Simulado 2

Matemática - IME

Everaldo de Mello Bonotto

Questão 1. Para cada $n \in \mathbb{N}^*$, seja $A_n = \{(n+1)k : k \in \mathbb{N}^*\}$. Determine os conjuntos

$$\cup\{A_n : n \in \mathbb{N}^*\} \quad \text{e} \quad \cap\{A_n : n \in \mathbb{N}^*\}.$$

Questão 2. Determine os números reais x e y que satisfazem o sistema:

$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 & = & 1 \\ 3x^2y - y^3 & = & 0 \\ x^4 + y^4 - 6x^2y^2 & = & -\frac{1}{2} \\ 4xy^3 - 4x^3y & = & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Questão 3. Considere um triângulo ΔABC cujo ângulo $B\widehat{A}C = 75^o$. Seja D um ponto sobre o lado AB de maneira que $B\widehat{C}D = 15^o$. Determine o valor do ângulo $A\hat{B}C$ sabendo que $\overline{AD} = 2\overline{BD}$.

Questão 4. Determine para quais valores reais de m a equação admite solução:

$$\log((m-1)^2 + 1 + \cos^{2m} x) - 2m\log(senx) + |\cos x| = 0.$$

Questão 5. Considere o conjunto $A = \{a_1, a_2, a_3, ...\}$ cujo seus elementos formam uma progressão geométrica infinita de razão $r > 0$ e primeiro termo $a_1 = 1000$. Considere $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função real definida por $f(x) = \log(x)$ e $B = \{f(a_1), f(a_2), f(a_3), ...\}$. Seja $\mathcal{P}$ o conjunto numérico formado pelos números primos. Detemine a razão r de modo que $B \subseteq \mathcal{P}$.

Questão 6. Considere uma caixa com n bolas numeradas de 1 a n. Se 455 é o número de maneiras de se obter três bolas desta caixa em que não façam parte da mesma duas ou três bolas designadas por números consecutivos. Determine o valor de n.

Questão 7. Sejam A, $B \in M_{4n}(\mathbb{R})$ e i a unidade imaginária, $i^2 = -1$. Se $\alpha \in \mathbb{R}$ e $A^2 + B^2 = \alpha(AB - BA)$, mostre que α é raiz do polinômio

$$P(x) = det(AB - BA) \sum_{j=0}^{2n-1} (-1)^{j+1} \begin{pmatrix} 4n \\ 2j+1 \end{pmatrix} x^{4n-2j-1}.$$

Dado: $det(A + iB)det(A - iB) = |det(A + iB)|^2$.

Questão 8. Seja $P(x) = x^5 - 5x^3 + a_3x^2 + a_4x + a_5$ um polinômio com coeficientes reais. Se as raízes de $P(x)$ satisfazem a desigualdade,

$$x_5 \leq x_4 \leq x_3 \leq x_2 \leq x_1$$

onde $x_5 = -2\sqrt{2}$. Determine os coeficientes a_3, a_4 e a_5.

Questão 9. A base $ABCDE$ de uma pirâmide com vértice S é inscritível e $\overline{AB} < \overline{DE}$. Se $\overline{SA} > \max\{\overline{SB}, \overline{SC}, \overline{SD}, \overline{SE}\}$, então mostre que $\overline{SB} > \overline{SC}$.

Questão 10. Mostre que a desigualdade

$$sen^{2n}(\theta)\cos^{2n}(\theta) \leq \frac{sen^{4n}(\theta)}{\log_2(2+2^{\tan^{2n}(\theta)})} + \frac{[\log_2(2+2^{\tan^{2n}(\theta)})]\cos^{4n}(\theta)}{4}$$

é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}^*$ e $\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Determine para quais valores reais de θ a igualdade ocorre.

Gabarito

Questão 1. $\cup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n = \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ e $\cap_{n\in\mathbb{N}^*} A_n = \emptyset$.

Questão 2. $x = -\frac{1}{2}$ e $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Questão 3. 45^o.

Questão 4. $m = 1$.

Questão 5. $r = 1$.

Questão 6. $n = 17$.

Questão 7. demonstração

Questão 8. $a_3 = 5\sqrt{2}$, $a_4 = -\frac{15}{4}$ e $a_5 = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Questão 9. demonstração

Questão 10. $\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.