$*$Todas as questões foram elaboradas por Everaldo de Mello Bonotto.

$*$ Todas as soluções foram elaboradas por Pedro Henrique Oliveira Pantoja.

1) Para cada $n \in \mathbb{N}^*$, seja $A_n = \{(n+1)k: k \in \mathbb{N}^*\}$. $Determine\ os\ conjuntos$

$$\cup\{A_n: n \in \mathbb{N}^*\}\ e\ \cap\ \{A_n: n \in \mathbb{N}^*\}.$$

Solução:

Seja $A_n = \{(n+1)k: k \in \mathbb{N} - \{0\}\}$ $então\ claramente$:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots = \{2k\} \cup \{3k\} \cup \{4k\} \cup \ldots = \mathbb{N}^* - \{1\}.\ e$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots = \{2k\} \cap \{3k\} \cap \{4k\} \cap \ldots = \emptyset$$

$Resposta$: $\cup_{n\in \mathbb{N}^*} A_n = \mathbb{N}^* \backslash \{1\}$ e $\cap_{n\in \mathbb{N}^*} A_n = \emptyset$.

2) Determine os números reais $x\ e\ y$ que satisfazem o sistema:

$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = 1 \\ 3x^2y - y^3 = 0 \\ x^4 + y^4 - 6x^2y^2 = -\dfrac{1}{2} \\ 4xy^3 - 4x^3y = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Solução:

Das duas últimas equações temos:

$$\begin{cases} (x^2 - y^2)^2 - 4x^2y^2 = -\dfrac{1}{2} \\ 4xy(x^2 - y^2) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$isto$ é,

$$\begin{cases} (x^2 - y^2)^2 - 4x^2y^2 = -\dfrac{1}{2} \\ 16x^2y^2(x^2 - y^2)^2 = \dfrac{3}{4} \end{cases}$$

Fazendo

$$x^2y^2 = A\ e\ x^2 - y^2 = B$$

$$\begin{cases} B^2 - 4A = -\dfrac{1}{2} \\ 16AB^2 = \dfrac{3}{4} \end{cases}$$

Daí

$$A = \frac{3}{64B^2}$$

Substituindo na primeira equação temos a seguinte equação biquadrada:

$$16B^4 + 8B^2 - 3 = 0 \Rightarrow B^2 = \frac{-8 \mp \sqrt{256}}{32} \Rightarrow B^2 = -\frac{3}{4}\ ou\ B^2 = \frac{1}{4}$$

A primeira não convém, pois $x\ e\ y$ são números reais. Assim,

$$B^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow B = \frac{1}{2}\ ou\ B = -\frac{1}{2}\ \ e\ segue\ que\ A = \frac{3}{16}\ portanto:$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = \dfrac{1}{2} \\ x^2y^2 = \dfrac{3}{16} \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -\dfrac{1}{2} \\ x^2y^2 = \dfrac{3}{16} \end{cases}$$

Fazendo $x^2 = r\ e\ y^2 = s$ vem:

$$\begin{cases} r - s = \dfrac{1}{2} \\ rs = \dfrac{3}{16} \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} r - s = -\dfrac{1}{2} \\ rs = \dfrac{3}{16} \end{cases}$$

Resolvendo esses dois sistemas de equações simples pelo método da substituição, separadamente, encontramos:

$$r_1 = \frac{3}{4}\ \ , r_2 = -\frac{1}{4}\ \ , r_3 = -\frac{3}{4}\ \ , r_4 = \frac{1}{4}$$

Os valores de $r_2\ e\ r_3$ não servem.

Logo:

$$x^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow y^2 = \frac{3}{16x^2} = \frac{1}{4}\ da\ mesma\ forma$$

$$x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow y^2 = \frac{3}{16x^2} = \frac{3}{4}\ assim:$$

$$x^2 = \frac{3}{4}\ e\ y^2 = \frac{1}{4}\ ou\ x^2 = \frac{1}{4}\ e\ y^2 = \frac{3}{4}\ (I)$$

Então as soluções de (I) são:

(x, y)

$= \{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$

$\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\}$

$testando\ essas\ soluções\ em$

$$x^3 - 3xy^2 = 1$$

Obtemos as soluções:

$$\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\ e\ \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Entretanto se substituirmos o par

$$\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\ em\ 4xy^3 - 4x^3y\ teremos$$

$$4xy^3 - 4x^3y = -\frac{\sqrt{3}}{2}\ (absurdo)$$

Finalmente é fácil verificar que

$$\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\ \text{é}\ a\ única\ solução\ do\ problema.$$

$$Resposta: x = -\frac{1}{2}\ e\ y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

3) Considere um triângulo ΔABC cujo ângulo $\angle BAC = 75°$. Seja D um ponto sobre o lado AB de maneira que $\angle BCD = 15°$. Determine o valor do ângulo $\angle ABC$ sabendo que $\overline{AD} = 2\overline{BD}$.

Solução:

Como a soma dos ângulos internos desse triângulo é 180°, segue que $\angle DCA = 90° - \alpha$, onde $\alpha = \angle ABC$.

Aplicando a lei dos senos no triângulo BCD:

$$\frac{sen\ 75°}{\overline{DC}} = \frac{sen(90° - \alpha)}{\overline{AD}}$$

Aplicando a lei dos senos no triângulo DCA:

$$\frac{sen\ 15°}{\overline{BD}} = \frac{sen\ \alpha}{\overline{DC}}$$

Então, como $\overline{AD} = 2\overline{BD}$ vem

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{sen\ 15°}{sen\ \alpha}\ e\ \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{sen(90° - \alpha)}{2 \cdot sen\ 75°} \Rightarrow$$

$$\frac{sen\ (45° - 30°)}{sen\ \alpha} = \frac{\cos \alpha}{2 \cdot sen\ (45° + 30°)}$$

Pois $\cos \alpha = sen(90° - \alpha)$, então:

$$2 \cdot sen\ \alpha \cdot \cos \alpha = 2\left(2 \cdot sen\left(\frac{90° + 60°}{2}\right) \cdot sen\ \left(\frac{90° - 60°}{2}\right)\right)$$
$$= 2(\cos 60° - \cos 90°) = 1 \Rightarrow sen\ 2\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 45°$$

Resposta: 45°

4) Determine para quais valores reais de m a equação admite solução:
$\log((m-1)^2 + 1 + cos^{2m}x) - 2m \log(sen\ x) + |\cos x| = 0.$

Solução:
Note que,
$\log((m-1)^2 + 1 + cos^{2m}x) - 2m \log(sen\ x) + |\cos x| = 0 \Rightarrow$
$\log((m-1)^2 + 1 + cos^{2m}x) - \log(sen^{2m}x) + |\cos x| = 0 \Rightarrow$

$$\log\left(\frac{(m-1)^2 + 1 + cos^{2m}x}{sen^{2m}x}\right) + |\cos x| = 0$$

Como $|\cos x|$ é sempre não-negativo, devemos ter necessariamente:

$$\log\left(\frac{(m-1)^2 + 1 + cos^{2m}x}{sen^{2m}x}\right) \leq 0\ (I)$$

Veja que a expressão

$$\log\left(\frac{(m-1)^2 + 1 + cos^{2m}x}{sen^{2m}x}\right)$$

Tem sentido, pois

$$\frac{(m-1)^2 + 1 + cos^{2m}x}{sen^{2m}x} > 0, \forall\ m, x\ \in \mathbb{R}$$

$então$, de (I):

$$\frac{(m-1)^2 + 1 + cos^{2m}x}{sen^{2m}x} \leq 10^0 = 1 \Rightarrow$$

$$(m-1)^2 + 1 + cos^{2m}x \leq sen^{2m}x\ (II)$$

Agora, pelo desenvolvimento do binômio de Newton:

$$1 = (sen^2x + cos^2x)^m = sen^{2m}x + cos^{2m}x + k, onde$$
$$k = \binom{m}{1} sen^{2m-2}x \cdot cos^2x + \binom{m}{2} sen^{2m-4}x \cdot cos^4x + \cdots\ \geq 0$$

$de\ (II)$:

$$(m-1)^2 + sen^{2m}x + cos^{2m}x + k + cos^{2m}x \leq sen^{2m}x \Rightarrow$$
$$(m-1)^2 + k + 2 \cdot cos^{2m}x \leq 0$$

Mas

$$(m-1)^2 + k + 2 \cdot cos^{2m}x \geq 0$$

Então devemos ter necessariamente,

$$(m-1)^2 + k + 2 \cdot cos^{2m}x = 0 \Rightarrow (m-1)^2 = k = 2 \cdot cos^{2m}x = 0 \Rightarrow$$
$$m = 1.$$

Resposta: $m = 1$.

5) Considere o conjunto $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ cujos seus elementos formam uma progressão geométrica infinita de razão $r > 0$ e primeiro termo $a_1 = 1000$. Considere $f\colon \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função real definida por $f(x) = \log x$ e $B = \{f(a_1), f(a_2), f(a_3), \dots\}$. Seja $\mathcal{P}$ o conjunto numérico formado pelos números primos. Determine a razão r de modo que $B \subseteq \mathcal{P}$.

Solução:

Sejam $A = \{1000, 1000r, 1000r^2, \dots\}$ e
$B = \{\log(1000)\ , \log(1000r)\ , \log(1000r^2)\ , \dots\} = \{3, 3 + \log r\,, 3 + 2\log r\,, \dots\}$
que é uma progressão aritmética de razão $\log r$ e primeiro termo igual a 3. Para que o conjunto B contenha apenas números inteiros devemos ter $r = 10^t$ para $t \in \mathbb{N}$, daí
$B = \{3, 3 + t, 3 + 2t, \dots\} \Rightarrow B = \{3 + kt\colon k \in \mathbb{N}\}$.
Para que B seja subconjunto próprio de $\mathcal{P}$,isto é, $B \subseteq \mathcal{P}$ o conjunto B deverá necessariamente conter apenas números primos, mas $3 + kt\colon k \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{N}$ é um conjunto infinito e não contém só valores primos para k,t naturais, de fato, se k for múltiplo de 3 , $3 + kt$ dá infinitos valores compostos, ou seja, que não são números primos. Portanto a única possibilidade é $t = 0$,
$r = 1\ e\ B = \{3, 3, 3, 3, \dots\} \subseteq \mathcal{P}$.
Resposta: $r = 1$.

6) Considere uma caixa com n bolas numeradas de 1 a n. Se 455 é o número de maneiras de se obter três bolas desta caixa em que não façam parte da mesma duas ou três bolas designadas por números consecutivos. Determine o valor de n.

Solução:

É suficiente encontrar o número de subconjuntos de {1, 2, 3, ... , n} com três elementos em que não há números consecutivos. Ao formar tal subconjunto marcamos com o sinal $+$ os elementos do conjunto que farão parte do subconjunto e com o sinal $-$ os elementos que não farão parte do subconjunto.

Assim temos 3 sinais $+$ e $n-3$ $sinais$ $-$. Para arrumar sem que haja dois sinais $+$ consecutivos, temos 1 modo de colocar os sinais $-$ e $\binom{n-3+1}{3}$ modos de colocar os sinais $+$. Então pelo princípio multiplicativo, o número de modos é

$$1\cdot\binom{n-2}{3}=\binom{n-2}{3}$$

Devemos ter:

$$\binom{n-2}{3}=455 \Rightarrow$$

$$\frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{6}=455 \quad (I) \Rightarrow$$

$$n^3-9n^2+26n-2754=0 \Rightarrow$$

$$(n-17)(n^2+8n+162)=0$$

Como $n^2+8n+162$ não tem raízes reais, o valor de n é 17.
Note que de (I) $\quad (n-2)(n-3)(n-4)=13\cdot 14\cdot 15$ daí $n=17$.

Obs.: O método utilizado para resolver esse problema é conhecido como LEMA DE KAPLANSKY.

Resposta: $n=17$.

7)

8) Seja $P(x)=x^5-5x^3+a_3x^2+a_4x+a_5$ um polinômio com coeficientes reais. Se as raízes de $P(x)$ satisfazem a desigualdade,

$$x_5\le x_4\le x_3\le x_2\le x_1$$

$onde$ $x_5=-2\sqrt{2}$. Determine os coeficientes a_3 , a_4 e a_5 .

Solução:
Pelas relações de Girard , temos:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0 \\ x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2=0^2-2(-5)=10 \end{cases} \Rightarrow$$

$como$ $x_5=-2\sqrt{2}$,

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=2\sqrt{2} \\ x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=2 \end{cases}$$

Agora, aplicando a desigualdade de cauchy-schwarz:

$$(x_1+x_2+x_3+x_4)^2\le 4(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)$$

Com igualdade se e somente se

$$x_1=x_2=x_3=x_4$$

Mas,

$$(2\sqrt{2})^2 = 4\cdot 2 \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$já\ que\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2\sqrt{2}$$

Então:

$$P(x) = 1\cdot(x+2\sqrt{2})\cdot\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 \Rightarrow$$

$$(x+2\sqrt{2})\cdot\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 \equiv x^5 - 5x^3 + a_3x^2 + a_4x + a_5 \Rightarrow$$
$$(x+2\sqrt{2})\cdot\left(x^2 - x\sqrt{2}+\frac{1}{2}\right)^2 \equiv x^5 - 5x^3 + a_3x^2 + a_4x + a_5 \Rightarrow$$
$$x^5 - 5x^3 + 5\sqrt{2}x^2 - \frac{15}{4}x + \frac{\sqrt{2}}{2} \equiv x^5 - 5x^3 + a_3x^2 + a_4x + a_5$$

igualando os coeficientes adequadamente, encontramos

$$a_3 = 5\sqrt{2}\,,\ a_4 = -\frac{15}{4}\ \ e\ \ a_5 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

9)

10) Mostre que a desigualdade

$$sen^{2n}(\theta)\cdot cos^{2n}(\theta) \le \frac{sen^{4n}(\theta)}{\log_2\left(2+2^{tan^{2n}(\theta)}\right)} + \frac{\log_2\left(2+2^{tan^{2n}(\theta)}\right)\cdot cos^{4n}(\theta)}{4}$$

É verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}^*\ e\ \theta \neq \frac{\pi}{2}+k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Determine para quais valores reais de θ a igualdade ocorre.

Solução:

Fazendo:

$$sen^{2n}(\theta) = x\ ,\ cos^{2n}(\theta) = y\ e\ z = \log_2\left(2+2^{tan^{2n}(\theta)}\right)\ temos,$$

$$xy \le \frac{x^2}{z} + \frac{z\cdot y^2}{4} \Rightarrow 4zxy \le 4x^2 + z^2y^2 \Rightarrow 4x^2 - 4zxy + z^2y^2 \ge 0 \Rightarrow$$

$$(2x - zy)^2 \ge 0$$

$que\ é\ sempre\ verdadeiro$. A igualdade ocorre se e somente se $2x = zy, ou\ seja,$

$$2\cdot sen^{2n}(\theta) = cos^{2n}(\theta)\cdot\log_2\left(2+2^{tan^{2n}(\theta)}\right) \Rightarrow$$
$$2\cdot tan^{2n}(\theta) = \log_2\left(2+2^{tan^{2n}(\theta)}\right)$$

Fazendo,

$$w = tan^{2n}(\theta), temos$$

$$\log_2(2+2^w)=2w \Rightarrow$$
$$2^{2w}-2^w-2=0$$

Fazendo,

$$r=2^w\,,vem$$

$r^2-r-2=0$, resolvendo essa equação do segundo grau temos

$$r=-1(não\ convém)\ ou\ r=2, assim$$

$$2=2^w \Rightarrow w=1 \Rightarrow tan^{2n}(\theta)=1 \Rightarrow \tan\theta=1\ ou\ \tan\theta=-1$$

Resolvendo essas duas equações trigonométricas pelos métodos tradicionais vê-se que a resposta do problema é

$$\theta=\frac{\pi}{2}+\frac{k\pi}{2}\,,k\in\mathbb{Z}.$$

Dúvidas, críticas e sugestões podem ser enviadas para o email:
p.pantoja@hotmail.com