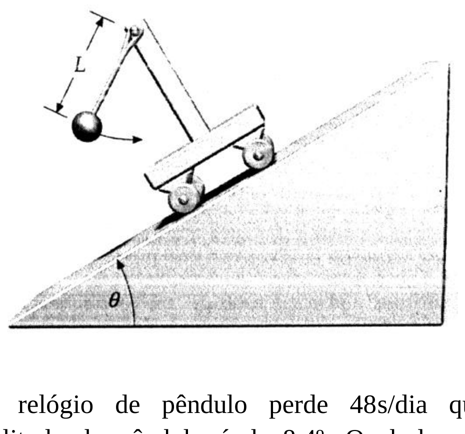
1.
 a) Mostre que $A_0 \cos(\omega t + \delta)$ pode ser escrito como $A_s \operatorname{sen}(\omega t) + A_c \cos(\omega t)$, e determine A_s e A_c em termos de A_0 e de δ.
 b) Relacione A_s e A_c para a posição inicial e a velocidade de uma partícula submetida ao movimento harmônico simples.

2. Um cabo com guincho tem uma seção transversal $1{,}5\text{cm}^2$ e um comprimento de 2,5m. O módulo de Young do cabo é de $150\ \text{GN/m}^2$. Um bloco de motor de 950kg é puxado pela extremidade do cabo.
 a) Quanto o cabo alongará em seu comprimento?
 b) Tratando o cabo como uma mola simples, qual será a frequência de oscilação do bloco de motor na extremidade da corda?

3. Mostre que a energia total de um pêndulo simples oscilando com uma pequena amplitude ϕ_0 é de aproximadamente $E \approx \frac{1}{2} mgL\phi_0^2$
 Sugestão: Use a aproximação $\cos\ \phi \approx 1 - \frac{1}{2}\phi^2$ para valores pequenos de ϕ.

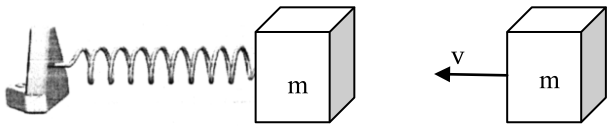
4. Um pêndulo simples de comprimento L é preso a um carrinho que escorrega sem atrito para baixo, em um plano inclinado de um ângulo θ com a horizontal, como mostra a figura abaixo.
 Determine o período de oscilação do pêndulo sobre o carrinho.



5. Um relógio de pêndulo perde 48s/dia quando a amplitude do pêndulo é de 8,4º. Qual deveria ser a amplitude do pêndulo para que o relógio marcasse a hora correta?

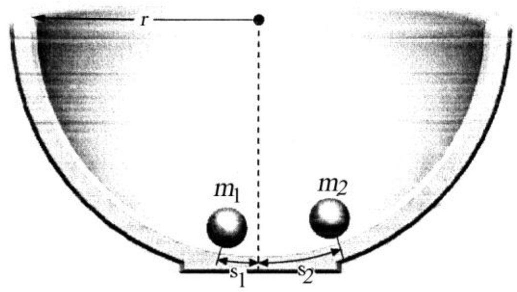
6. Um relógio de pêndulo ganha 5min a cada dia. Qual a amplitude angular que o pêndulo deveria manter para marcar as horas corretamente?

7. A figura abaixo mostra um sistema massa-mola vibrando sobre uma superfície sem atrito e um segundo sistema, como massa igual ao primeiro, que está em movimento através de sua massa vibrante com velocidade v. O movimento da massa vibrante é dado por $x(t) = (0{,}1\text{m}) \cos(40\ \text{s}^{-1}\ t)$, onde x é o deslocamento da massa a partir de sua posição de equilíbrio. As duas massas colidem elasticamente no exato instante em que a massa vibrante passa por sua posição de equilíbrio indo para a direita.



 a) Qual deve ser a velocidade v da segunda massa para que o sistema massa-mola fique em repouso após a colisão elástica?
 b) Qual será a velocidade da segunda massa após o choque elástico?

8. Uma pequena partícula de massa **m** desliza sem atrito em uma bacia esférica de raio **r**.



 a) Mostre que o movimento da partícula é o mesmo que ela teria se estivesse presa a uma barra de comprimento **r**.
 b) A figura acima mostra uma partícula de massa $\mathbf{m_1}$ que tem um deslocamento de uma pequena distância $\mathbf{s_1}$ a partir da base da bacia esférica, onde $\mathbf{s_1}$ é muito menor do que r. Uma segunda partícula de massa $\mathbf{m_2}$ é deslocada em direção oposta de uma distância $s_2 = 3s_1$, onde $\mathbf{s_2}$ é muito menor do que **r**. Se as partículas forem abandonadas ao mesmo tempo, onde elas se encontrarão? Explique.

9. Agora considere uma bola uniforme muito pequena de massa m e raio R rolando sem escorregar próximo à base da bacia esférica da figura acima.
 a) Escreva uma expressão para a energia total da bola em função de sua velocidade e da distância (presumida pequena) desde o centro da bacia esférica.
 b) Comparando essa expressão com aquela da energia total de uma bola de massa **m** deslizando sem atrito dentro de um lado da bacia esférica, determine a frequência de oscilação da bola em torno do centro da bacia.

10. Um cubo de madeira com lado de comprimento **a** e massa **m** flutua na água com uma de suas faces paralelas à superfície da água. A densidade da água é ρ. Determine o período de oscilação na direção vertical se o cubo for levemente empurrado para baixo.

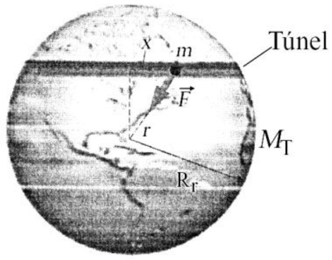
11. A aceleração devido à gravidade **g** varia com a localização geométrica devido à rotação da Terra e porque a Terra não é exatamente esférica. Isso foi discutido primeiramente no século XVII, quando se observou que um relógio de pêndulo cuidadosamente ajustado para marcar o tempo correto em Paris atrasava cerca de 90s/dia próximo ao equador.
    a) Mostre que uma pequena mudança na aceleração da gravidade Δg produz uma mudança pequena no período ΔT de um pêndulo, onde $\Delta T / T \approx -\frac{1}{2}\Delta g / g.$ (Use diferenciais para aproximar ΔT e Δg.)
    b) Qual é a dimensão da variação de **g** necessária para mudar um período em 90s/dia?

12. Uma plataforma nivelada vibra horizontalmente com um movimento harmônico simples com um período de 0,8s.
    a) Uma caixa sobre a plataforma começa a deslizar quando a amplitude de vibração alcança 40cm; qual é o coeficiente de atrito estático entre a caixa e a plataforma?
    b) Se o coeficiente de atrito entre a caixa e a plataforma for 0,40, qual seria a amplitude máxima de vibração antes de a caixa começar a deslizar?

13. Se dois blocos de massas m_1 e m_2 são presos através de suas extremidades a uma mola de constante k, e o conjunto entra então em oscilação, mostre que a frequência de oscilação é $\omega = (k/\mu)^{1/2}$, onde $\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$ é a massa reduzida do sistema.

14. Um dos modos de vibração da molécula de $HC\ell$ tem a freqüência de $8{,}969 \times 10^{13} s^{-1}$. Usando a relação obtida na questão 13, determine a "constante de mola" para a molécula de $HC\ell$.

15. Um túnel reto é escavado através da Terra, como mostra a figura abaixo. Suponha que as paredes do túnel são isentas de atrito.
    a) A força gravitacional exercida pela Terra em uma partícula de massa **m** a uma distância **r** do centro da Terra quando $r < R_T$ é $F_r = -(GmM_T/R_T^3)r$, onde M_T é a massa da Terra e R_T o seu raio. Mostre que a força resultante na partícula de massa **m** atuando a uma distância x do meio do túnel é dada por $F_x = -(GmM_T/R_T^3)x$, e que o movimento da partícula é do tipo do movimento harmônico simples.
    b) Mostre que o período do movimento é dado por $T = 2\pi\sqrt{R_T / g}$ e calcule seu valor em minutos. (Esse é o mesmo período de um satélite orbitando próximo à superfície da Terra e é independente do comprimento do túnel.)



GABARITO

1. Aplicando a identidade trigonométrica
   $\cos\ (w \cdot t + \varphi) = \cos w \cdot t \cdot \cos\varphi - \sin w \cdot t \cdot \sin \varphi$

   Portanto:
   a) $x = A_o \cdot \cos(wt + \varphi) = A_o \cdot [\cos wt \cdot \cos\varphi - \text{sen}\, wt \cdot \text{sen}\,\varphi]$

   $$x = \underbrace{-A_o \cdot \text{sen}\,\varphi \cdot \text{sen}\, w \cdot t}_{A_s \cdot \text{sen}\, wt} + \underbrace{A_o \cdot \cos\varphi \cdot \cos w \cdot t}_{A_c \cdot \cos wt} \begin{cases} A_s = -A_o\, \text{sen} \cdot \varphi \\ A_c = A_o \cdot \cos\varphi \end{cases}$$

   b) Em $t = 0$
   $x\ 0 = A_0 \cdot \cos\varphi = A_C$
   $V = \frac{dx}{dt} = \frac{d[A_s \cdot \text{sen}\, wt + A_c \cdot \cos wt]}{dt}$
   $V = A_s \cdot w \cdot \cos w \cdot t - A_c\, \text{sen}\, wt$

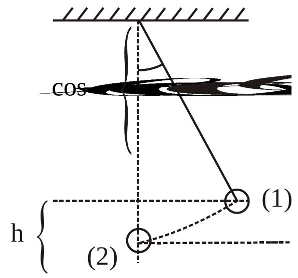
   $$\boxed{V(0) = w \cdot A_s = -w \cdot A_o \cdot \text{sen}\,\varphi}$$

2. Definição:
   Módulo de Young $\Rightarrow y = \dfrac{\frac{F}{A}}{\frac{\Delta\ell}{\ell}} \therefore \Delta\ell = \dfrac{F \cdot \ell}{A \cdot y} = \dfrac{m \cdot g\ \ell}{A \cdot y}$

   a) $\Delta\ell = \dfrac{m \cdot g \cdot \ell}{A \cdot y}$

   b) $f = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m}} \Rightarrow k = \dfrac{F}{\Delta\ell} = \dfrac{m \cdot g}{\Delta\ell} \Rightarrow f = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{g}{\Delta\ell}}$

3.



$E = m \cdot g \cdot h$
$E = m \cdot g \cdot \ell \cdot (1 - \cos\alpha)$
Para: $\alpha << 1 \Rightarrow \cos\alpha = 1 - \frac{1}{2} \cdot \alpha^2$
$E = m \cdot g \cdot \ell \cdot \left[\cancel{1} - \cancel{1}\left(-\frac{1}{2} \cdot \cos\alpha^2\right)\right] = \frac{1}{2} m \cdot g \cdot \ell \cdot \alpha^2$

4.

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\ell}{g_{real}}} \qquad \underline{g_{real} = g - g \cdot \text{sen}\,\theta}$$

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\ell}{g - g \cdot \text{sen}\,\theta}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g \cdot (1 - \text{sen}\,\theta)}}$$

5. O período do pêndulo depende da seguinte expressão:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\ell}{g}} \cdot \left[1 + \frac{1}{2^2} \cdot \text{sen}^2\frac{1}{2}\varphi_0 + \frac{1}{2^2}\left(\frac{3}{4}\right)^2 \text{sen}^4\frac{1}{4} \cdot \varphi_0 + ...\right]$$

a) Fração de perda diária:

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{48s}{1dia} \times \frac{1dia}{24h} \times \frac{1h}{3600s} = \frac{48}{86.400}$$

b) Usando a aproximação de 2ª ordem:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\left[1 + \frac{1}{2^2} \cdot \text{sen}^2\frac{1}{2}\varphi_0\right]$$

$$\Delta T = T_{leito} - T_{real} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\left\{\left[1 + \frac{1}{2^2}\ \text{sen}^2\ \frac{1}{2}\ 8{,}4^0\ \right] - \right.$$

$$\left. - \left[1 + \frac{1}{2^2} \cdot \text{sen}^2\frac{1}{2}\varphi_0\right]\right.$$

$$\Delta T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\ell}{g}}\left[\frac{1}{2^2} \cdot \text{sen}^2\frac{1}{2}\ 8{,}4^0\ - \frac{1}{2^2} \cdot \text{sen}^2\frac{1}{2}\varphi_0\right]$$

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{4}\text{sen}^2 4{,}2^0 - \frac{1}{4}\text{sen}^2 \cdot \frac{1}{2}\varphi_0$$

$$\frac{48}{86.400} = \frac{1}{4} \cdot \text{sen}^2 4{,}2^0 - \frac{1}{4}\text{sen}^2\frac{1}{2}\varphi_0$$

Assim: $\text{Sen}\frac{1}{2}\varphi = 0{,}05605 \rightarrow \varphi = 0{,}43^0$

Isto nos mostra que à medida que aumentamos amplitude, um relógio de pêndulo tende a atrasar $\varphi = 8{,}4^0 \Rightarrow$ há uma perda de 48^0s.

6.

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{5min}{dia} \times \frac{1dia}{24h}\ \frac{1h}{60\,min} = \frac{5}{14{,}40}$$

$$\frac{\Delta T}{T} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\left\{1 - \left[1 + \frac{1}{2^2}\text{sen}^2\frac{1}{2}\varphi\right]\right\}$$

$$\underbrace{\frac{\Delta T}{T}} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\left[-\frac{1}{2^2}\text{sen}^2\frac{1}{2}\varphi\right]$$

$$\frac{5}{1440} = -\frac{1}{4}\text{sen}^2\frac{1}{2}\varphi \Rightarrow \varphi = 13{,}5°$$

7.

a) Para colisões elásticas ⇒ conservação de energia
Objeto 1: Massa com mola acoplada
Objeto 2: Massa em colisão

(I.) $M\,V_{1i} + M\,V_{2i} = M\,V_{2f} \rightarrow V_{1i} + V_{2i} = V_{2f}$ (cons. qtd. mov.)

(II)

$$\frac{1}{2}mV_{1i}^2 + \frac{1}{2}mV_{2i}^2 = \frac{1}{2}mV_{2f}^2 \Rightarrow V_{1i}^2 + V_{2i}^2 = V_{2f}^2 \quad \text{cons. energia}$$

De (II)

subst. de (I)

$$V_{2i}^2 = V_{2f}^2 - V_{1i}^2 = \ V_{2f} - V_{1i}\quad V_{2f} + V_{1i}$$

$$V_{2i}^2 = \ V_{1i} + V_{2i} + V_{1i}\quad V_{1i} + V_{2i} - V_{1i}\ = 2V_{1i} + V_{2i}\ \cdot\ V_{2i}$$

$$V_{2i}^2 = 2 \cdot V_{1i} \cdot V_{2i}\ + V_{2i}^2 \Rightarrow 2\,V_{1i}\ \cdot V_{2i}\ = 0$$

Como: $V_{1i} \neq 0 \rightarrow V = V_{2i} = 0$

b) $V_{2f} = V_{1i} \rightarrow V_{2i} = 0$ do $E_{q.}$ I

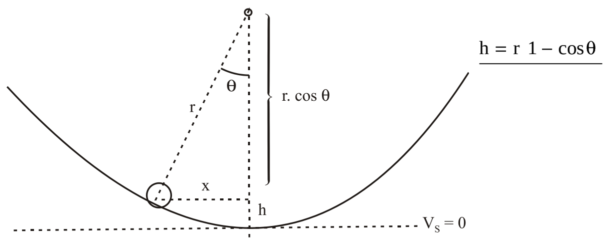
$$\boxed{V_{1i} = V_{Max} = Aw}$$

8.

a) Comparando as forças da situação descrita com a do pêndulo, verificamos que, excetuado o atrito, todas correspondem.
• Força normal = idêntica à tensão no fio (mantém a partícula em movimento circular.
• Para pequenos valores $(\theta)_{pêndulo} = (S)_{Bacia}$ a força mestarrenlora gera um movimento oscilatómo

b) As partículas irão se encontrar no fundo. Para S_1 e S_2 << r (figura) as partículas tendem a realizar um movimento pendular de igual comprimento, consequentemente terão o mesmo período.

9.



$E = U + K = U + E_{tras|} + E_{rot}$

$U_{(X)} = mgr\,(1 - \cos\theta)\ \therefore\ R << r$
dimensão
da partícula

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + ...$$

$$\cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2!} \Rightarrow V_{(x)} \cong mgr\left[1 - \left(1 - \frac{\theta^2}{2!}\right)\right] = \frac{1}{2}mg \cdot r\theta^2$$

$$\theta \cong \frac{x}{r} \quad \therefore \quad V_{(x)} = \frac{Mg \cdot x^2}{2 \cdot r}$$

$$E = \frac{Mg \cdot x^2}{2 \cdot r} + \frac{1}{2} \cdot mv^2 + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot Iw^2}_{\text{Energia Rotação}} = \frac{mg \cdot u^2}{2r} + \frac{1}{2}\, mv^2\, \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\, mR^2\right) \cdot \left(\frac{V}{R}\right)^2$$

b)

$$E = \frac{mg\,x^2}{2r} + \frac{7}{10} \cdot mv^2 \;\; \text{Constante} \;\Rightarrow x = x_o \cos\; wt + \varphi \;\cdot$$

$$V = -W \cdot x_o \,\text{sen}\;\; wt + \varphi$$

$$E = \frac{mq}{2 \cdot r} \cdot \left| x_o \cos\;\; wt + \varphi \right|^{\,2} + \frac{7}{10} m \;\; -w\,x_o \,\text{sen}\;\; wt + \varphi \;\; =$$

$$= \frac{mg \cdot x_0^2}{2 \cdot r} \cdot \cos^2\;\; wt + \varphi \;\; + \frac{7}{10} w^2 \cdot x_0^2 \,\text{sen}^2\;\; wt + \varphi$$

$$\frac{mg\,x_0^2}{2.r} = \frac{7 \cdot m\omega^2 \cdot x_0^2}{10} \quad \text{ou} \quad \frac{g}{r} = \frac{7\omega^2}{5}$$

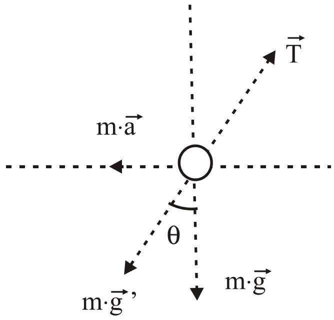
$$w = \sqrt{\frac{5g}{7r}}$$

Veja: No programa do ITA e IME não vislumbra a energia de rotação.

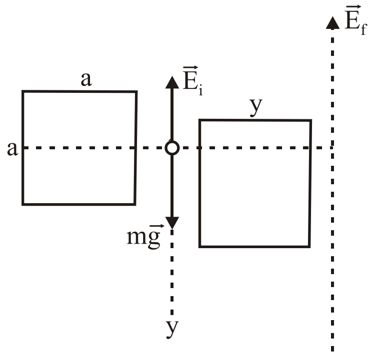
$$\boxed{E = V + E_{trasl}} \Rightarrow \text{Desenvolva!}$$

9.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g'}} \quad \rightarrow g' = \frac{g}{\cos\theta} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell.6s\theta}{g}}$$



10.



$$T = \frac{2\pi}{w}$$

$$m_g - E_i = 0$$

$$m_g - E_f^{'} = m_{ay}$$

Empuxo Inicial = E_i
Empuxo Final = E_f

$$\underbrace{E_i - E'_f} = ma_y$$

$$\Delta E = ma_y = d\;\; E_i \;\; =$$

$$-\rho v_g = -a^2\rho g \cdot y = m\,\frac{d^2y}{dt^2}$$

$$m \cdot \frac{d^2y}{dt^2} = -\,a^2.\rho g \cdot y$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\,\frac{a^2 \cdot \rho \cdot g}{m} \cdot y = -\,w^2 \cdot y$$

Onde: $w^2 = \dfrac{a^2 \cdot \rho \cdot g}{m} \Rightarrow w = a \cdot \sqrt{\dfrac{\rho \cdot g}{m}}$

$$T = \frac{2\pi}{a\sqrt{\dfrac{\rho \cdot g}{m}}} = \frac{2\pi}{a} \cdot \sqrt{\frac{m}{\rho \cdot g}} \quad \text{UFA!!!}$$

11.

a) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{g}} \Rightarrow \dfrac{dT}{d \cdot g} = \dfrac{d\left[2\pi \cdot \sqrt{\ell} \cdot g^{-1/2}\right]}{d \cdot g} = -\pi\sqrt{\ell} \cdot g^{-3/2} = -\dfrac{T}{2g}$

$$\frac{dT}{T} = -\,\frac{1}{2} \cdot \frac{d \cdot g}{g}$$

Aproximando dT e dg por Δt e Δg para Δg << g

$$\frac{\Delta T}{T} \Rightarrow -\,\frac{1}{2}\,\frac{\Delta g}{g}$$

b) $\Delta_g = -2_g \cdot \dfrac{\Delta T}{T} \quad \therefore \dfrac{\Delta T}{T} = -\,\dfrac{90s}{dia}\;x\;\dfrac{1h}{24h}\,x\,\dfrac{1h}{36005} \approx 1{,}04.10^{-3}$

$\downarrow$

$$\Delta_g = -2 \cdot\;\; 9{,}81 \;\cdot\;\; -1{,}04 \cdot 10^{-3} \;\; = 2{,}04\,\text{cm}\,|\,s^2$$

12.

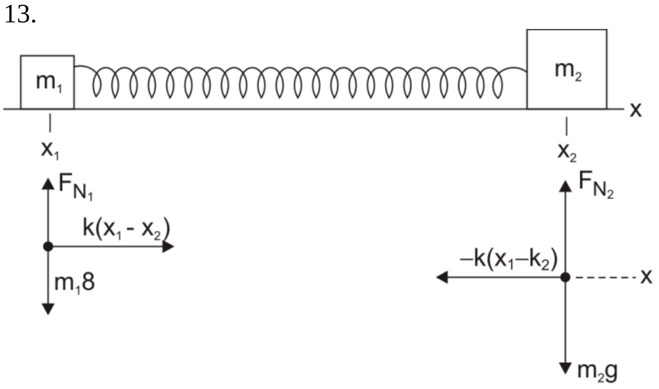
a) Aplicando ΣF_n m.a_n para a caixa sobre plataforma fmax = m.amax
b) Aplicando $\Sigma F_y = f_N - m_g = 0$ e tmax = $F_n\ \mu_{at}$

$$\mu_{at}\,\cancel{m}g = \cancel{m}a_{max}$$

$$\mu_{at} = \frac{a_{max}}{g} = \frac{A \cdot w^2}{g}$$

$$\mu_{at} = \frac{Aw^2}{g} = \frac{4\pi^2 A}{T^2 g}$$

13.



$$k\ \chi_1 - \chi_2\ = m_1 a_1 = m_1 \frac{d^L \chi_1}{dt^2}$$

ou

$$a_1 = \frac{d^2\chi_1}{dt^2} = \frac{k}{m_1}\ \chi_1 - \chi_2$$

$$-k\ \chi_1 - \chi_2\ = m_2 a_2 = m_1 \frac{d^2\chi_2}{dt^2}$$

$$a_2 = \frac{d^2\chi_2}{dt^2} = \frac{k}{m_2}\ \chi_2 - \chi_1$$

$$\frac{d^2\ \chi_2 - \chi_1}{dt^2} = \frac{d^2\chi}{dt^2} = -k\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\chi$$

onde $\chi = \chi_2 - \chi_1$

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \text{ou}$$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

$$\frac{d^2\chi}{dt^2} = -\frac{k}{\mu}k$$

$$\frac{d^2\chi}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

$$\chi = \chi_0 \cos\ \omega t + \delta$$

onde $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

$$\chi = \chi_0 \cos\ \omega t + \delta$$

onde $\omega = \boxed{\sqrt{\dfrac{k}{\mu}}}$

14.

$$w = \sqrt{\frac{k}{\mu}} \Rightarrow w = \left(\frac{k}{u}\right)^{1/2} \rightarrow \underbrace{\mu = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2}}_{\text{Problema14}}$$

$$k = \mu \cdot w^2 \rightarrow k = \frac{m_1 \cdot m_2 w^2}{m_1 + m_2}$$

15.

$$F_x = F_r \operatorname{sen}\theta = -\frac{G_m \cdot M_t}{R_T^3} \cdot \frac{r \cdot x}{r} = \frac{-G_m \cdot M_T}{R_T^3} \cdot x$$

$$\underbrace{T' = \frac{2\pi}{w}} \rightarrow -\frac{G_m \cdot M_T}{R_T^3} \cdot x = ma \rightarrow a = \frac{-G \cdot M_T}{R_T^3} \cdot x = -w^2 \cdot x$$

$$w = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{R_T^3}} \quad \therefore \text{Veja}: \underbrace{GM_T = g_T \cdot R_T^2}_{\text{DICA}}$$

$$\downarrow$$

$$w = \sqrt{\frac{g \cdot R_T^2}{R_T^3}} = \sqrt{\frac{g}{R_T}}$$

$$\downarrow$$

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{g}{R_T}}} = 2\pi\sqrt{\frac{R_T}{g}}$$

CGQS: 27/10/09
Rev.: TM


ORGANIZAÇÃO EDUCACIONAL
FARIAS BRITO
OLIMPÍADA IBERO-AMERICANA DE FÍSICA 2008 - MÉXICO
FARIAS BRITO
BRILHANDO NO CEARÁ, NO BRASIL E NO MUNDO.
1º LUGAR GERAL
TOP GOLD
(A medalha de ouro com a maior pontuação - NOTA: 42,23)
PARABÉNS, BRASIL.
O melhor entre 18 países.
PARABÉNS, CEARÁ.
O primeiro lugar entre todos os estados de 18 países.
PARABÉNS, FARIAS BRITO.
1º LUGAR GERAL entre todas as escolas de 18 países.
PARABÉNS, MARIANA.
1ª MULHER NA HISTÓRIA DA IBERO A CONQUISTAR O FIRST PRIZE (1º Lugar Geral, recebendo o TOP GOLD).
O Farias Brito conquista uma vitória histórica com sua aluna Mariana Quezado Costa Lima, com o maior número de pontos entre 18 países, obtendo a medalha de ouro Top Gold e a maior pontuação entre todos os participantes.
ORDEM E PROGRESSO
MARIANA QUEZADO
MEDALHA DE OURO
ALUNA FB DESDE A 6ª SÉRIE
ORGANIZAÇÃO EDUCACIONAL
FARIAS BRITO
Lições para toda a vida.