4º Simulado – Comunidade IME/ITA/EN/AFA
Estilo IME

Questão 1: Determine quantos Zeros há em 1000!.

Questão 2: Mostre que o número $x=\sqrt[3]{3+\sqrt{9+\frac{125}{27}}}-\sqrt[3]{-3+\sqrt{9+\frac{125}{27}}}$ é racional.

Questão 3: Prove que $(a+b)(a+c)\geq 2\sqrt{abc(a+b+c)}$ para quaisquer números reais positivos *a,b,c*.

Questão 4: Seja uma elipse centrada na origem e com eixo focal coincidente com o eixo Ox. Seja a parábola definida por: $\begin{cases} \vec{d}: y=m(x+c) \\ F(c,0) \end{cases}$. Dado que um dos pontos de intersecção da parábola com a elipse é o ponto $P(a,0)$ e que o outro ponto de intersecção tem ordenada positiva. É dada a excentricidade da elipse como sendo $e=\frac{c}{a}$. Calcule o valor de m em função da excentricidade "*e*".

Questão 5:
1º parte: Simplifique a expressão $\frac{sen a+sen3a+sen5a+...+sen2005a}{\cos a+\cos 3a+\cos 5a+...+\cos 2005a}$.

2º parte: Calcule a soma das soluções da equação
$\cos\sec 13x+sen13x=2\cos 3x$, com $0\leq x\leq\frac{\pi}{2}$.

Questão 6:
1º Parte: Seja *N*, natural tal que $N=1^{2005}+2^{2005}+3^{2005}+4^{2005}+...+10^{2005}+1$. Determinar o algarismo das unidades de *N*.

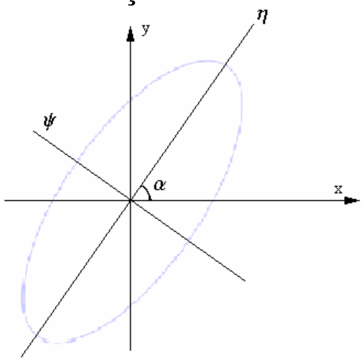
2º Parte: Sejam C_0, C_1, C_2, C_3 números reais. Sabendo que $e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...$, calcule S, dado pela expressão: S = $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_0+C_1n+C_2n^2+C_3n^3}{n!}$.

Questão 7: Seja um triângulo acutângulo ABC. Sejam, H_A, H_B e H_C os pés das alturas relativas aos vértices A, B e C respectivamente. Sejam M, N e Q, os pontos médios dos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$, respectivamente. Sejam os pontos R, S e T, os pontos médios dos segmentos HA, HB e HC, respectivamente, em que H é o ortocentro do triângulo ABC. Prove que H_A, H_B, H_C, M, N, Q, R, S e T pertencem à mesma circunferência.

Questão 8: Uma cônica qualquer é tida pela equação genérica $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$. Quando uma equação de uma cônica possui o termo em xy, essa se encontra rotacionada de um certo ângulo α em relação à horizontal. No entanto existe outro par de eixos "ηOψ" em que o eixo principal dessa cônica é paralelo a um dos eixos, assim a sua nova equação (agora em função de η e ψ) é dada por: $A_1\eta^2 + B_1\psi^2 + D_1\eta + E_1\psi + F_1 = 0$.

a) Encontre as expressões de A_1, B_1, D_1, E_1, F_1 e α em função de *A, B, C, D, E* e *F*.

b) Encontre a equação da cônica rotacionada de equação $xy = 1$ em função de η e ψ, bem como o seu ângulo de rotação.



Dado: $\begin{cases} y = \eta sen\alpha + \psi \cos\alpha \\ x = \eta \cos\alpha - \psi sen\alpha \end{cases}$

Questão 9:

1 º parte: Prove que qualquer função pode ser escrita como a soma de uma função par como uma função ímpar.

2º parte: Determinar todos os valores reais que satisfazem a equação $x^2 - 3x + 1 = \dfrac{3 + \sqrt{5 + 4x}}{2}$.

Questão 10: Seja uma pirâmide V-ABCD com faces laterais congruentes às do tetraedro regular V-BCE. Determine o número de faces do poliedro formado.