

Professor: Filipe Rodrigues – www.rumoaota.com

Simulado 2 – Estilo IME

Comunidade: PROJETO IME/ITA/EN/AFA

Questão 1

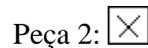
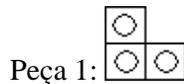
Sejam as retas $\vec{r}: y - 2x - 2 = 0$ e $\vec{s}: 2y - x + 2 = 0$. Determine o lugar geométrico dos pontos do plano tais que o produto das distâncias de qualquer ponto desse LG às retas \vec{r} e \vec{s} é igual ao quadrado da distância à reta dos quadrantes pares.

Questão 2

Determine o resto da divisão do inteiro $\sum_{k=1}^{2006} (k^2 + 3k + 1)k!$ por 2006.

Questão 3

Considere um tabuleiro retangular de dimensões $2 \times n$. Dispomos de dominós com as seguintes configurações:



De quantas maneiras se pode cobrir o tabuleiro dispondo apenas das peças 1 e 2.

Obs.: Duas peças distintas (de qualquer tipo) não podem se superpor.

Questão 4

Sejam a e b números reais positivos e diferentes de um. Seja o sistema abaixo:

$$\begin{cases} a^x \cdot b^{\frac{1}{y}} = \sqrt{ab} \\ 2 \log_a(x) = \log_{\frac{1}{b}}(y) \cdot \log_{\sqrt{a}}(b) \end{cases}$$

Determine os valores de x e y .

Questão 5

Prove que se n é um número natural par, a parte inteira de $(1 + \sqrt{3})^n$ é ímpar.

Questão 6

Resolva a equação $\sin^3(3x) + \cos^3(3x) = 1$. Determinar todas as soluções reais.

Questão 7

Seja o polinômio $P(x) = x^3 + 3x^2 - x + 1$ de raízes a , b e c .

(i) Determine o valor de $a^4 + b^4 + c^4$.

(ii) Determine S tal que $S = \frac{1}{a^2 - 6a + 9} + \frac{1}{b^2 - 6b + 9} + \frac{1}{c^2 - 6c + 9}$.

Questão 8

Sabe-se que uma PA de segunda ordem $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ é aquela que obedece a seguinte relação: $\forall k \in \{1, 2, 3, \dots, n-1\}, a_{k+1} - a_k = b_k$, em que $\{b_1, b_2, \dots, b_{n-1}\}$ é uma PA de primeira ordem.

(i) Deduza uma expressão para o termo geral da PA de segunda ordem em função de n , b_1 , a_1 e a razão r da PA de primeira ordem.

(ii) Deduza uma expressão para a soma dos n primeiros termos de uma PA de segunda ordem, em que o resultado é expresso em função de n , b_1 , a_1 e a razão r da PA de primeira ordem.

Questão 9

Seja a expressão $(a+b)^3 - 3ab(a+b) - (a^3 + b^3) = 0$. Sabe-se ainda que, em se conhecendo o produto P e a soma S de dois números quaisquer, se pode determiná-los montando uma equação do segundo grau do tipo $x^2 - Sx + P = 0$. Com base nessas informações, determine, em função de p e q , uma solução para equações do terceiro grau do tipo $y^3 + py + q = 0$.

Questão 10

Mostre que não existem matrizes quadradas A e B de ordem n , tal que $AB - BA = I$, em que I é a matriz identidade de ordem n .