Professor: **Judson Santos / Luciano Santos**

Aluno(a): ______________________________ nº __________

Data: ________/________/2011

1º SIMULADO - ITA – IME - MATEMÁTICA - 2011

01) Seja $\mathbb{N}$ o conjunto dos inteiros positivos. Dados os conjuntos $A = \{p \in \mathbb{N};\ p$ é primo$\}$ e $B = \{m^2 - n^2\ ; m, n \in \mathbb{N}\}$, considere as afirmações:

I. $A \subset B$
II. $A \cap B = \varnothing$
III. $A \cup B = \mathbb{N}$.

Podemos afirmar que:

a) apenas I é falsa.
b) apenas II é falsa.
c) apenas III é falsa.
d) todas são falsas.
e) apenas I e II são falsas.

02) Suponha que P (x) é um polinômio tal que P (1) = 1 e $\frac{P(2x)}{p(x+1)} = 8 - \frac{56}{x+7}$ para todo real x para o qual ambos os lados são definidos. Então o valor P (-1) é igual a:

$a)\ \frac{1}{21}$ $\quad b)\ -\frac{1}{21}$ $\quad c)\ \frac{5}{21}$ $\quad d)\ -\frac{5}{21}$ $\quad e)\ -\frac{1}{7}$

03) Se x, y e z são números reais e positivos que satisfaz o sistema

$$\begin{cases} x^2 + 2(y-1)(z-1) = 85 \\ y^2 + 2(z-1)(x-1) = 84 \\ z^2 + 2(x-1)(y-1) = 89 \end{cases}$$

Então o valor de x+y+z é igual a:

a)17 b) 18 c) 19 d) 20 e) 21

04)Para todo número real x que satisfaz a função $f(x)=\frac{1}{\sqrt[2011]{1-x^{2011}}}$. Seja N os três últimos algarismos da expressão $\underbrace{f(f(.....(f(2011))....))}_{2010\,vezes}{}^{2011}$, então o valor de N é igual a:

a)611 b) 511 c) 411 d) 311 e) 211

05) Sabe-se que o determinante da matriz M, apresentada abaixo, vale $a.sen^{b}\left(\frac{\alpha}{2}\right).sen^{c}\left(\frac{\beta}{2}\right).sen^{d}\left(\frac{\lambda}{2}\right)$, onde $a,b,c\ e\ d$ são números inteiros e $\alpha,\beta\ e\ \lambda$ são números reais.

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cos\lambda & \cos\beta \\ 1 & \cos\lambda & 1 & \cos\alpha \\ 1 & \cos\beta & \cos\alpha & 1 \end{pmatrix}$$

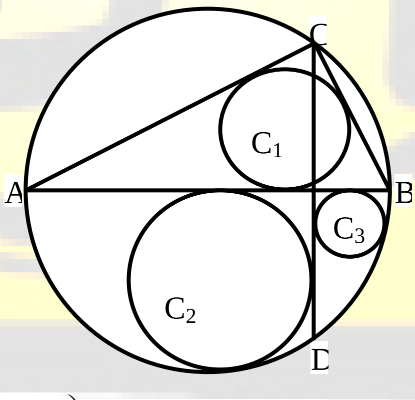
Então o valor de $a+b+c+d$ é igual a:

a) -10 b) 10 c) -12 d) 12 e) -16

06) Sabendo que $\alpha\ e\ \beta$ são os valores reais positivos de $x\ e\ y$ que satisfazem a equação $\log\left(x^3+\frac{y^3}{3}+\frac{1}{9}\right)=\log x+\log y$. Então o valor da expressão $9.\alpha^2.\beta^2+3.\alpha.\beta+5$ é igual a:

a) 4 b) 5 c) 6 d) 7 e) 8

07)Na figura, AB é um diâmetro da circunferência maior e CD é perpendicular a AB. A circunferência C_1 (de raio r_1) é tangente aos 3 lados de ΔABC, C_2 (de raio r_2) e C_3 (de raio r_3) são tangentes a AB, CD e à circunferência maior.



Então o valor da expressão $\left(\frac{r_2+r_3}{r_1}\right)$ é igual a:

a) 1 b) 2 c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{1}{4}$ e) 3

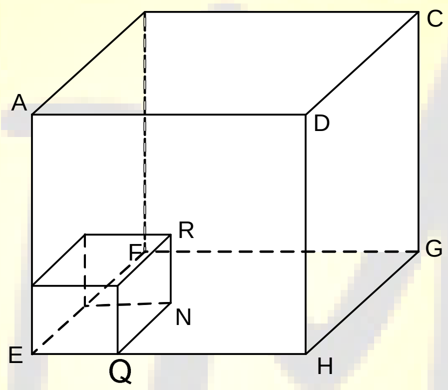
08) A equação $2000.x^6 + 100.x^5 + 10.x^3 + x - 2 = 0$ tem apenas duas raízes reais α e β. Então o valor de $20 \times \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ é igual a:

a) 8 b) 9 c) 10 d) 11 e) 12

09)Sabendo que os dois lados consecutivos de um paralelogramo é dado pela equação $8x^2 - 14xy + 3y^2 + 10x + 10y - 25 = 0$. Se o ponto de interseção das diagonais desse paralelogramo é o ponto $(3;2)$, então a equação de reta que representa um dos outros dois lados desse paralelogramo pode ser:

a) 2x – 3y + 7 = 0
b) 4x – y – 15 = 0
c) 3x – 4y +4 = 0
d) 4x + 3y + 8 = 0
e) 2x + 3y – 5 = 0

10) Na figura são mostrados dois hexaedros regulares, se O é o centro do maior dos hexaedros regulares tal que $\overline{OR} = \overline{EQ}$ e $(\overline{ON})^2 = 6(3 + \sqrt{3})$, calcule a área da superfície total do maior dos hexaedros.



a) $144(2 + \sqrt{3})$ b) $136(1 + \sqrt{3})$ c) $132\sqrt{2}$ d) $136\sqrt{3}$ e) $142(2 + \sqrt{3})$

11) Se os lados de um triângulo ABC são a, b, c e tem como ângulos opostos α, β e θ tal que $tg\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{5}{6}$ e $tg\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{2}{5}$. Então sobre esse triângulo podemos afirmar que:

a) os lados (a,b,c) nesta ordem estão em progressão aritmética.
b) os lados (a,b,c) nesta ordem estão em progressão geometria.
c) o triângulo é retângulo.
d) o triângulo é eqüilátero.
e) o triângulo é retângulo e isósceles.

12) Se $P=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $Q=P.A.P^T$, onde P^T representa uma matriz transposta de P. então a soma de todos os elementos da matriz X tal que $X=P^T.Q^{2010}.P$ é igual a:

a) 2009 b) 2010 c) 2011 d) 2012 e) 2013

13) O coeficiente do termo independente de x no desenvolvimento da expansão $\left(\frac{x+1}{x^{2/3}-x^{1/3}+1}-\frac{x-1}{x-x^{1/2}}\right)^{10}$ é igual a:

a) 70 b) 105 c) 210 d) 112 e) 240

14) Sabendo que $\arg(z)$ é o argumento principal de um número complexo z e o $|z|$ representa o módulo desse complexo. Das afirmativas abaixo

I. Se $\arg\left(z^{1/3}\right)=\frac{1}{2}\arg\left(z^2+\bar{z}.z^{1/3}\right)$, então o $|z|$ é igual a 1.

II. Se $\frac{5z_2}{7z_1}$ é um número complexo imaginário puro, então $\left|\frac{2z_1+3z_2}{2z_1-3z_2}\right|$ é igual a 1.

III. Se o número complexo $z=a+b.i$ e $\bar{z}$ é o conjugado desse complexo z. Então o valor da expressão $tg\left[i.\log_e^{\left(\frac{z}{\bar{z}}\right)}\right]$ vale $\frac{2ab}{a^2-b^2}$, onde tg é a tangente do ângulo e e é a base de Euler.

IV. Se o modulo do complexo $|z-2i|=2\sqrt{2}$, então $\arg\left(\frac{z-2}{z+2}\right)$ é igual a $\frac{\pi}{4}$.

É correto afirma:

a) Somente I e II são verdadeiras
b) Somente I , II e III são verdadeiras
c) Somente II, III e IV são verdadeiras
d) Somente I, III e IV são verdadeiras
e) Todas são verdadeiras.

15) Seja $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2), C(x_3,y_3)$ os três pontos de interseção da reta $y=\sqrt{3}.x$ com a curva de equação $x^3+y^3+3xy+5x^2+3y^2+4x+5y+1=0$ e O a origem do sistema de coordenadas cartesiano. Sabendo que P representa o produto das distâncias dos vértices A, B, C a origem O, então o valor de $(3\sqrt{3}+1)P$ é igual a:

a)1 b) 2 c) 4 d) 8 e) 16

16) Se $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ é uma progressão geométrica tal que:

i) a razão é maior do que 1;
ii)a soma dos quatros primeiros termos vale 30;
iii)a soma dos quadrados dos quatros primeiros termos vale 340.
Seja S a soma dos algarismos do quarto desta progressão geométrica. Então o valor de S^2 é igual a:

a)16 b) 25 c) 36 d) 49 e) 64

17) Se $g(x)$ é uma função polinomial que satisfaz a seguinte relação $g(x).g(y) = g(x) + g(y) + g(xy) - 2$ para todo $x, y \in \Re$. Então o valor de $g(3)$ para $g(2) = 5$ vale:

a) 12 b) 15 c) 18 d) 24 e) 10

18) Seja $A = \{1,2,3,4,5\}$. Definimos que uma função $f : A \to A$ é idempotente se $f(f(x)) = f(x)$, $\forall\, x \in A$.

Vejamos alguns exemplos da função $g : A \to A$ definida por:
$g(1) = 3$, $g(2) = 5$, $g(3) = 3$, $g(4) = 4$, $g(5) = 5$ são idempotentes.

Então o número de funções idempotente $f : A \to A$ é igual a:

a)144 b) 156 c) 164 d) 196 e) 225

19) Sabendo que $a_k + i.b_k$ para $k = 1,2,3,4$ são as raízes do polinômio $f(x) = x^4 - 6x^3 + 26x^2 - 46x + 65$ com a_k, b_k inteiros e i é a unidade imaginária dos complexos. Então o valor da expressão $|b_1| + |b_2| + |b_3| + |b_4|$ é igual a:

a)10 b) 11 c) 12 d) 13 e) 14

20) Seja $S = \left(tg^2\left(\frac{\pi}{7}\right) + tg^2\left(\frac{2\pi}{7}\right) + tg^2\left(\frac{3\pi}{7}\right)\right) \times \left(\cot g^2\left(\frac{\pi}{7}\right) + \cot g^2\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cot g^2\left(\frac{3\pi}{7}\right)\right)$. Então a soma dos algarismos de <u>S</u> é igual a:

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6

QUESTÕES DISCURSSIVAS

21) Suponha que você tenha escrito em colunas os números inteiros de $1\,000\,000$ até 9999999, inclusive, de modo que os números de cada coluna sejam formados pelos mesmos algarismos. Assim, por exemplo, os números 5544413 e 4445531 pertencem à mesma coluna; 5544413 e 5554413 pertencem a colunas diferentes. Quantas colunas você escreveu?

22) Se a_1 , a_2 , ..., a_{2005} são números reais que satisfaz o sistema abaixo:

$$\begin{cases} a_1.1 + a_2.2 + a_3.3 + \ldots\ldots + a_{2005}.2005 = 0 \\ a_1.1^2 + a_2.2^2 + a_3.3^2 + \ldots\ldots + a_{2005}.2005^2 = 0 \\ a_1.1^3 + a_2.2^3 + a_3.3^3 + \ldots\ldots + a_{2005}.2005^3 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1.1^{2004} + a_2.2^{2004} + a_3.3^{2004} + \ldots\ldots + a_{2005}.2005^{2004} = 0 \\ a_1.1^{2005} + a_2.2^{2005} + a_3.3^{2005} + \ldots\ldots + a_{2005}.2005^{2005} = 1 \end{cases}$$

Calcule o valor de a_1?

23) Se $x, y\ e\ z$ são inteiros positivos e termos de uma progressão aritmética, mostre que a igualdade $x^5 + y^5 = z^5$ nunca é satisfeita.

24) Determine todas as funções $f : \Re - \{-1, 1\} \to \Re$ que satisfazem à equação:

$f\left(\frac{x-3}{x+1}\right) + f\left(\frac{3+x}{1-x}\right) = x$.

25) Suponha que p e q sejam números positivos para os quais $\log_9^p = \log_{12}^q = \log_{16}^{(p+q)}$. Calcule o valor de $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2.p}\right).(3.q)$.

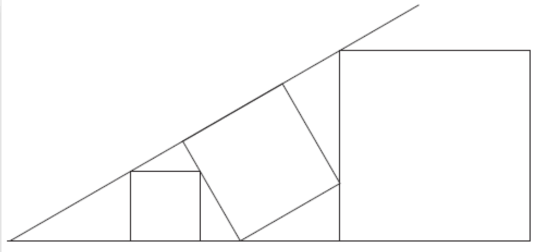
26) Se $\Delta = \begin{vmatrix} 1+a^2-b^2 & 2ab & -2b \\ 2ab & 1-a^2+b^2 & 2a \\ 2b & -2a & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix}$ representa um calculo de determinante de ordem 3x3. Calcule o valor mínimo da expressão $\frac{\Delta}{a^2.b^2}$.

27) Se $(x\,;\,y)$ representa um par de número real que satisfaz o sistema abaixo:

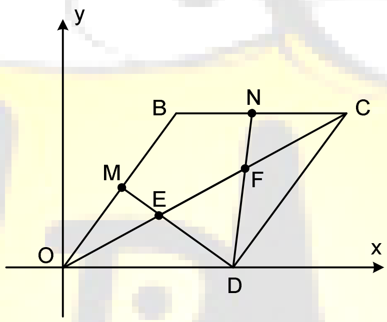
$$\begin{cases} 56x + 33y = \dfrac{-y}{x^2+y^2} \\ 33x - 56y = \dfrac{x}{x^2+y^2} \end{cases}$$

. Determine o valor de $|x| + |y|$.

28) Na figura abaixo existem três quadrados de lados 3 < 4 < x. Determine x.



29) No losango *OBCD*, "*O*" é a origem dos eixos coordenados, *B(3, 4)* e *C(a, 4)*. Se *M* e *N* são pontos médios de $\overline{OB}$ e $\overline{OC}$ respectivamente. $\overline{DM} \cap \overline{OC} = \{E\}$ e $\overline{DN} \cap \overline{OC} = \{F\}$. Determine as coordenadas do baricentro do triângulo *EFD*.



30)Seja x, y, z e w números reais que satisfaz o sistema:

$$\begin{cases} w + x + y + z = 5 \\ 2w + 4x + 8y + 16z = 7 \\ 3w + 9x + 27y + 81z = 11 \\ 4w + 16x + 64y + 256z = 1 \end{cases}$$

Calcule o valor absoluto de $5w + 25x + 125y + 625z$

Professor: **Judson Santos / Luciano Santos**

GABARITO DO 1ºSIMULADO ITA – IME – 2011

01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
D	D	B	A	A	D	B	B	B	A
11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
A	D	C	E	D	B	E	D	A	E

QUESTÕES DISCURSSIVAS

21. RESPOSTA.: $C_{16}^{7} - 1$

22. RESPOSTA: $a_1 = \dfrac{1}{2004!}$

23. RESPOSTA: demonstração

24. RESPOSTA: $f(x) = \dfrac{x(x^2+7)}{2(1-x^2)}$

25. RESPOSTA: 03

26. RESPOSTA: 27

27. RESPOSTA: $\dfrac{11}{65}$

28. RESPOSTA: $\dfrac{16}{3}$

29. RESPOSTA: $\left(\dfrac{13}{3}, \dfrac{4}{3}\right)$

30. RESPOSTA: – 60