Simulado: Matemática IME 2008

Questões elaboradas por Everaldo de Mello Bonotto.

Exercício 1) Seja $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função real que satisfaz as seguintes condições:

i) $h(x) + h(y) = h(xy), \forall\, x, y \in \mathbb{R}$.

ii) $h\left(\max\left(\frac{m}{2^p(q\pi+1)}, \frac{n}{2^p}\right) + min\left(\frac{m}{2^p}, \frac{n}{2^p(q\pi+1)}\right)\right) = log_2(q+1)$, $\forall\, m, n \in \mathbb{Z}$, $\forall\, p$, $q \in \mathbb{N}$.

Mostre que se $x \in \mathbb{Q}$, então $h(x) = 0$.

Exercício 2) Sejam a e b números reais positivos tais que $\frac{a}{b} = 6$. Sejam T_m e T_c o termo máximo e o termo central do desenvolvimento da expressão $(a+b)^{90}$, respectivamente. Determine a e b de maneira que $T_m + T_c = 6^{13}$.

Exercício 3) Considere o sistema linear

$$\begin{cases} (log\alpha)x + sen^2(\beta)y & = 1 \\ (log(\alpha+\beta))x + cos^2(\beta)y & = 2, \end{cases}$$

com $\alpha > 0$ e $\beta > 0$. Prove que se $\left(\log_\alpha\left(1 + \alpha\beta + \alpha^2\right)\right)^{\cos 2x} > 1$, $\alpha \neq 1$ e $\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$, então o sistema admite uma única solução.

Exercício 4) Considere $\{a_1, a_2, a_3...\}$ uma progressão aritmética cujo primeiro termo a_1 é $\alpha \neq 0$. Seja $\{b_1, b_2, b_3, ...\}$ uma sequência de maneira que $\{b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3, ...\}$ forma nesta ordem uma progressão geométrica de razão β, $0 < \beta < 1$. Suponha ainda que $b_1 = \cos(\phi)$ onde $\frac{\pi}{4} < \phi < \frac{\pi}{2}$ e $b_k = \gamma$, $k > 1$. Determine a razão da progressão aritmética em função das variáveis k, α, β e γ e o termo b_1 de modo que a matriz

$$A = \begin{pmatrix} tag(\phi) & 1 - sen(\phi) \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

não admita característica máxima.

Exercício 5) Sejam $z_1 = 3 + 3i$ e $z_2 = -1 + 5i$ números complexos onde i é a unidade imaginária. Determine o número complexo z_3, $-100 \leq Rez_3 \leq 100$, pertencente à parábola de equação $y = -(x-1)^2 - x + 1$ de maneira que a área do triângulo de vértices z_1, z_2 e z_3 seja máxima.

Exercício 6) Sejam p, q e m polinômios com coeficientes racionais tais que

$$m(x) = \frac{p^2(x+1) - q^3(1-x)}{x^7 + 8x^3 + 6} \quad \text{e} \quad gr[m(x)] = 3.$$

Sabe-se que $m(x)$ possui uma raiz inteira. Determine as raízes de $m(x)$ sendo que $m(0) = 121$, $p^2(2) - q^3(0) > 0$, $1 + \sqrt{11}$ é raiz de $p(x)$ e a equação

$$r(x) = x^{66} - x^3 + 9x - 11 + \left(\frac{sen(3x)}{e^{x^2}+1}\right) log\left(|q(1-\sqrt{11})| + 1 + log\left(\frac{1}{|q(1-\sqrt{11})|+1}\right)\right)$$

é uma identidade em x, onde r é um polinômio.

Exercício 7) Dado um triângulo ABC, considere sobre o segmento AC os pontos P_1, P_2 e P_3 tal que as áreas dos triângulos ABP_1, ABP_2 e ABP_3 formam nesta ordem uma progressão geométrica crescente de razão r, $r \neq 1$. Mostre que r é raiz do polinômio

$$Q(x) = -\overline{AP_1}^2 x^4 + \overline{AP_1}^2 x^3 + \overline{AP_1}^2 x^2 + [\overline{AP_1}^2 + \overline{BP_1}^2 - \overline{BP_2}^2]x + \overline{BP_3}^2 - \overline{BP_2}^2.$$

Exercício 8) Considere a família de hipérboles $x^2 - y^2 = k$, $k > 0$. Seja C_k, $k > 0$, o conjunto de todas as circunferências que passam pela origem e são tangentes a hipérbole $x^2 - y^2 = k$ em exatamente dois pontos. Se para cada $k > 0$, o conjunto Q_k consiste de todos os pontos da interseção da hipérbole $x^2 - y^2 = k$ com os elementos de C_k. Determine o lugar geométrico descrito pelo conjunto Q_k quando k variar no intervalo $]0, +\infty[$.

Dado: A equação da reta tangente à hipérbole $x^2 - y^2 = k$ no ponto (x_0, y_0), $y_0 \neq 0$, é dada por $y = \dfrac{x_0}{y_0}x - \dfrac{k}{y_0}$.

Exercício 9) Considere no plano cartesiano o ponto $(m, 0)$, $0 < m < 1$ e os pontos $(p_1, 0), (p_2, 0), ..., (p_n, 0)$, $0 < p_1 < p_2 < ... < p_n < m$. Para cada inteiro j, $1 \leq j \leq n$, considere a reta r_j que passa pelo ponto $(p_j, 0)$ e é paralela à reta r de equação $y = kx$, $k > 0$. Seja V_j o volume do sólido gerado pela rotação do segmento de extremos $(p_j, 0)$ e $(m, y_j(m))$ em torno do eixo Ox, $0 \leq j \leq n$, onde $p_0 = 0$, $r_0 = r$ e $y_j(m)$ é a ordenada da reta r_j com abscissa m. Se a sequência $\{V_0, V_1, V_2, ...\}$ forma nesta ordem uma progressão geométrica de razão m^3, determine a relação entre m e n sabendo que $p_n = m \log\left(\dfrac{10}{n^{m^{n+1}}}\right)$, $n > 10$. O natural n pode ser menor que 10?

Exercício 10) Resolva a equação:

$$cos^2 x + 2cos^4 x = 3 - (-1)^{\lfloor \log_4(1+sen^2 x) \rfloor} + (-1)^{\lfloor sen(x-\pi/6)-1/2 \rfloor}.$$

Observação: $\lfloor x \rfloor = n$, $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n \leq x < n+1$.

Gabarito

Exercício 1: Demonstração.

Exercício 2:

$$b = \frac{1}{\left[\binom{90}{77} 6^{64} + \binom{90}{45} 6^{32}\right]^{1/90}}$$

$$a = \frac{6}{\left[\binom{90}{77} 6^{64} + \binom{90}{45} 6^{32}\right]^{1/90}}$$

Exercício 3: Demonstração.

Exercício 4:

$$b_1 = \frac{\sqrt{2 - 2\sqrt{8\sqrt{2} - 11}}}{2}$$

$$r = \frac{2\gamma - 2\alpha - \left(\sqrt{2 - 2\sqrt{8\sqrt{2} - 11}} - 2\alpha\right)\beta^{k-1}}{2(k-1)}$$

Exercício 5: $z_3 = -100 - 10100i$.

Exercício 6: As raízes de $m(x)$ são: $\sqrt{11}$, $-\sqrt{11}$ e 11.

Exercício 7: Demonstração.

Exercício 8:

$$\left\{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 : \, |y| = \frac{1}{\sqrt{6}}|x| \quad \text{e} \quad (x,\, y) \neq (0,0)\right\}$$

Exercício 9: $m = \dfrac{1}{\log n}$. Não.

Exercício 10:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} : \, x = (2k+1)\pi \;\text{ ou }\; x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \;\text{ ou }\; x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, \; k \in \mathbb{Z}\right\}$$