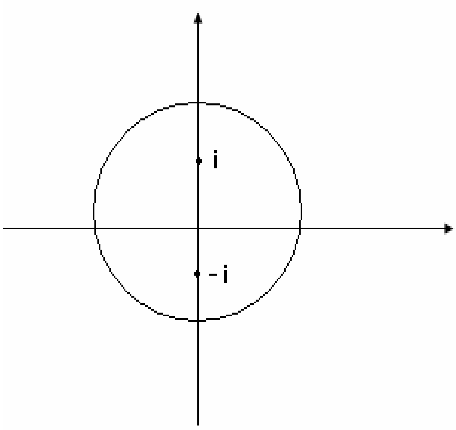
Logo o complexo de argumento mínimo será:

$$z = r.\operatorname{cis}\theta = \sqrt{a^2-k^2}.\left(\frac{k}{a} + i.\frac{\sqrt{a^2-k^2}}{a}\right) \quad \therefore \boxed{z = \sqrt{\mathbf{1} - \left(\frac{k}{a}\right)^2} + i.\left(\frac{a^2-k^2}{a}\right)}$$

Exemplo 2:

Seja A o conjunto dos complexos z tais que $|z| = 2$. Determine o valor máximo da expressão: $\left|\frac{z-i}{z+i}\right|$

Solução:



A representação geométrica do conjunto A no plano complexo é a mostrada ao lado.

Note que:

$\left|\frac{z-i}{z+i}\right| = \frac{|z-i|}{|z+i|}$ representa a razão entre duas distancias.

A razão será máxima quando o numerador for máximo e quando o denominador for mínimo. Isto é, quando a distancia de z até o ponto (0,1) for máxima e a distancia até o ponto (0,-1) for mínima.

Geometricamente, fica evidente que isso acontece quando z está no ponto (0,-2). Ou seja, isso ocorre para z=-2i

$$\boxed{\left|\frac{z-i}{z+i}\right|_{max} = \left|\frac{-2i-i}{-2i+i}\right| = \left|\frac{-3i}{-i}\right| = 3}$$

Exercício de Fixação:

Considere o conjunto dos complexos z tais que $|z - 2 + 3i| = 1$.
Determine o valor do complexo z pertencente a esse conjunto que possua : (a) módulo mínimo (b) módulo máximo.

Raízes da unidade:

Já foi discutido no primeiro capítulo que as raízes n-ésimas da unidade são dadas por: $z_k = \text{cis}\dfrac{2k\pi}{n}$.

Podemos ainda representar essas raízes por:

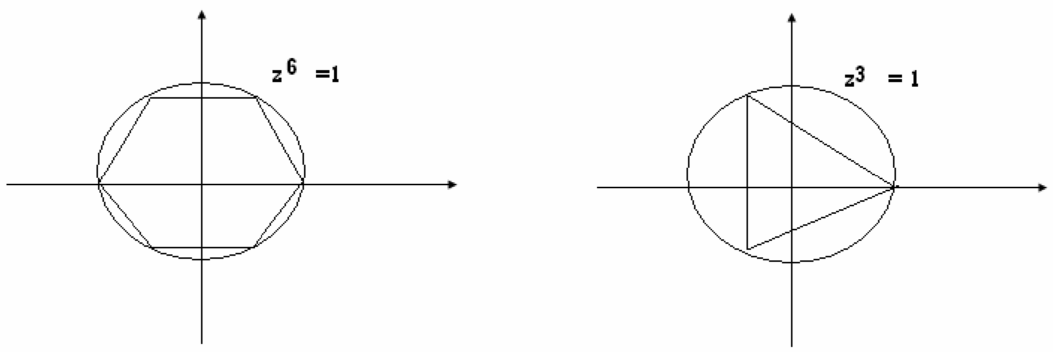
$$z_k = e^{i.\left(\frac{2k\pi}{n}\right)} = \left\{1, e^{i\pi/n} ; e^{i2\pi/n} ; e^{i3\pi/n} ; \ldots ; e^{i(n-1)\pi/n}\right\}$$

É valido notar também que, chamando $w = e^{i\pi/n}$ **, as raízes da equação nos complexos,** $z^n = 1$, **serão:** $1, w, w^2, w^3, \ldots, w^{n-1}$

Das conhecidas relações de Girard, podemos obter uma expressão para a soma das raízes:

$$1 + w + w^2 + w^3 + \ldots + w^{n-1} = 0$$

É fácil ver que todas as raízes da equação, se representadas no plano complexo, se encontrarão sobre uma circunferência centrada na origem com raio unitário, formando um polígono de n lados. Do fato de que a soma das raízes é nula, temos que todos os vetores (representantes de cada raiz) deverão se anular. Segue então que o polígono formado pelas raízes n-ésimas da unidade será sempre regular.



Exercício Resolvido:

Considere z como sendo raiz da equação nos complexos $w^3=1$.
Determine o valor da soma: $z+z^2+z^3$

Solução:

Podemos verificar que:

$$z+z^2+z^3=z.\underbrace{(\mathbf{1}+z+z^2)}_{=0}=\mathbf{0} \quad z+z^2+z^3=z.\underbrace{(\mathbf{1}+z+z^2)}_{=0}=\mathbf{0}$$

Aplicação com Vetores

A representação vetorial de um complexo nesse momento já deve ser algo natural para o leitor. Aproveitemos disso para resolver alguns problemas de análise vetorial de uma maneira um pouco diferente da convencional.

Rotação:

Conforme visto no primeiro capítulo, a multiplicação de complexos se procede da seguinte maneira:

$$(r.\text{cis}\alpha).(s.\text{cis}\beta)=r.s.\text{cis}(\alpha+\beta)$$

Podemos entender a multiplicação de um z por um outro complexo (de modulo r e argumento α) multiplica o seu módulo original por r, e rotaciona (no sentido trigonométrico) sua posição de α no plano complexo.
Ou seja:

Rotação de um complexo z de um ângulo θ (sentido trigonométrico), gerando um novo complexo z´:

$$z' = z.\text{cis}\theta$$

Rotação de um complexo z de um ângulo de 90 graus, gerando um novo complexo z´:

$$z' = z.\text{cis}\frac{\pi}{\mathbf{2}} = i.z$$

Translação:

A soma de um complexo z por um dado outro complexo implicará na translação do complexo original. Vejamos isso através de um exemplo:

$$\begin{cases} z = 2 + i \\ w = 3 + 4i \end{cases} \Rightarrow z' = z + w = 5 + 5i$$

Ou seja a transformação soma de z por w transladou o complexo z de 3 unidades para a direita e 4 para cima no plano complexo.

Questão Contextualizada Resolvida:

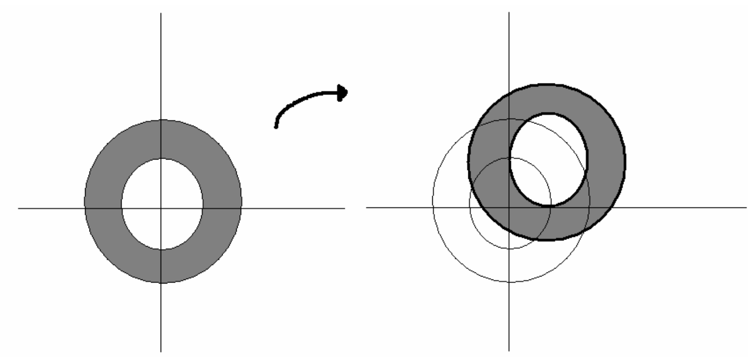
1. (IME) Considere a imagem z do conjunto: $\{z : 1 \leq |z| \leq 2\}$.

Represente geometricamente o conjunto de imagens complexas w tais que:

$w = i.z + 1 + i$

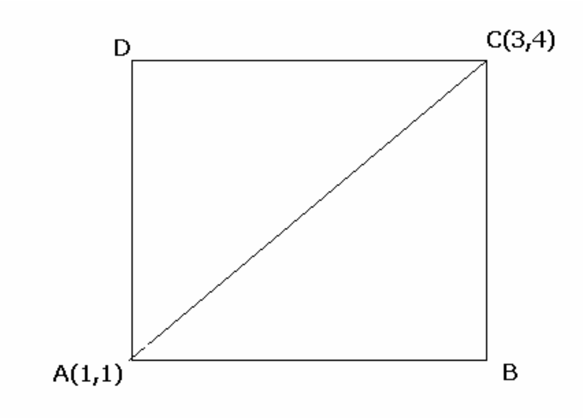
Solução:

O conjunto original trata-se de um anel circular de centro na origem do plano complexo. A multiplicação desse conjunto por i implica na rotação do conjunto sobre si mesmo (o que não alterará sua representação geométrica). A soma com (1+i) translada o conjunto de 1 unidade para direita e uma unidade para cima no plano complexo. Sendo assim w é uma imagem pertencente ao mesmo anel transladado de seu centro ao ponto (1,1).



2. (ITA) Considere o quadrado ABCD, de diagonal AC definida pelos pontos (1,1) e (3,4). Determine as coordenadas dos demais vértices do quadrado.

Solução:
Note que o vetor BC é dado pela rotação do vetor AB de 90 graus no sentido trigonométrico. Ou seja: $\overrightarrow{BC} = i.\overrightarrow{AB}$



$$C - B = i.(B - A)$$
$$\Rightarrow\ 3 + 4i - B = i.B - i.(1 + i)$$
$$\Rightarrow 3 + 4i + i - 1 = B.i + B$$
$$\Rightarrow\ 2 + 5i = B.(1 + i)$$
$$\Rightarrow\ B = \frac{2 + 5i}{1 + i} = \frac{7 + 3i}{2}$$
$$\Rightarrow\ B = \left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

As coordenadas de B são dadas por: $\left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

Procedendo da mesma forma: $D = \left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$.

Exercícios de Fixação:

1. No conjunto das imagens de w (do exercício 1 – questões contextualizadas resolvidas acima), determine:

(i) o complexo com maior argumento.

(ii) o complexo com o maior módulo.

2. Considere o polígono regular de n lados cujos vértices são dados por $A_0, A_1, A_2, \ldots A_{n-1}$. **Determine o valor da soma:**

$$\overline{A_0 A_1} + \overline{A_0 A_2} + \overline{A_0 A_3} + \ldots + \overline{A_0 A_{n-1}}$$

3. Determine dois possíveis vértices C para o triangulo eqüilátero ABC cujo lado AB é definido pelos vértices: B=(2,3) , C = (-1,0).

4. Considere o polígono regular de n lados (n par), inscrito numa circunferência de raio 1, cujos vértices são dados por $A_1, A_2, \ldots A_n$. **Seja P um ponto qualquer desta circunferência distinto dos vértices deste polígono. Calcule a soma S dada por**

$$\overline{PA_1}^2 + \overline{PA_2}^2 + \overline{PA_3}^2 + \ldots + \overline{PA_n}^2$$

5. Considere o conjunto S dado por:

$$S = \left\{ z \ : \ -\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{4} \ , \ 1 < |z| < 2 \ , \ \operatorname{Im}(z) > 0 \right\}$$

Determine geometricamente o conjunto das imagens de:
z.(1+i) + 3 onde z é uma imagem de S.

6. Seja z um complexo tal que $|z-1| = 1$, **e considere os complexos v e w tais que:** $w = z^2 - z$ e $\arg v = \frac{2}{3} \arg w$

Prove que: $\left(\frac{u.v}{w} \right)^2 \in \mathbb{R}$