

Semana Santa do Gagá

Problemas direcionados aos vestibulandos de Escola Naval, ITA e IME

1) Prove que para todo inteiro n , $n^7 - n$ é divisível por 7.

2) Prove que para todo inteiro n , o número $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ é divisível por 133.

3) Prove que para todo $a > 0$, é válida a desigualdade $\sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \dots + \sqrt{a}}}} < \frac{1 + \sqrt{4a + 1}}{2}$

4) Resolva a equação $|x^2 - x - 6| = x + 2$

5) Resolva a inequação $|x^2 + 3x| + x^2 - 2 \geq 0$

6) Resolva o sistema de equações $|x^2 - 2x| + y = 1$
 $x^2 + |y| = 1$

7) Resolva a inequação $|x-1| - |x| + |2x + 3| > 2x + 4$

8) Resolva a equação $|x^2 - 9| + |x^2 - 4| = 5$

9) Resolva a inequação $|x^2 - 3x - 3| > |x^2 + 7x - 13|$

10) Resolva a equação $x|x+1| + a = 0$ para todo número real a .

11) Prove que se os números x e y são de mesmo sinal, então:

$$\left| \frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} \right| + \left| \frac{x+y}{2} + \sqrt{xy} \right| = |x| + |y|$$

12) Calcule \log_{25}^{24} se $\log_6^{15} = \alpha$ e $\log_{12}^{18} = \beta$.

13) Resolva o sistema:

$$\begin{cases} \log_2 x + \log_4 y + \log_4 z = 2 \\ \log_3 y + \log_9 z + \log_9 x = 2 \\ \log_4 z + \log_{16} x + \log_{16} y = 2 \end{cases}$$

14) Prove a desigualdade:

$$\frac{a^3 + b^3}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2} \right)^3 \text{ onde } a > 0, b > 0$$

15) Prove que a desigualdade

$$-1 \leq \frac{\sqrt{3} \operatorname{sen} x}{2 + \cos x} \leq 1$$

é válida para qualquer x real.

16) Prove que para α arbitrário, a desigualdade: $4 \operatorname{sen} 3\alpha + 5 \geq 4 \cos 2\alpha + 5 \operatorname{sen} \alpha$ é válida.

17) Prove que as seguintes desigualdades são válidas para todo x real:

a) $\cos(\cos x) > 0$

b) $\cos(\operatorname{sen} x) > \operatorname{sen}(\cos x)$

18) Prove que se $x^2 + y^2 = 1$, então $-\sqrt{2} \leq x + y \leq \sqrt{2}$

19) Resolva a equação $x - 1 = \sqrt{a - x^2}$

20) Resolva a equação $3^x \cdot 2^{\frac{3x}{x+2}} = 6$.

21) Resolva a inequação $5 + 2 \cos 2x \leq 3|2 \operatorname{sen} x - 1|$

22) Resolva a inequação

$$\log_5 \operatorname{sen} x > \log_{125} (3 \operatorname{sen} x - 2)$$

23) Considere 3 misturas constituídas de 3 componentes ouro, prata e bronze. A primeira mistura contém somente os componentes ouro e prata na razão em massa 3:5, a segunda mistura contém somente os componentes prata e bronze na razão em massa de 1:2, e a terceira mistura contém somente os componentes ouro e bronze na razão em massa 2:3. Em que proporção deve ter estas misturas para que a mistura resultante dos componentes ouro, prata e bronze fiquem na proporção em massa de 3:5:2?

24) As porcentagens (em massa) de álcool em três soluções formam uma progressão geométrica. Se nós misturamos as 3 soluções na proporção em massa de 2:3:4, obtemos uma solução contendo 32% de álcool. Se nós misturamos as 3 soluções na proporção 3:2:1, obtemos uma solução contendo 22% de álcool. Qual é a porcentagem de álcool em cada solução?

25) Calcule o valor de x :

$$(-1)^3 \cdot \cos \frac{\pi}{7} \cdot \cos \frac{2\pi}{7} \cdot \cos \frac{4\pi}{7} = 2^x$$

26) Verifique a validade da equação:

$$\frac{1 - \tan^2 15^\circ}{1 + \tan^2 15^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

27) Prove que para n natural a seguinte identidade é válida:

$$\sin \frac{\pi}{3} + \sin \frac{2\pi}{3} + \dots + \sin \frac{n\pi}{3} = 2 \sin \frac{n\pi}{6} \sin \frac{(n+1)\pi}{6}$$

28) Prove que

$$\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}.$$

29) Elimine θ e φ das relações

$$a \cdot \sin^2 \theta + b \cos^2 \theta = 1,$$

$$a \cdot \cos^2 \varphi + b \sin^2 \varphi = 1,$$

$$a \cdot \operatorname{tg} \theta = b \operatorname{tg} \varphi$$

Encontre também a relação entre a e b se $0 < b < 1$, $a > 1$

30) Resolva a equação

$$(1 - \operatorname{tg} x)(1 + \operatorname{sen} 2x) = 1 + \operatorname{tg} x$$

31) Encontre a solução de $\cos(2 \arcsen(2/3))$

32) Encontre o ângulo $2 \cdot \operatorname{arctg}(-3)$.

33) Resolva a equação $2 \operatorname{sen} x = 5x^2 + 2x + 3$.

34) De quantas formas o inteiro positivo n pode ser escrito como uma soma ordenada de ao menos um inteiro positivo? Por exemplo,

$4 = 2 + 2 = 1 + 3 = 3 + 1 = 1 + 1 + 2 = 1 + 2 + 1 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1$, assim, para $n = 4$, existem 8 partições ordenadas.

35) São dados n pontos distintos distribuídos ao longo de uma circunferência, são desenhadas cordas conectando cada par de pontos. Se três cordas quaisquer não se interceptam no mesmo ponto, quantos pontos de intersecção entre as cordas existem?

36) Um jardineiro planta 3 mangueiras, 4 jambeiros e 5 goiabeiras em fileira. Ele planta as árvores de maneira aleatória. Qual é a probabilidade de que 2 goiabeiras não estejam vizinhas?

37) Considere 10 pessoas sentadas ao longo de uma mesa circular. De quantas formas diferentes elas podem mudar de lugar de tal forma que cada pessoa tenha um vizinho diferente à direita?

38) Imagine que você irá comprar um sorvete para cada criança de um total de n crianças, e existem k sabores disponíveis. Considerando que nenhum sabor pode ser misturado, calcule o número de maneiras que podemos comprar os sorvetes usando todos os sabores disponíveis.

39) Quantos pares ordenados de números reais (a, b) com $a > 0$ e $b < 1$ existem tais que os números $2a + 5b$ e $4a + b$ sejam inteiros?

40) Mostre que a expansão decimal de qualquer número racional é periódica.