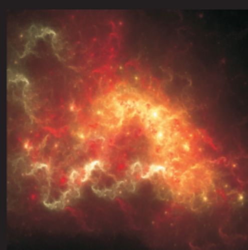
Coleção **olimpo**

IME ITA







Sequência Numérica

Definição 4.1.: Uma sequência de números reais é uma função $x:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ para a qual denotamos o valor de x em n por x_n em vez de $x(n)$.

Geralmente usamos a notação $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ para representar uma sequência $x:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$. Às vezes a notaremos também por $(x_1, x_2 ..., x_n, ...)$. Dizemos que x_n é o termo de ordem n ou que x_n é o n - ésimo termo da sequência.

Quando quisermos explicitar que a imagem da sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está contida em $A\subset\mathbb{R}$ escreveremos $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset A$.

Como sequências são funções, as definições de função limitada, crescente, decrescente, monótona, etc., também fazem sentido para sequências.

Exemplo 4.2.: Seja $a\in\mathbb{R}$ e tomemos $x_n = a$ para todo $n\in\mathbb{N}$. A sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é constante. É imediato que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada.

Exemplo 4.3.: A sequência $(1,0,1,0,1,0,...)$ é limitada mas não é monótona.

Exemplo 4.4.: Sejam a , $r\in\mathbb{N}$. Considere $x_1 = a$, $x_2 = a+r$, $x_3 = a+2r$, de maneira geral, $x_n = a+(n-1)r$. A sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma Progressão Aritmética de primeiro termo a e razão r. Se $r=0$, então $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é constante e, portanto, limitada. Se $r>0$, então $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é estritamente crescente e, portanto, limitada inferiormente. Finalmente, se $r<0$, então $(x_n)n\in\mathbb{N}$ é estritamente decrescente e, portanto, limitada superiormente.

Definição 4.5.: Dizemos que $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é uma subseqüência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se existe uma sequência $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{N}$ estritamente crescente tal que $y_k = x_{n_k}$ para todo $k\in\mathbb{N}$.

Exemplo 4.6.: Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a Progressão Aritmética de termo inicial a e razão r. A Progressão Aritmética $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de termo inicial a e razão $2r$ é uma subseqüência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. De fato, tomando $n_k = 2k-1(k\in\mathbb{N})$ obtemos

$$x_{nk} = a+(n_k-1)r = a+(2k-2)r = a+(k-1)(2r) = y_k .$$

4.2.: Sequências convergentes

Intuitivamente, uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente para x se seus termos se aproximam de x quando n cresce. Esta ideia não está errada. Porém, ela pode induzir a uma ideia equivocada de convergência. Somos tentados a dizer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para x quando a distância entre x_n e x diminui à medida que n cresce, ou seja, a função $f(n)=|x_n - x|$ é decrescente. Não é bem assim. Veja a figura 1. Ela foge um pouco do assunto "sequências em de números reais" mas ilustra bem o que queremos dizer por "se aproximar". Imagine que, partindo do ponto A, percorremos no sentido anti-horário o caminho desenhado como indicado pelas setas. Ninguém duvida, e com razão, de que estaremos assim nos aproximando do ponto O. Porém, a ideia de que a nossa distância ao ponto O decresce com o tempo mostra-se errada. Convença-se disto percebendo que passamos primeiro por B antes de chegar a C e, entretanto, o segmento $\overline{BO}$ é menor que o segmento $\overline{CO}$. De fato, a distância a O cresce quando percorremos o segmento $\overline{BC}$. Podemos perceber que existem muitos trechos do caminho sobre os quais a distância a O é crescente com o tempo, de modo que não existe nenhum ponto a partir do qual a distância a O passe a ser decrescente com o tempo.

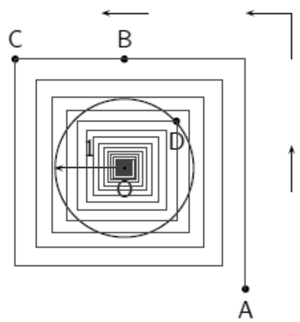


Figura 1 – Espiral da convergência

Continuemos analisando a figura 1 em busca da boa definição de convergência. Observamos que nossa distância a O fica tão pequena quanto quisermos, bastando para isto que continuemos andando por um tempo suficiente longo. Por exemplo, nossa distância a O será menor que 1 depois que passarmos pelo ponto D. Ou seja, em certo instante entramos na bola de raio 1 centrada em O e dela não saímos mais. Da mesma forma, a partir de outro instante (futuro) entramos na bola de raio $1/2$, centrada em O, e aí ficamos. De modo geral, dado qualquer número positivo ε, existe um instante a partir do qual nossa distância a O será menor que ε. Aí está a definição. Para sequências de números reais ela é expressa da seguinte maneira.

Definição 4.7.: Uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é dita convergente se existe $x \in \mathbb{R}$ de modo que

$$\forall \varepsilon > 0 ,\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que } n \geq N \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon .$$

Neste caso, escrevemos $x_n \to x$ e dizemos que x é limite da sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou que x_n converge para (ou tende a) x quando n tende a mais infinito $(n \to +\infty)$. Se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não é convergente, então dizemos que ela é divergente.

Exemplo 4.8.: Seja $x \in \mathbb{R}$ e considere a sequência dada por $x_n = x$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Temos que $x_n \to x$. De fato, $|x_n - x| = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, podemos escrever

$$\forall \varepsilon > 0 ,\ n \geq 1 \ \to\ |x_n - x| < \varepsilon$$

Exemplo 4.9.: Considere a sequência $x_n = 1/n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Vamos mostrar que $x_n \to 0$. Dado $\varepsilon > 0$, tomemos $N \in \mathbb{N}$ tal que $N > 1/\varepsilon$. Temos então $0 < 1/N < \varepsilon$. Mas se $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq N$, então $x_n = 1/n \leq 1/N = x_N$. Logo, podemos escrever

$$\forall \varepsilon > 0 ,\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que } n \geq N \ \to\ |x_n - 0| < \varepsilon .$$

O leitor talvez conheça a notação $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$ para $x_n \to x$. Vamos refletir sobre ela. Por enquanto, façamos de conta que não conhecemos a definição de limite. Suponhamos que ao abrir um livro de Análise, pela primeira vez, encontremos as seguintes inscrições:

$$x_n \to 0 \text{ e } x_n \to 1 .$$

Não ficaríamos chocados. Porém, se estivesse escrito

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = 0 \text{ e } \lim_{n\to+\infty} x_n = 1$$

Seríamos levados a concluir que $0 = 1$. Ora, é o sinal de igual "=" que nos leva a esta conclusão. Se não tivermos a unicidade do limite, então a notação $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$ é fortemente enganosa. Apenas para constar, informo ao leitor interessado a definição de convergência num contexto mais geral (de espaços topológicos), do qual a nossa é um caso particular, permite a não unicidade do limite (isto ocorre em espaços que não são de Hausdorff[1]). Entretanto, a próxima proposição nos dará direito ao uso da notação $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$.

Proposição 4.10.: Sejam $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência e $x, y \in \mathbb{R}$ tais que $x_n \to x$ e $x_n \to y$. Então $x = y$.

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que $x \neq y$. Seja $\varepsilon = |x-y|/2 > 0$. Como $x_n \to x$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N \quad \to \quad |x_n - x| < \varepsilon .$$

Seja n o maior dos números N e N'. Para tal n as duas conclusões anteriores são válidas. Temos então

$$|x-y| \leq |x-x_n| + |x_n - y| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = |x-y| .$$

Concluímos que $|x-y| < |x-y|$, o que é absurdo.

Proposição 4.11.: Uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tende a x se, e somente se, toda subsequência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tende a x.

Demonstração. Suponhamos que exista $x \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \to x$. Seja $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma substância de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *i.e.*, $y_k = x_{n_k}$ $(\forall k \in \mathbb{N})$ para alguma sequência $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ estritamente crescente. Mostremos que $y_k \to x$. Seja $\varepsilon > 0$. Como $x_n \to x$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N$, então $|x_n - x| < \varepsilon$. Como $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ é restritamente crescente, existe $K \in \mathbb{N}$ tal que se $k \geq K$, então $n_k \geq N$. Segue que

$$k \geq K \to |y_k - x| < \varepsilon .$$

Portanto $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge para x. A recíproca é imediata (basta observar que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é subsequência de si mesma).

Exemplo 4.12: A sequência $(1, 0, 1, 0, 1, 0, ...)$ é divergente. De fato, se ela fosse convergente, então pela proposição anterior todas as suas subseqüências seriam convergentes para o mesmo limite. Porém, $(1, 1, 1, ...)$ e $(0, 0, 0, ...)$ são duas de suas subseqüências sendo que a primeira converge para 1 enquanto que a segunda converge para 0.

Como corolário da proposição anterior, obtemos que se x_n tende a x, então x_{n+2006} tende a x. Não há nada de especial com o número 2006. Mais geralmente, fixado $p \in \mathbb{N}$, temos que se x_n tende a x, então $x_{n/p}$ tende a x. É fácil perceber que a recíproca também é verdadeira, ou seja, se para algum $p \in \mathbb{N}$ temos que x_{n+p}

tende a x, então é porque x_n tende a x. Verifique! A importância deste fato é a seguinte. Se conhecermos alguma propriedade que garanta a convergência de uma sequência e soubermos que tal propriedade só é valida a partir do seu p- ésimo termo então, ainda sim, podemos concluir que a sequência é convergente. Vejamos um exemplo esclarecerdor.

Exemplo 4.13: Sabemos que sequência constantes são convergentes. Considere a sequência (não constante) dada por $x_n = \lfloor 1000/n \rfloor$, sendo $\lfloor x \rfloor$ a função Parte Inteira de x, definida abaixo:

$$\lfloor x \rfloor = m \text{ se } m \in \mathbb{Z} \text{ e } m \leq x < m+1.$$

É fácil ver que $x_n = 0$ para todo $n > 1000$. Ou seja, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é constante a partir do seu milésimo-primeiro termo. Concluímos que ela é convergente.

Teorema 4.14.: Toda sequência convergente é limitada.

Demonstração.

Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência convergente para $x \in \mathbb{R}$. Tomando $\varepsilon - 1$ na definição de sequência convergente, concluímos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N$, então $|x_n - x| < 1$, *i.e.*, $x_n \in (x-1,\, x+1)$. Tomando

$$a = \min\{x_1,\, ...,\, x_N,\, x-1\} \text{ e } b = \max\{x_1,\, ...,\, x_N,\, x+1\}$$

temos imediatamente que $x_n \in [a,\, b]$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada.

4.3.: Sequências monótonas e sequências limitadas.

A recíproca do Teorema 4.14 é falsa como mostra o Exemplo 4.12. Porém, existem algumas recíprocas parciais que veremos nesta seção. Muitos dos resultados aqui apresentados utilizam, em sua demonstração, a caracterização, do supremo vista no Exercício 5 do capítulo 3.

Proposição 4.15.: Se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente e limitada superiormente, então $x_n \to \sup\{x_n \; ; n \in \mathbb{N}\}$. Da mesma forma, se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é decrescente e limitada inferiormente, então $x_n \to \inf\{x_n \; ; n \in \mathbb{N}\}$.

Demonstração.

Vamos provar apenas a primeira parte da proposição já que a segunda se demonstração de modo análogo. Seja $s = \sup\{x_n \; ; n \in \mathbb{N}\}$. Dado $\varepsilon > 0$, tome $N \in \mathbb{N}$ tal que $x - 3 < x_n \leq s$. Logo, para $n \geq N$, temos $x - \varepsilon < x_N \leq x_n \leq s$. Concluímos daí que $|x_n - s| < \varepsilon$.

Teorema 4.16. (Bolzano[1] – Weierstrass[2]) Toda sequência limitada possui subsequência convergente.

Demonstração. Sejam $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada. Considere o seguinte conjunto:

$$N = \{n \in \mathbb{N} \; ; x_n > x_m, \forall m > n\}.$$

Existem duas possibilidades: N é infinito ou N é finito.
1° caso: N é infinito.

Escrevamos $N = \{n_1, n_2, n_3, ...\}$ com $n_1 < n_2 < n_3 < ...$. Assim, se $i < j$ então $n_i < n_j$ e, como $n_i \in N$, obtemos que $x_{n_i} > x_{n_j}$. Concluímos que a subsequência $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ é decrescente. Sendo ela limitada obtemos, finalmente, que ela é convergente.

2° caso: N é finito.

Como N é finito, existe $N_1 \in \mathbb{N}/N$ cota superior de N. Ora, $n_1 \notin N$ logo, existe $n_2 > n_1$ (e portanto $n_2 \notin N$) tal que $x_{n_1} \leq x_{n_2}$. Mas de $n_2 \notin N$ seque que existe $n_3 > n_2$ (e portanto $n_3 \notin N$) tal que $x_{n_2} \leq x_{n_3}$. Por indução, definimos uma subsequência $(x_{n_k})_{k\notin\mathbb{N}}$ que é crescente e, portanto, convergente (pois ela é limitada).

4.4 – Sequências de Cauchy.

Definição 4.17. Uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é dita Cauchy1 se

$$\forall \varepsilon > 0, \; \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que } n, m \geq N \rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon$$

Uma sequência é de Cauchy se seus termos se aproximam uns dos outros. Repare que não apenas termos consecutivos mas sim todos eles. É natural acreditar que qualquer sequência convergente é de Cauchy e vice-versa. Vamos admitir, por hora, que sequências convergentes são de Cauchy (este fato será demonstrado a seguir). Façamos alguns comentários sobre a recíproca.

Considere uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números racionais convergentes para, por exemplo, $\sqrt{2}$ (existe tal sequência?). Sendo convergente ela é de Cauchy. Como a definição de sequência de Cauchy não faz menção ao limite, mesmo se só conhecêssemos números racionais ainda estaríamos de acordo que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy. Porém, neste caso, não seríamos capazes de mostrar a existência do limite. Ou seja, se considerássemos apenas números racionais, não seria possível mostrar que toda sequência de Cauchy é convergente.

Já que sequências de Cauchy são convergentes em $\mathbb{R}$ mas não em $\mathbb{Q}$, isto deve estar relacionado à completeza. De fato, alguns autores usam sequências de Cauchy de números racionais para construir $\mathbb{R}$. A vantagem desta construção é que ela pode ser empregada para "completar" outros conjuntos (ou melhor, espaços métricos) que não sejam corpos ordenados.

Teorema 4.18. Uma sequência é convergente se, e somente se, ela é de Cauchy.

Demonstração.

Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência convergente para o limite x. Dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N$, então $|x_n - x| < \varepsilon/2$. Portanto, se $m, n > N$ temos

$$|x_n - x_m| \leq |x_n - x| + |x - x_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Concluímos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy.

Reciprocamente, suponhamos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy. Um argumento análogo ao da demonstração do Teorema 4.14 mostra que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada (verifique). Pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tem subsequência $(x_{n_k})_{n\in\mathbb{N}}$ convergente para o limite x. Mostremos que $x_n \to x$. Seja $\varepsilon > 0$. Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n, m \geq N \to |x_n - x_m| < \frac{\in}{2}. \tag{4.1}$$

Como $x_{n_k} \to x$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $n_k \geq N$ e $|x_{n_k} - x| < \varepsilon/2$. Daí e de (4.1) segue que, se $n \geq N$, então

$$|x_n - x| \le |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

4.5. Limites infinitos.

Existem sequências divergentes que possuem limite! Isto é apenas um jogo de palavras. A definição seguinte diz que certas sequências têm limites que não são números reais. Não diremos que tais sequências são covergentes.

Definição 4.19. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ numa sequencia. Dizemos que x_n tende a mais infinito quando n tende a mais infinito ou que mais infinito é limite da sequência e escrevemos $x_n \to +\infty$ ou $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ se,

$$\forall M \in \mathbb{R} , \ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que } n \ge N \to x_n > M .$$

Definição 4.20. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência. Dizemos que x_n tende a menos infinito quando n tende a mais infinito ou que menos infinito é limite da sequência e escrevemos $x_n \to -\infty$ ou $\lim_{n\to+\infty} x_n = -\infty$ se,

$$\forall M \in \mathbb{R} , \ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que } n \ge N \to x_n < M .$$

Insistimos no fato que se $x_n \to +\infty$ ou $x_n \to -\infty$, então <u>não</u> podemos dizer que a sequência é convergente. Uma sequência é dita convergente exclusivamente quando satisfaz a condição da Definição 4.7. Além disto, se $x_n \to +\infty$ então $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é ilimitada superiormente e, portanto, é divergente. Da mesma forma, se $x_n \to -\infty$, então $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é ilimitada inferiormente e, portanto, é divergente.

Observação 4.21. Com estas convenções sobre uso dos termos "sequência convergente" a de "limite de sequência" a Proposição 4.11 também é válida (obviamente com outra demonstração) se substituirmos x por $+\infty$ ou por $-\infty$.

Como $x_n > M$ é equivalente a $-x_n < -M$, temos que $x_n \to +\infty$ se, e somente se, $-x_n \to -\infty$. Portanto toda afirmação sobre limite mais infinito tem uma análoga para limite menos infinito.

4.6 Operações com limites.

Temos a seguir algumas propriedades aritméticas de limites finitos.

Proposição 4.22. Sejam $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergentes para x e y, respectivamente, e $c \in \mathbb{R}$. Temos:

I. $x_n + y_n \to x + y$;
II. $x_n \cdot y_n \to x \cdot y$;
III. $c \cdot x_n \to cx$;
IV. se $y \neq 0$, então $y_n^{-1} \to y^{-1}$.

Demonstração.

(I) Seja $\varepsilon > 0$. Graças às convergências de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, existem N' e N'' tais que, se $n \geq N'$, então $|x_n - x| < \varepsilon/2$, e se $n \geq N''$, então $|y_n - y| < \varepsilon/2$. Seja $N = \max\{N', N''\}$. Assim, se $n \geq N$, então $n \geq N'$ e $n \geq N''$ e, daí,

$$\left|(x_n + y_n) - (x + y)\right| = \left|(x_n - x) + (y_n - y)\right| \leq |x_n - x| + |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Mostramos assim que $x_n + y_n \to x + y$.

(II) Seja $\varepsilon > 0$. Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente, ela é limitada. Logo, existe $C > 0$ tal que $|x_n| < C$ para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N$, então $|x_n - x| < \varepsilon$ e $|y_n - y| < \varepsilon$. Desta forma, para $n \geq N$, temos

$$\begin{aligned}|x_n \cdot y_n - x \cdot y| &\leq |x_n \cdot y_n - x_n \cdot y| + |x_n \cdot y - x \cdot y| = |x_n| \cdot |y_n - y| + |y| \cdot |x_n - x| \\ &\leq C \cdot |y_n - y| + |y| \cdot |x_n - x| < \left(C + |y|\right)\varepsilon.\end{aligned}$$

Isto mostra que $x_n \cdot y_n$ converge para $x \cdot y$.

(III) É consequência do item anterior, tomando $y_n = c$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(IV) Seja $\varepsilon > 0$ e $N' \in \mathbb{N}$ tal que, se $n \geq N'$, então $|y_n - y < \varepsilon|$. Temos ainda que $y \neq 0$, consequêntemente, existe $N'' \in \mathbb{N}$ tal que, $|y_n| > |y|/2$, *i.e.*, $|y_n|^{-1} < 2|y|^{-1}$, quando $n \geq N''$. Tornando $N = \max\{N', N''\}$, para todo $n \geq N$, temos que

$$\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{y}\right| = \frac{|y - y_n|}{|y_n| \cdot |y|} < \frac{2}{|y|^2}\varepsilon.$$

Isto conclui a demonstração.

Exemplo 4.23. Seja $r \in \mathbb{R}$. A sequência $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma Progressão Geométrica de razão r.

Se $|r|<1$, então multiplicando por $|r^n| \geq 0$, obtemos $0 \leq |r^{n+1}| \leq |r^n|$. Logo, $(|r^n|)_{n\in\mathbb{N}}$ é decrescente, limitada inferiormente e portanto, convergente para, digamos, l. Ora, $|r^{n+1}| = |r||r^n|$, então, passando o limite, obtemos $l = |r| l$. Como $|r| \neq 1$, temos $l = 0$. Segue, finalmente, que $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para 0 (Exercício (2.a)).

Se $|r|>1$, então $|r| = 1+h$ com $h>0$. Pela desigualdade de Bernoulli, $|r^n| = |r|^n \geq 1+nh$ e, portanto, $|r^n| \to +\infty$. Em particular, $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ é divergente (Exercício (2.b)).

Deixamos para o leitor o estudo dos casos $r=1$ e $r=-1$.

Vejamos agora as propriedades "aritméticas" de limites infinitos

Proposição 4.24. Sejam $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ duas sequências e $c>0$. Suponhamos que $x_n \to +\infty$. Temos:

I. se $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada inferiormente, então $x_n + y_n \to +\infty$;
II. se $y_n > c$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $x_n \cdot y_n \to +\infty$;
III. $c \cdot x_n \to +\infty$;
IV. $x_n^{-1} \to 0$.

Demonstração.

(I) Seja $a \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dado $M \in \mathbb{R}$, como $x_n \to +\infty$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N$, então $x_n > M - a$. Segue que se $n \geq N$, então $x_n + y_n \geq x_n + a > M$. Concluímos que $x_n + y_n \to +\infty$.

(II) Dado $M \in \mathbb{R}$, podemos tomar $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N$, então $x_n > |M|/c$. Desta forma, se $n \geq N$, então $x_n \cdot y_n \geq x_n \cdot c > |M| \geq M$. Portanto $x_n \cdot y_n \to +\infty$.

(III) É consequência do item anterior, tomando $y_n = c$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(IV) Dado $\varepsilon > 0$, tomemos $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N$, então $x_n > \varepsilon^{-1}$. Segue que se $n \geq N$, então $|x_n^{-1} - 0| = x_n^{-1} < \varepsilon$. Concluímos que $x_n^{-1} \to 0$.

4.7 Limite superior e limite inferior.

No estudo de limites de subsequências é conveniente fazer a seguinte definição.

Definição 4.25. Dizemos que $x \in \mathbb{R}$ é valor de aderência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se existe subsequência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente para x.

O Teorema de Bolzano-Weierstrass diz então que toda sequência limitada possui valor de aderência.

Observe que se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada superiormente, então o conjunto dos seus valores de aderência também é limitado superiormente (veja Exercício (4.c)). Analogamente, se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada inferiormente, então o conjunto de seus valores de aderência também é.

Definição 4.26. Seja A o conjunto dos valores de aderência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. O limite superior de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é definido por

$$\limsup_{n\to+\infty} x_n = \begin{cases} +\infty & \text{se } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ é ilimitada superiormente;} \\ \sup A & \text{se } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ é limitada superiormente e } A \neq \varnothing; \\ -\infty & \text{se } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ é limitada superiormente e } A = \varnothing. \end{cases}$$

O limite inferior de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é definido por

$$\liminf_{n\to+\infty} x_n = \begin{cases} -\infty & \text{se } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ é ilimitada inferiormente;} \\ \sup A & \text{se } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ é limitada inferiormente e } A \neq \varnothing; \\ +\infty & \text{se } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ é limitada inferiormente e } A = \varnothing. \end{cases}$$

Essencialmente, o limite superior de uma sequência é o seu valor de aderência, enquanto que o limite inferior é seu menor valor de aderência.

A Proposição 4.11 diz que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para x se, e somente se, x é o único valor de aderência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Isto também pode ser expresso dizendo

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x \Leftrightarrow \liminf_{n\to+\infty} x_n = \limsup_{n\to+\infty} x_n = x.$$

Pode parecer estranho tomar $-\infty$ como definição de limite superior de uma sequência limitada superiormente e sem valor de aderência. A razão é que, nestas condições, a sequência tende a $-\infty$ (veja Exercício 8). Desta forma, o resultado do parágrafo anterior também é válido para limites infinitos.

Proposição 4.27. Existe subsequência $\left(x_{n_k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{k\to+\infty} x_{n_k} = \limsup_{n\to+\infty} x_n .$$

Em particular, se $\limsup_{n\to+\infty} \in \mathbb{R}$, então este é o maior valor de aderência de $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Demonstração. Seja A o conjunto dos valores de aderência de x_n.

Suponhamos inicialmente que $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ seja ilimitada superiormente e, portanto,

$$\limsup_{n\to+\infty} x_n = +\infty$$

Neste caso, é imediato que $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tem subsequência que tende a $+\infty$.

Suponhamos, agora, que $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ seja limitada superiormente e $A=\varnothing$. Portanto,

$$\limsup_{n\to+\infty} x_n = -\infty .$$

Se $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ for limitada inferiormente, então $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ será limitada e, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, teremos $A\neq\varnothing$. Logo, $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada inferiormente e, portanto, tem subsequência tendendo a $-\infty$.

Finalmente, suponhamos que $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ seja limitada superiormente a $A\neq\varnothing$. Como já observado antes, A é limitado superiormente e, portanto, seu supremo s é finito. Vamos mostrar que $s\in A$. Aplicando sucessivamente o resultado do Exercício 5 do Capítulo 3 obtemos:

$$\exists a_1 \in A \text{ tal que } s \geq a_1 > s-1 ;$$
$$\exists a_2 \in A \text{ tal que } s \geq a_2 > s-1/2 ;$$
$$\exists a_2 \in A \text{ tal que } s \geq a_3 > s-1/3 ;$$

Como a_1 é valor de aderência de $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ e $s+1 > a_1 > s \;\; 1$, existe $n_1\in\mathbb{N}$ tal que $s+1 > x_{n_1} > s-1$. Também temos $a_2 \in A$, logo, existe $n_2 > n_1$ tal que $s+1/2 > x_{n_2} > s-1/2$. Prosseguindo desta forma, construímos uma subsequência $\left(x_{n_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ convergente para s. Segue que $s\in A$.

I 02

Exercícios

01. Seja $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ uma sequência crescente. Mostre que

a) se $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é limitada superiormente, então ela é constante a partir de um certo termo;

b) se $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é estritamente crescente, então $n_k \geq k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Conclua que $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ não é limitada superiormente.

02. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência. Mostre que:

a) se $|x_n| \to 0$, então $x_n \to 0$;

b) se $x_n \to x$, então $|x_n| \to |x|$;

03. Mostre que a recíproca do Exercício (2.b) é falsa.

04. Sejam $y \in \mathbb{R}$ e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência convergente para $x \in \mathbb{R}$.

a) Mostre que se $y < x$, então existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $y < x_n$ para todo $n \geq N$.

b) Mostre que se $x < y$, então existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n < y$ para todo $n \geq N$.

c) Mostre que se $x_n \geq y$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $x \geq y$.

d) Mostre que se $x_n \geq y$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $x \leq y$.

e) Se $y < x_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então podemos afirmar que $y < x$?

05. Sejam $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequências convergentes para x e y, respectivamente. Suponhamos que $x_n \leq y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Mostre que

a) $x \leq y$;

b) (Teorema do Sanduíche) se $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é tal que $x_n \leq z_n \leq y_n$ e se $x = y$, então $z_n \to x$.

06. Sejam $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(m_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ estritamente crescente e tais que $\{n_k ; k \in \mathbb{N}\} \cup \{m_k ; k \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}$. Mostre que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para x se, e somente se, as subsequências $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ e $(x_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergem para x.

07. Sejam $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergentes para x e y, respectivamente. Mostre que

a) $x_n - y_n \to x - y$;

b) se $y \neq 0$, então $x_n / y_n \to x / y$;

c) $x_n^m \to x^m$ qualquer que seja $m \in \mathbb{N}$.

08. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada superiormente e que não tem valor de aderência. Mostre que $x_n \to -\infty$.

09. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sequência definida indutivamente por $x_1 = 0$ e $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Mostre que:

a) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente;

b) $x_n \leq 2$ $\forall n \in \mathbb{N}$;

c) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente.

Determine $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

10. O objetivo deste exercício é mostrar o seguinte resultado: para todo $m \in \mathbb{N}$ e $a \in \mathbb{R}$ com $m \geq 2$ e $a \geq 0$, existe um único $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \geq 0$ e $x^m = a$. Tal x é dito raiz m - ésima de a e é denotado $\sqrt[m]{a}$ (ou simplesmente $\sqrt{a}$ no caso $m = 2$). Para isto considere a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida indutivamente por $x_1 = 1$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^m - a}{m x_n^{m-1}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Mostre que:

a) a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^m$ é estritamente crescente em $[0, +\infty)$. Conclua a unicidade da raiz m - ésima de a;

b) $y^m \geq x^m + m x^{m-1}(y - x)$ $\forall x, y \geq 0$;

c) $x_n > 0$ $\forall_n \in \mathbb{N}$;

d) $x_{n+1}^m \geq a$ $\forall n \in \mathbb{N}$;

e) $x_{n+2} \leq x_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$;

f) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge e o seu limite x verifica $x \geq 0$ e $x^m = a$.

Sugestão: Em (10.b) use (10.a) e considere separadamente os casos $x < y$, $x > y$ e $x = y$. Use ainda a seguinte igualdade:

$$\frac{y^m - x^m}{y - x} = y^{m-1} + y^{m-2}x + \ldots + yx^{m-2} + x^{m-1}$$

Em (10.c) proceda por indução. Em (10.d) use (10.b) e em (10.e) use (10.d). Finalmente use a Proposição 4.15 em (10.f).

I 03

4.8 Séries.

Definição 4.28. Considere uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + \ldots + x_n .$$

A sequência $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é dita das somas parciais da série $\sum x_n$ e x_n é o n - ésimo termo ou termo geral da série. Escrevemos

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} S_n$$

quando o limite acima existe e, neste caso, ele é dito limite da série. Dizemos que $\sum x_n$ é convergente ou divergente se $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente ou divergente, respectivamente. Finalmente, dizemos que $\sum x_n$ é absolutamente se a série $\sum |x_n|$ é convergente.

Exemplo 4.29. Considere a Série Geométrica de termo geral $x_n = r^{(n-1)}$. Temos

$$S_n = 1 + r + r^2 + \ldots + r^{n-2} + r^{n-1}$$

Se $r = 1$, então é imediato que $S_n = n$. Segue que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, e portanto, $\sum x_n$ diverge. Suponhamos $r \neq 1$. Multiplicando por S_n por r obtemos

$$\begin{aligned} rS_n &= r + r^2 + r^3 + \ldots + r^{n-1} + r^n \\ &= 1 + r + r^2 + r^3 + \ldots + r^{n-1} + r^n - 1 \\ &= S_n + r^n - 1. \end{aligned}$$

Portanto, $S_n = \left(r^n - 1\right)/\left(r - 1\right)$. Assim, $\sum x_n$ converge se, e somente se, $|r| < 1$ e, neste caso,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = \frac{1}{1-r} .$$

A próxima proposição é uma versão da Proposição 44.2 para séries.

Proposição 4.30. Sejam $\sum x_n$ e $\sum y_n$ duas séries convergentes e $c \in \mathbb{R}$. Temos que

I. $\sum(x_n + y_n)$ é convergente para $\sum x_n + \sum y_n$;
II. $\sum(c \cdot x_n)$ é convergente para $c \cdot \sum x_n$.

Demonstração. A demonstração é trivial: basta aplicar a Proposição 4.22 para as sequências das somas parciais de $\sum x_n$ e de $\sum y_n$.

Observamos que, em geral,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(x_n \cdot y_n) \neq \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} y_n .$$

Passamos ao estudo da natureza de séries, *i.e.*, estamos interessados em critérios que determinem se uma série é convergente ou divergente.

Teorema 4.31.

I. $\sum x_n$ converge se, e somente se,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que } n \geq m \geq N \Rightarrow \left|\sum_{i=m}^{n} x_i\right| < \varepsilon .$$

II. Se $\sum x_n$ converge, então $x_n \to 0$.

Demonstração.

(I) O critério dado diz simplesmente que a sequência das somas parciais é de Cauchy. O resultado segue do Teorema 4.18.
(II) Segue de (I), tomando $m = n$.
(III) Observamos que para todo m , $n \in N$ temos

$$\left|\sum_{i=n}^{m} x_i\right| \leq \sum_{i=n}^{m} |x_i| = \left|\sum_{i=n}^{m} |x_i|\right|$$

Portanto, por (I), a convergência de $\sum |x_n|$ implica a de $\sum x_n$.

O item (III) do teorema anterior está intimamente ligado ao fato de $\mathbb{R}$ ser completo. Devemos ressaltar ainda que a sua recíproca não é verdadeira, ou seja, existem séries que são convergentes mas não absolutamente convergentes. Veremos um exemplo posteriormente.

Exemplo 4.32. Pelo item (II), a condição $x_n \to 0$ é necessária para a convergência da série $\sum x_n$ porém ela não é suficiente. A Série Harmônica $\sum 1/n$ é o contra exemplo mais famoso. De fato, temos

$$S_2 = 1 + \frac{1}{2},$$

$$S_4 = S_2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > S_2 + \frac{2}{4} = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2},$$

$$S_8 = S_4 + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{4}{8} = 1 + 3 \cdot \frac{1}{2}$$

$$\vdots$$

Portanto, $S_{2n} > 1 + n/2$. Daí, segue que $\lim_{n\to+\infty} S_{2^n} = +\infty$. Concluímos que a série diverge.

Vamos tratar agora de alguns critérios de convergência para séries de termos positivos. Claramente, todos os critérios aqui expostos podem ser adaptados para séries de termos negativos. De fato, se $\sum x_n$ é uma série de termos negativos, então $\sum(-x_n)$ é uma série de termos positivos e, além disto, a primeira converge se, e somente se, a segunda converge.

Eventualmente, podemos usar também critérios sobre séries de termos positivos para uma série $\sum x_n$ que tenha termos de sinais variáveis. Ora, se ao aplicarmos algum destes critérios para a série $\sum |x_n|$ concluirmos que ela é convergente, então, como toda série absolutamente convergente é convergente, concluiremos que $\sum x_n$ converge. Por outro lado, se o critério nada disser, ou mesmo se ele nos informar que $\sum |x_n|$ é divergente, em geral, nada poderemos afirmar sobre a convergência da série $\sum x_n$.

Observamos também o seguinte fato, já mencionado no caso de sequências. Os primeiros termos de uma série nada influem na sua natureza. De fato, a série $\sum x_n$ converge se, e somente se, a série $\sum x_{n+2006}$ converge. De maneira geral, fixado $p \in \mathbb{N}$ a série $\sum x_n$ é convergente se, e somente se, a série $\sum x_{n+p}$ é convergente. Desta forma, todos os critérios que determinam a natureza de uma série através de alguma propriedade verificada por todos os seus termos continuam válidos se a tal propriedade é verificada à partir de algum termo (por exemplo, 2006). Por outro lado, não podemos desprezar nenhum termo de uma série convergente quando estamos interessados em determinar o valor do seu limite.

Proposição 4.33. Uma série de termos positivos é convergente se, e somente se, a sequência de suas somas parciais é limitada superiormente.

Demonstração.
Por definição, $\sum x_n$ é convergente se, e somente se, a sequência de suas somas parciais $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente. Como $x_n \geq 0$, temos imediatamente que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente. Logo, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente se, e somente se, ela é limitada superiormente (ver proposições 4.14 e 4.15)

Teorema 4.34. (Critério da Comparação) Sejam $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tais que $0 \leq x_n \leq y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

I. Se $\sum y_n$ converge, então $\sum x_n$ converge.
II. Se $\sum x_n$ diverge, então $\sum y_n$ diverge.

Demonstração.
Sejam $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ as sequências de somas parciais de $\sum x_n$ e $\sum y_n$, respectivamente. De $x_n \leq y_n$ segue imediatamente que $S_n \leq T_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, se $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada superiormente, então $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ também é. Por outro lado, se $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada superiormente, então $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ também é. Concluímos graças à Proposição 4.33.

Exemplo 4.35. Vamos estudar a natureza da série $\sum 1/n^p$ segundo os valores de p. É claro que se $p \leq 0$, então ela diverge pois neste caso $\lim_{n\to+\infty} x_n \neq 0$.

Suponhamos $0 \leq p \leq 1$. Temos $1/n \leq 1/n^p$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, por comparação com a Série Harmônica, concluímos que a série diverge.

Finalmente, consideremos os casos $p > 1$. Mostraremos que a série converge. Seja $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sequência das somas parciais. Para todo $n \in \mathbb{N}$, temos:

$$\begin{aligned} S_n &= 1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\ldots+\frac{1}{n^p} \\ &\le 1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\ldots+\frac{1}{n^p}+\ldots+\frac{1}{\left(2^n-1\right)^p} \\ &= 1+\left(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}\right)+\left(\frac{1}{4^p}+\frac{1}{5^p}+\frac{1}{6^p}+\frac{1}{7^p}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{\left(2^{n-1}\right)^p}+\ldots+\frac{1}{\left(2^n-1\right)p}\right) \\ &\le 1+\frac{2}{2^p}+\frac{4}{4^p}+\ldots+\frac{2^{n-1}}{\left(2^{n-1}\right)^p}=\sum_{i=1}^{n}\left(2^{1-p}\right)^{(i-1)} \end{aligned}$$

Como $P>1$ temos $2^{1-p}<1$ e, portanto, a Série Geométrica de razão 2^{1-p} converge. Segue que $\left(S_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada superiormente e portanto $\sum 1/n^p$ é convergente.

Teorema 4.36. (Teste da Razão, ou de d'Alembert[1]) Seja $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números estritamente positivos.

I. Se $\lim_{n\to+\infty} x_{n+1}/x_n<1$, então $\sum x_n$ é convergente.

II. Se $\lim_{n\to+\infty} x_{n+1}/x_n>1$, então $\sum x_n$ é divergente.

Demonstração.

(I) Tomemos $r\in\mathbb{R}$ tal que $\lim_{n\to+\infty} x_{n+1}/x_n<r<1$. O resultado do Exercício (4.a) garante que existe $N\in\mathbb{N}$ tal que $x_{n+1}/x_n<r$ para todo $n\ge N$. Temos então

$$x_{N+1}<rx_N\ ;$$
$$x_{N+2}<rx_{N+1}<r^2x_N\ ;$$
$$x_{N+3}<rx_{N+2}<r^3x_N\ ;$$

$\vdots$

De maneira geral, $x_n<r^{n-N}x_N$, para todo $n\ge N$. Tomando $y_n=r^{n-N}x_N$ (para todo $n\in\mathbb{N}$) temos que $x_n\le y_n$ para todo $n\ge N$. Como $\sum y_n$ é uma série Geométrica de razão $r\in(0,1)$, ela é convergente. O resultado segue do Critério de Comparação.

(II) Usando o resultado do Exercício (4.b) concluímos que existe $N\in\mathbb{N}$ tal que $x_{n+1}/x_n\ge 1$ para todo $n\ge\mathbb{N}$. Portanto, $x_{n+1}\ge x_n$ para todo $n\ge N$. Segue que a sequência dos termos gerais da série é crescente a partir do N- ésimo termo e, portanto, não converge para zero. Logo, a série é divergente.

Exemplo 4.37. A série $\sum 1/n!$ é convergente pois

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1/(n+1)!}{1/n!}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}=0$$

Quando $\lim_{n\to+\infty} x_{n+1}/x_n = 1$, o Teste de Razão nada permite concluir (nem convergência nem divergência).

Existem várias versões do Teste da Razão. A versão vista aqui não é a mais geral delas. Por exemplo, podemos substituir o símbolo de limite em (I) pelo símbolo de limite superior. A conclusão de (II) também é válida se substituirmos o símbolo de limite pelo de limite inferior.

Exemplo 4.38. Vejamos exemplos para os quais o Teste da Razão não é conclusivo. Considere as séries $\sum 1/n$ e $\sum 1/n^2$. Já vimos que a primeira é divergente enquanto que a segunda é convergente. Porém, para ambas temos que $\lim_{n\to+\infty} x_{n+1}/x_{n-1}$. De fato,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1/(n+1)}{1/n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1}=1 \quad \text{e} \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{1/(n+1)^2}{1/n^2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}=1.$$

Teorema 4.39. (Teste da Raiz, ou de Cauchy) Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números positivos.

I. Se $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{x_n}<1$, então $\sum x_n$ é convergente.

II. Se $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{x_n}>1$, então $\sum x_n$ é divergente.

Demonstração.

(I) Seja $r\in\mathbb{R}$ tal que $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{x_n}<r<1$. Do resultado do Exercício (4.a) obtemos que existe $N\in\mathbb{N}$ tal que $\sqrt[n]{x_n}<r$, ou seja, $x_n<r^n$ para todo $n\geq N$. O resultado segue por comparação com a Série Geométrica $\sum r^n$.

(II) Análogo ao item anterior.

Quando $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{x_n}=1$, o Teste da Raiz nada permite concluir (nem convergência nem divergência).

Também existem outras versões do Teste da Raiz. A versão aqui apresentada não é a mais geral delas. Por exemplo, podemos substituir o símbolo de limite em (I) pelo símbolo de limite superior. A conclusão de (II) também é válida se substituirmos o símbolo de limite pelo limite inferior.

4.9 A série dos inversos dos primos.

Terminamos o capítulo com um interessante resultado sobre a série dos inversos dos primos. O primeiro a demonstrá-lo foi Euler[1] $[7]$. A demonstração que apresentaremos aqui é mais uma das preciosidades de Erdös[2] $[6]$. O argumento é do tipo combinatório. Antes de apresentá-lo façamos uma definição.

Definição 4.40. A função Parte Inteira é definida, para todo $x \in \mathbb{R}$, por

$$\lfloor x \rfloor - n \quad \text{se} \quad n \in \mathbb{Z} \quad \text{e} \quad n \leq x < n+1 .$$

Exemplo 4.41. Temos $\lfloor 1 \rfloor = 1$, $\lfloor 1.4 \rfloor = 1$ e $\lfloor -1.5 \rfloor = -2$.

Proposição 4.42. Seja $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a sequência estritamente crescentes dos números primos $(p_1 = 2,\ p_2 = 3,\ p_3 = 5,\ \ldots)$. A série $\sum 1/p_n$ diverge.

Demonstração.

Suponhamos por absurdo que $\sum 1/p_n$ converge. Portanto existe $N \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\sum_{n=\mathbb{N}}^{+\infty} \frac{1}{p_n} < \frac{1}{2} .$$

Seja $M = 2^{2N}$. Temos que $M = \#A + \#B$, sendo

$A = \{ m \in \{1, \ldots, M\} ;\ m$ é múltiplo de algum dos primos $p_N, p_{N+1}, \ldots \}$,

$B = \{ m \in \{1, \ldots, M\} ;\ m$ não é múltiplo de algum dos primos $p_N, p_{N+1}, \ldots \}$

Vamos mostrar que $\#A < M/2$ e $\#B \leq M/2$ chegando assim a uma contradição.

O número de múltiplos do primo p que são menores que M é $\lfloor M/p \rfloor$. Segue que

$$\#A \leq \sum_{n=N}^{+\infty} \left\lfloor \frac{M}{p_n} \right\rfloor \leq \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{M}{p_n} < \frac{M}{2} .$$

Também é fácil ver que todo $m \in B$ pode ser escrito como $m = a \cdot b^2$ sendo a um produto de primos distintos, todos menores que p_N, e b^2 um produto de quadrados de primos, também menores que P_N. Existem exatamente 2^{N-1} números nas condições de a. Temos ainda que $b^2 \leq m \leq M$ e portanto $b \leq \sqrt{M} = 2^N$. Segue que existem, no máximo, 2^N números nas condições de b. Portanto $\#B \leq 2^{N-1} \cdot 2^N = 2^{2N-1} = M/2$.

I 04

Exercícios

01. Determine se é convergente ou divergente cada uma das séries abaixo.

a) $\sum \frac{n}{2^n}$;

b) $\sum \frac{n+2}{n(n+1)}$;

02. Seja $\sum x_n$ uma série convergente de termos positivos. Mostre que

a) $\sum \left(x_n^2\right)$ é convergente;

b) se $\liminf_{n\to+\infty} > 0$, então $\sum (x_n / y_n)$ é convergente.

03. Use o resultado do Exercício 2 do Capítulo 2 para mostrar que a série harmônica diverge.

04. Mostre que se $\sum x_n$ é absolutamente convergente e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada, então $\sum (x_n \cdot y_n)$ é absolutamente convergente.

05. Mostre que $\sum \left(\operatorname{sen} n / n^2\right)$ é convergente. Você consegue generalizar este resultado para séries do tipo $\sum \left(f(n)/n^2\right)$, sob que hipótese sobre $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$?

06. Sejam $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ duas sequências positivas tais que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n} = c \in \mathbb{R}/\{0\}.$$

Mostre que $\sum x_n$ converge se, e somente se, $\sum y_n$ converge.

07. O objetivo deste exercício é mostrar o Critério de Leibniz[1] que diz: se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência decrescente de números positivos convergente para 0, então a série $\sum(-1)^{n+1}x_n$ é convergente. Considere a sequência de somas parciais $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ da série $\sum(-1)^{n+1}x_n$. Mostre que

a) $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada;

b) $(S_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ e $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ são monótonas. Conclua que estas sequências são convergentes para o mesmo limite s;

c) $\sum(-1)^{n+1}x_n$ é convergente.

08. Use o critério de Leibniz para dar um exemplo de uma série que é convergente mas não é absolutamente convergente.

09. Determine, segundo o valor do parâmetro $a>0$, a natureza da série:

$$\sum\frac{(n!)^2}{(2n)!}a^n.$$

Coleção **olimpo**

IME ITA

opirus
EDITORA