

Professor: Filipe Rodrigues – www.rumoaioita.com

Simulado 1 – Estilo IME

Comunidade: PROJETO IME/ITA/EN/AFA

Questão 1

Seja $P(x) = x^{2007} + x^{2006}(1+x) + x^{2005}(1+x)^2 + \dots + x(1+x)^{2006} + (1+x)^{2007}$. Determine o coeficiente do termo em x^{500} de $P(x)$.

Questão 2

Seja a seqüência de números racionais, cuja lei recorrente é dada por $v_n = 6v_{n-1} - 9v_{n-2}$ sendo dados os valores iniciais v_0 e v_1 . Definimos $v_n = 3^n u_n$. Determine:

a) uma expressão para as seqüências $\{v_n\}$ e $\{u_n\}$ em função de n , u_0 e u_1 .

b) Identificar as seqüências $\{v_n\}$ e $\{u_n\}$ para o caso particular de $v_0 = \frac{1}{3}$ e $v_1 = 1$.

Questão 3

Seja o valor de $\log 2 = a$ e $\log 3 = b$, determine o valor do logaritmo do número $\sqrt[5]{11,25}$ na base 15.

Questão 4

Dadas as retas de equação $3x + 4y - 7 = 0$ e $-5x + 12y = 0$. Determine as equações das bissetrizes interna e externa relativas às retas dadas. Mostre que são perpendiculares.

Questão 5

(i) Determinar a soma de todas as soluções reais da equação $\tan(8x) + \cot(8x) = 2 \cos(2x)$, com $0 < x < \frac{\pi}{16}$.

(ii) Calcule o valor de $\prod_{k=0}^n \cos(2^k x)$.

Questão 6

Sabe-se que muitas estruturas sólidas possuem átomos que estão organizados formando sólidos geométricos simples. Uma estrutura conhecida é a Cúbica de Face Centrada, em que os átomos se encontram nos vértices de um cubo imaginário, bem como no centro das faces desse mesmo cubo. Visto que cada átomo de centro de face tangencia os átomos de seus vértices constituintes, determine o fator de empacotamento dessa estrutura.

Obs.: Define-se como fator de empacotamento a razão entre o volume do cubo ocupado pelos átomos e o volume total do cubo.

Questão 7

Prove que $(a+b+c)^{3333} - a^{3333} - b^{3333} - c^{3333}$ é divisível por $(a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3$.

Questão 8

Resolva a equação $x^2 - 2ax + 1 - a = \sqrt{a^2 + x - 1}$ (soluções reais) e determine os valores de a para que essas soluções existam.

Questão 9

Seja uma função $f : A \mapsto B$ com concavidade voltada para baixo, tal que $[a, b] \subset A$.

Prove que $\forall \{x, y, z\} \subset [a, b]$, $f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) \geq \frac{f(x) + f(y) + f(z)}{3}$.

Questão 10

Seja A uma matriz tal que $A^3 = I$. Mostre que a matriz $A^5 + A + I$ pode ser escrita sob a forma $(aA^2 + bA + cI)(dA^3 + eA^2 + fA + gI)$. Determine $a + b + c + d + e + f + g$.