Simulado – Matemática IME 2007
Elaborado em Junho 2007
Compilado: Caio dos Santos Guimarães

Nível: Sinistro!
Nota Boa: 6 a 7 questões das 10 no tempo de 4 horas

---

1. Considere n planos distintos num espaço tridimensional, satisfazendo as seguintes condições:
   (i) nunca dois são paralelos
   (ii) nunca duas retas de interseção são paralelos;
   (iii) nunca quatro retas se interceptam num mesmo ponto.

   Em quantas regiões o espaço é dividido pelos n planos?

2. Seja P(x) um polinômio do 4º grau, em x, cujo coeficiente do termo de maior grau é 1 e cujas raízes são racionais. Adicionando-se 3/4 e 3 a essas raízes obtém-se transformadas de P(x) = 0 desprovidas do termo de 3º grau de do 1º grau, respectivamente. Determine P(x), sabendo-se que ele possui duas raízes iguais e que a tangente ao gráfico de P(x) em x= 0 tem coeficiente angular igual a -15.

3. Considere todas as sequências numéricas formadas apenas pelos algarismos '0' e '1'. Determine o número de sequências desse tipo que contêm um número ímpar de '0's.

4. Demonstre que $1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}$ não possui raízes múltiplas.

5. Se ABC é um pedaço de papel em formato de triângulo com AB = 36, AC = 72 e ângulo AB sendo reto. Determine a área do conjunto de pontos P dentro do triângulo tais que se dobraduras forem feitas (e depois desdobradas) ligando cada um dos pontos A,B,C a P, as dobraduras não se cruzem.

6. Quantos triângulos retângulos de lados $2/\sqrt{3}$ são formados pelas retas $y = k$, $y = x\sqrt{3} + 2k$, $y = -x\sqrt{3} + 2k$ para $k = -10, -9, \ldots, 9, 10$?

7. Mostre que se uma reta corta as assíntotas em P e Q de uma hipérbole e a própria hipérbole em M e N, então PM = NQ.

9. Seja ABCD...PQ um polígono regular de n lados inscrito em um círculo de raio unitário. Calcule o produto das medidas das diagonais AC.AD....AP

10. Resolva o sistema: $\begin{cases} 1+x_1+x_2+\ldots+x_n=0 \\ 1+2x_1+2^2.x_2+\ldots+2^n.x_n=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 1+n.x_1+n^2.x_2+\ldots+n^n.x_n=0 \end{cases}$

Questões compiladas de simulados antigos dos cursos GPI e (antigo) Impacto e AIME