

Simulado 1 – Matemática – IME – 2012

01 – Seja A um conjunto com n elementos e B um subconjunto de A com $m \geq 1$ elementos. Encontre o número de funções $f: A \rightarrow A$ tal que $f(B) \subseteq B$.

02 – Prove que para todo inteiro n, o número

$$\frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} + \frac{7x}{15}$$

é um número inteiro.

03 – Encontre todas as triplas ordenadas (x, y, z) de reais que são soluções para o sistema de equações:

$$\begin{aligned} \frac{4x^2}{4x^2 + 1} &= y, \\ \frac{4y^2}{4y^2 + 1} &= z, \\ \frac{4z^2}{4z^2 + 1} &= x. \end{aligned}$$

04 – As raízes do polinômio $P(x) = x^3 - 10x + 11$ são a, b e c. Determine o valor de $\arctg a + \arctg b + \arctg c$.

05 – Se A e B lançam respectivamente $n + 1$ e n moedas não-viciadas, qual é a probabilidade P_n de que A obtenha mais “caras” do que B?

06 – Calcule o determinante da matriz $n \times n$ $A = (a_{ij})$, onde

$$a_{ij} = \begin{cases} (-1)^{|i-j|}, & \text{se } i \neq j \\ 2, & \text{se } i = j \end{cases}$$

07 – Considere os inteiros x_n, y_n, z_n , onde

$$\begin{aligned} x_n &= \binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \dots, \\ y_n &= \binom{n}{1} + \binom{n}{4} + \binom{n}{7} + \dots, \\ z_n &= \binom{n}{2} + \binom{n}{5} + \binom{n}{8} + \dots, \end{aligned}$$

$$\text{Mostre que } x_n^3 + y_n^3 + z_n^3 - 3x_n y_n z_n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n}.$$

08 – Prove que o triângulo cujos lados são iguais ao comprimento das medianas de um triângulo ΔABC tem área igual a $3/4$ da área do triângulo ΔABC .

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

09 – Dada a hipérbole $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$, determine uma reta paralela ao eixo das ordenadas tal que seus pontos de intersecção com a hipérbole formam com o foco F (de abscissa positiva) um triângulo retângulo em F.

10 - Cinco esferas de raio R estão dentro de um cone circular reto, da seguinte maneira: quatro delas tangenciam a base do cone, a superfície lateral e cada uma destas quatro tangenciam duas outras; a quinta tangencia as quatro primeiras e a superfície lateral do cone. Calcule o volume do cone.

Organizador do Simulado: Eurico Dias

Participe da elaboração do gabarito desse simulado: envie suas soluções para simuladonacional@gmail.com. As melhores soluções serão publicadas no site do projeto Futuro Militar no dia 01/02.