Simulado – Matemática

1) Seja o polinômio $P(x) = x^8 - x^5 + x^2 - x$**. Prove que todas as raízes de** $P(x)+1$ **são complexas conjugadas com parte imaginária e parte real.**

2) Determinar todos os pares (x, y) tal que a igualdade abaixo seja verificada.
$\log(tg(xy)) + \log_{tg(xy)}(10) = -(1-\log(y-\pi))^2 + \log_2(\log_3(\log_{y^3} y^{243})$

3) a) Sejam A e B conjuntos contidos em um universo U. Utilize as propriedades de União, Intersecção e Complementar, ou ainda, álgebra booleana, para provar que $\left((A \cap B)^C \cap \left(A \cup B^C\right)\right)^C = B$**.**
OBS.: Não será aceita a solução gráfica (diagrama de Venn - Euler).

b) Prove que o cardinal do conjunto "'partes' de A" (para um conjunto A cujo cardinal é n) equivale a 2^n**.**

4) Seja um alfabeto com quatro caracteres {a, b, c, d}.
a) Quantas palavras de tamanho "n" podem ser formadas com as letras desse alfabeto, em que a letra "a" figura um número ímpar de vezes?
b) Generalize o problema para um alfabeto de "k" caracteres {1, 2, 3, ..., k}, em que o número 3 figura um número ímpar de vezes.

5) Seja a elipse E **de equação** $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$**. Por um ponto P dessa elipse, traçamos a reta normal** $\vec{n}$**. Pelo ponto Q, de intersecção de** $\vec{n}$ **com o eixo Ox, traçamos a reta** $\overleftarrow{t}$ **, perpendicular à** $\vec{n}$**. A intersecção de** $\overleftarrow{t}$ **com o eixo Oy chamamos de R. Determine o lugar geométrico dos pontos do plano formado pelos baricentros dos triângulos** ΔPQR**.**
Obs: Entende-se por reta normal, a reta perpendicular à reta tangente, passando pelo ponto de tangência.

6)Seja a função F, definida por F:[0,1]->[0,1]
$$F(x) = \begin{cases} x, x \in [0,1] \cap Q \\ 1-x, x \in [0,1] - Q \end{cases}$$
Pede-se mostrar, que para todos x,y pertencentes ao intervalo [0,1], tem-se que:

- **i) FoF(x) = x**
- **ii) F(x) + F(1-x)=1**
- **iii) F(x+y) – (F(x) + F(y))**

7) Seja A uma matriz de ordem n, tal que $A^4 = tA$**, com** $t \in \Re$ **tal que** $t^2 \neq 1$**. Mostre que a matriz** $A^2 - I$ **é inversível.**

8) Sejam a, b, c números reais tais que $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{b+a}=1$**. Com essa informação, calcule o valor de** $\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{a+c}+\frac{c^2}{b+a}$ **.**

9)Determine o valor da soma: $C_n^0+C_n^1.sen\alpha+C_n^2.sen2\alpha+...+C_n^n.sen(n\alpha)$

10)*ABCD* é um quadrilátero convexo e inscritível e *M* é um ponto sobre o lado *CD*, tal que o triângulo *ADM* e o quadrilátero *ABCM* têm a mesma área e o mesmo perímetro. Prove que *ABCD* tem dois lados de comprimentos iguais.