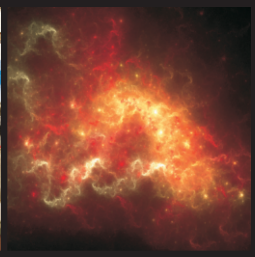
Coleção **olimpo**

IME ITA



H01
Progressões

Progressões Aritméticas

São comuns, na vida real, grandezas que sofrem variações iguais em intervalos de tempo iguais.

Exemplo 1. Uma fábrica de automóveis produziu veículos em janeiro e aumenta mensalmente sua produção de 30 veículos. Quantos veículos produziu em junho?

Solução. Os valores da produção mensal, a partir de janeiro, são $400, 430, 460, 490, 520, 550, \ldots$ Em junho, a fábrica produziu 550 veículos.

Poderíamos ter evitado escrever a produção mês a mês, raciocinando do modo a seguir. Se a produção aumenta de 30 veículos por mês, em 5 meses ela aumenta de $5 \times 30 = 150$ veículos. Em junho, a fábrica produziu $400 + 150 = 550$ veículos.

□

Progressões aritméticas são seqüências nas quais o aumento de cada termo para o seguinte é sempre o mesmo.

A seqüência $(400, 430, 460, 490, 520, 550, \ldots)$ é um exemplo de uma progressão aritmética. O aumento constante de cada termo para o seguinte é chamado de razão de progressão. A razão dessa progressão é igual a 30.

Portanto, uma *progressão aritmética* é uma seqüência na qual a diferença entre cada termo e o termo anterior é constante. Essa diferença constante e chamada de *razão* da progressão e representada pela letra r.

□

Exemplo 2. As seqüências $(5, 8, 11, \ldots)$ e $(7, 5, 3, 1, \ldots)$ são progressões 400 aritméticas cujas razoes valem respectivamente 3 e -2. □

Em uma progressão aritmética $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$, para avançar um termo basta somar a razão; para avançar dois termos, basta somar duas vezes a razão, e assim por diante. Assim, por exemplo, $a_{13} = a_5 + 8r$, pois, ao passar de a_5 para a_{13}, avançamos 8 termos; $a_{12} = a_7 + 5r$, pois avançamos 5 termos ao passar de a_7 para a_{12}; $a_4 = a_{17} - 13r$, pois retrocedemos 13 termos ao passar de a_{17} para a_4 e, de modo geral $a_n = a_1 + (n-1)r$, pois, ao passar de a_1 para a_n, avançamos $n-1$ termos.

Exemplo 3. Em uma progressão aritmética, o quinto termo vale 30 e o vigésimo termo vale 50. Quanto vale o oitavo termo dessa progressão?

Solução. $a_{20} = a_5 + 15r$, pois ao passar do quinto termo para o vigésimo, avançamos 15 termos. Logo, $50 = 30 + 15r$ e $r = \frac{4}{3}$. Analogamente, $a_8 = a_5 + 3r = 30 + 3 \cdot \frac{4}{3} = 34$. O oitavo termo vale 34. □

Exemplo 4. Qual é a razão da progressão aritmética que se obtém inserindo 10 termos entre os números 3 e 25?

Solução. Termos $a_1 = 3$ e $a_{12} = 25$. Como $a_{12} = a_1 + 11r$, termos $25 = 3 + 11r$. Daí, $r = 2$.

Exemplo 5. O cometa Halley visita a Terra a cada 76 anos. Sua última passagem por aqui foi em 1986. Quantas vezes ele visitou a Terra desde o nascimento de Cristo? Em que ano foi sua primeira passagem na era cristã?

Solução. Os anos de passagem do cometa foram 1986, 1910, 1834,... e formam uma progressão aritmética de razão -76. O termo de ordem n dessa progressão é $a_n = a_1 + (n+1)r$, isto é, $a_n = 1986 - 76(n-1) = 2062 - 76n$. Temos $a_n > 0$ quando $n < \frac{2062}{76} = 27{,}13\ldots$. Portanto, os termos positivos dessa progressão são os 27 primeiros, $a_1, a_2, a_3, ..., a_{27}$. Logo, ele nos visitou 27 vezes na era cristã e sua primeira passagem na era cristã foi no ano $a_{27} = 2062 - 76 \times 27 = 10$.

Poderíamos também ter resolvido o problema aproveitando o fato de termos dessa progressão serem inteiros.

Em uma progressão aritmética de termos inteiros e razão não-nula, todos os termos dão o mesmo resto quando divididos pelo módulo da razão. Como 1986 dividido por 76 dá resto 10, todos os anos em que o cometa por aqui passou dão resto 10 quando divididos por 76. A primeira visita ocorreu entre os anos 1 e 76, inclusive.entre esses anos, o único que dividido por 76 dá resto 10 é o ano 10. Para descobrir a ordem desse termo, usamos $a_n = a_1 + (n-1)r$, isto é, $10 = 1986 - 76(n-1)$. Daí, $n = \frac{2052}{76} = 27$. □

Muitas vezes é conveniente enumerar os termos de uma progressão aritmética a partir de zero, conforme mostra o exemplo a seguir.

Exemplo 6. O preço de um carro novo é de $\mathrm{R\$}15000{,}00$ e diminui de $\mathrm{R\$}1000{,}00$ a cada ano de uso. Qual será o preço com 4 anos de uso?

Solução. Chamando o preço com n anos de uso de a_n, temos $a_0 = 15000$ e queremos calcular a_4. Como a desvalorização anual é constante, (a_n) é uma progressão aritmética. Logo, . o preço será de $\mathrm{R\$}11000{,}00$. □

Exemplo 7. Os lados de um triângulo retângulo formam uma progressão aritmética crescente. Mostre que a razão dessa progressão e igual ao raio do círculo inscrito.

Solução. Chamemos os lados do triângulos de $x-r, x, x+r$. Esse é um bom truque para facilitar as contas; ao representar um progressão aritmética com um número ímpar de termos, começar pelo termo central.

Como a progressão é crescente, a hipotenusa é o ultimo termo Pelo Teorema de Pitágoras, $(x+r)^2 = (x-r)^2 + x^2$. Daí, $x^2 = 4rx$ e, já que $x \neq 0$ pois x é um dos catetos, $x = 4r$. Os lados são então $3r$, $4r$ e $5r$. O perímetro é $2p = 3r + 45 + 5r = 12$ e a área é $S = \frac{3r \cdot 4r}{2} = 6r^2$. O raio do círculo inscrito é $\frac{S}{p} = \frac{6r^2}{6r} = r$. □

Exemplo 8. Determine 4 números em progressão aritmética crescente, conhecendo sua soma 8 e a soma de seus quadrados 36.

Solução. Um bom truque, para representar progressões aritméticas com um número par de termos, é chamar os dois termos centrais de $x-y$ e $x+y$. Isso faz com que a razão seja $(x+y)-(x-y) = 2y$.

A progressão então será $x-3y$, $x-y$, $x+y$, $x+3y$.

Temos

$$\begin{cases} (x-3y)+(x-y)+(x+y)+(x+3y) = 8 \\ (x-3y)^2+(x-y)^2+(x+y)^2+(x+3y)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x = 8 \\ 4x^2 + 20y^2 = 36 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = \pm 1 \end{cases}.$$

Como a progressão é crescente, $y > 0$. Logo, $x = 2$ e $y = 1$.
Os números são $-1, 1, 3, 5$.

Exemplo 9. Em uma progressão aritmética, o termo geral é dado por um polinômio em n, $a_n = a_1 + (n-1)r = r \cdot n + (a_1 - r)$. Se $r \neq 0$, ou seja, se a progressão não for estacionária (constante), esse polinômio é de grau 1. Se $r = 0$, isto é, se a progressão for estacionária, esse polinômio é de grau menor que 1.

Por esse motivo, as progressões aritméticas de razão $r \neq 0$ são chamadas de progressões aritméticas de primeira ordem.

Reciprocamente, se em uma seqüência o termo de ordem n for dado por um polinômio em n, de grau menor que ou igual a 1, ela será um progressão aritmética. Com efeito, se $x_n = an + b$, (x_n) é a progressão aritmética na qual $a = r$ e $b = a_1 - r$, ou seja, $r = a$ e $a_1 = a + b$. □

Exemplo 10. Como em uma progressão aritmética $a_n = a_0 + nr$, a função que associa a cada natural n o valor de a_n é simplesmente a restrição aos naturais da função afim $a(x) = a(0) + rx$.

Portanto, pensando em uma progressão aritmética como uma função que associa a cada número natural n o valor a_n, o gráfico dessa função é formado por uma seqüência de pontos colineares no plano.

Em outras palavras, (a_n) é uma progressão aritmética se e somente se os pontos do plano que têm coordenadas $(1, a_1), (2, a_2), (3, a_3)$, etc... estão em linha reta.

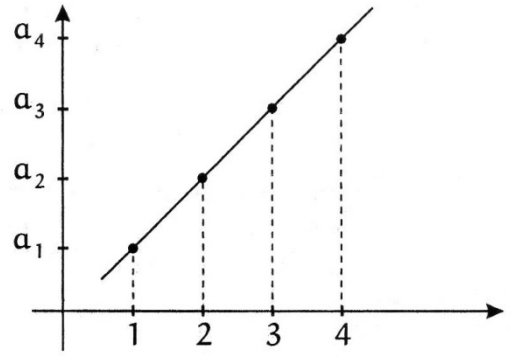


Figura 1.1 □

Quando o grande matemático alemão Carl F. Gauss (1777 – 1855) tinha sete anos de idade, seu professor lhe pediu que calculasse a soma dos inteiros de 1 até 100. O professor ficou surpreso quando, depois de poucos minutos, o pequeno Gauss anunciou que o valor da soma era 5050. A resposta estava correta e, curioso, o professor lhe perguntou como conseguira fazer o cálculo tão rapidamente. Gauss explicou-lhe que somaria primeiramente $1+100, 2+99, 3+98$, ... Assim obtivera 50 somas iguais a 101 e a resposta era $50\times 101 = 5050$.

Baseado nessa idéia, podemos calcular a soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética qualquer.

Fórmula da soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética

A soma dos n primeiros termos da progressão aritmética

$$(a_1, a_2, a_3, ...)$$

É:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

Prova. Temos $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$ e, escrevendo a soma de trás para a frente, $S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_2 + a_1$.

Daí,

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-1}) + \cdots (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

Observe que, ao passar de um parênteses para o seguinte, a primeira parcela aumenta de r e a segunda parcela diminui de r, o que não altera a soma. Portanto, todos os parênteses são iguais ao primeiro, $(a_1 + a_n)$. Como são n parênteses, temos:

$$2S_n (a_1 + a_n) \cdot n \text{ e } S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}. \qquad \square$$

Exemplo 11. Qual é o valor da soma dos 20 primeiros termos da progressão aritmética $2, 6, 10, ...$?

Solução. $a_{20} = a_1 + 19r = 2 + 19\times 4 = 78$

$$S_{20} = \frac{(2+78)20}{2} = 800. \qquad \square$$

Exemplo 12. A soma dos n primeiros números inteiros e positivos é

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Observe que S_n é um polinômio do segundo grau em n, sem termo independente.

□

Exemplo 13. A soma dos n primeiros números ímpares é

$$1+3+5+\cdots+(2n-1) = \frac{(1+2n-1)n}{2} = n^2.$$

Observe que S_n é um polinômio do segundo grau em n, sem termo independente.

Exemplo 14. A soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética é

$$S_n = \frac{(a_1+a_n)n}{2} = \frac{\left[a_1+a_1+(n-1)r\right]n}{2} = \frac{r}{2}n^2 + \left(a_1 - \frac{r}{2}\right)n.$$

Observe que, se $r \neq 0, S_n$ e um polinômio do segundo grau em n, desprovido de termo independente. Se $r = 0$, S_n é um polinômio de grau menor que 2, sem termo independente.

Reciprocamente todo polinômio do segundo grau em n, desprovido de termo independente, é o valor da soma dos n primeiros termos de alguma progressão aritmética. Com efeito $P(n) = an^2 + bn$ é a soma dos n primeiros termos da progressão aritmética na qual $\frac{r}{2} = a$ e $a_1 - \frac{r}{2} = b$, ou seja, $r = 2a$ e $a_1 = a + b$.

□

Define-se para seqüências o *operador* Δ, chamado de operador diferença por $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$, entre cada termo e o termo anterior, formam uma progressão aritmética não-estacionária.

Exemplo 15. A seqüência $(a_n) = (1,3,6,10,15,21,\ldots)$ é uma progressão aritmética de segunda ordem porque a seqüencia das diferenças entre cada termo e o termo anterior, $(b_n) = (\Delta a_n) = (a_{n+1} - a_n) = (2,3,4,5,6,\ldots)$ é uma progressão aritmética não-estacionária. □

De modo geral, uma *progressão aritmética de ordem* $k\,(k > 2)$ é uma seqüência na qual as diferenças entre cada termo e o termo anterior formam uma progressão aritmética de ordem $k-1$.

Exemplo 16. A tabela abaixo mostra uma seqüência $(a_n)=(n^3-n)$ e suas diferenças $(\Delta a_n),(\Delta^2 a_n)=(\Delta\Delta a_n),(\Delta^3 a_n)=(\Delta\Delta^2 a_n)$ etc...

n	a_n	Δa_n	$\Delta^2 a_n$	$\Delta^3 a_n$
0	0	0	6	6
1	0	6	12	6
2	6	18	18	6
3	24	36	24	6
4	60	60	60	□
5	120	90	□	
6	210	□		
7	□			

Se $(\Delta^3 a_n)$, como parece, for constante, $(\Delta^2 a_n)$ será uma progressão aritmética, (Δa_n) será uma progressão aritmética de segunda ordem e (a_n) será uma progressão aritmética de terceira ordem. Isso é verdade pois

$$\begin{aligned}
&a_n = n^3 - n,\\
&\Delta a_n = a_{n+1} - a_n = (n+1)^3 - (n+1) - \left[n^3 - n\right] = 3n^2 + 3n,\\
&\Delta^2 a_n = 3(n+1)^2 + 3(n+1) - \left[3n^2 + 3n\right] = 6n + 6,\\
&\Delta^3 a_n = 6(n+1) + 6 - \left[6n + 6\right] = 6
\end{aligned}$$

e $\Delta^3 a_n$ realmente é constante.

Observe que, nesse quadro, a soma de dois elementos lado a lado é igual ao elemento que está abaixo do primeiro desses elementos. Isso nos permite calcular os elementos que estão assinalados por □. Da direita para a esquerda, eles são iguais a $6, 30+6=36, 90+36=126$ e $210+126=336$. Portanto, $a_7 = 336$ e este foi o processo mais exótico que você já viu para calcular $a_7 = 7^3 - 7$.

Exemplo 17. Toda seqüência na qual o termo de ordem n é um polinômio em n, do segundo grau, é uma progressão aritmética de segunda ordem e, reciprocamente, se (a_n) é uma progressão aritmética de segunda ordem então (a_n) é um polinômio do segundo grau em n.

Como efeito, se $a_n = an^2 + bn + c$, com $a \neq 0$, temos

$$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n = a(n+1)^2 + b(n+1) + c - \left(an^2 + bn + c\right)$$
$$= 2an + (a+b),|$$

que é do primeiro grau em n. De acordo com o exemplo 9, (Δa_n) é uma progressão aritmética não – estacionaria.

Por outro lado, se (a_n) é uma progressão aritmética de segunda ordem, $b_n = \Delta a_n = a_{n+1} - a_n$ é uma progressão aritmética com razão diferente de zero e $b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{n-2} + b_{n-1} = (a_2 - a_1) +$
$(a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + \cdots + (a_n - a_{n-1}) + (a_{n+1} - a_n) = a_{n+1} - a_1$ é um polinômio do segundo grau em n. Em conseqüência, a_n também é um polinômio do segundo grau em n.

□

Exemplo 18. A soma dos quadrados dos n primeiros números inteiros e positivos é

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2$$

e pode ser calculado do modo a seguir:

$$\sum_{k=1}^{n} (k+1)^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1.$$

Os dois primeiros somatórios têm várias parcelas comuns, pois

$$\sum_{k=1}^{n} (k+1)^3 = 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3$$

e

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$$

Simplificando as parcelas comuns aos dois membros, obtemos

$$(n+1)^3 = 1^3 + 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1.$$

Como

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

e

$$\sum_{k=1}^{n} 1 = 1 + 1 + \cdots + 1 = n\ ,$$

temos

$$(n+1)^3 = 1^3 + 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\frac{n(n+1)}{2} + n..$$

Daí

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{2n^3+3n^2+n}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Observe que $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2$ é um polinômio do terceiro grau em n.

Exemplo 19. Sabendo que

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2$$

é um polinômio do terceiro grau em n, poderíamos ter determinado o valor de $p(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots n^2$ pondo $p(n) = an^3 + bn^2 + cn + d$. Temos $p(1) = 1^2$, $p(2) = 1^2 + 2^2$, $p(3) = 1^2 + 2^2 + 3^2$ e $p(4) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$. Obtemos o sistema de equações

$$\begin{cases} a+b+c+d = 1 \\ 8a+4b+2c+d = 5 \\ 27a+9b+3c+d = 14 \\ 64a+16b+4c+d = 30 \end{cases}$$

Resolvendo, encontramos $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{6}$, $d = 0$. Então $1^2 + 2^2 + 3^3 + \cdots + n^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n = \frac{n(n+1)(2+1)}{6}$. □

Os teoremas a seguir generalizam os últimos exemplos.

Teorema 1. $1^p + 2^p + 3^p + \cdots + n^p = \sum_{k=1}^{n} k^p$ e um polinômio de grau $p+1$ em n.

Prova. Vamos proceder por indução sobre p. Para $p = 1$, o teorema já foi provado no exemplo 12.

Suponhamos agora que $\sum_{k=1}^{n} k^p$ seja um polinômio de grau $p+1$ em n, para todo $p \in \{1,2,...,s\}$. Mostraremos que essa afirmação é verdadeira para $p = s+1$, isto é, mostraremos que $\sum_{k=1}^{n} k^{s+1}$ é um polinômio de grau $s+2$ em n.

Observe que $(k+1)^{s+2} = k^{s+2} + (s+2)k^{s+1} + ...$, onde os termos que não foram escritos explicitamente formam um polinômio de graus s em k. Temos então,

$$\sum_{k=1}^{n} (k+1)^{s+2} = \sum_{k=1}^{n} k^{s+2} + (s+2)\sum_{k=1}^{n} k^{s+1} + F(n),$$

onde $F(n)$ é um polinômio de grau $s+1$ em n, pela hipótese da indução.

Simplificando o termos comuns aos dois primeiros somatórios, obtemos

$$(n+1)^{s+2} = 1 + (s+2)\sum_{k=1}^{n} k^{s+1} + F(n).$$

Daí,

$$\sum_{k=1}^{n} k^{s+1} = \frac{(n+1)^{s+2} - 1 - F(n)}{s+2},$$

que é um polinômio de grau $s+2$ em n, c.q.d. □

Corolário. Se F é um polinômio de grau p então $\sum_{k=1}^{n} F(k)$ é um polinômio de grau $p+1$ em n.

Exemplo 20. Vamos calcular $S_n = \sum_{k=1}^{n} k(k+2)$. Pelo corolário, sabemos que o valor dessa soma é um polinômio de terceiro grau em n. Então $S_n = an^3 + bn^2 + cn + d$. Atribuindo a n os valores 1, 2, 3 e 4 obtemos as equações

$$\begin{cases} a+b+c+d = 3 \\ 8a+4b+2c+d = 11 \\ 27a+9b+3c+d = 26 \\ 64a+16b+4c+d = 50 \end{cases}$$

Resolvendo, encontramos $a = \frac{1}{3}, b = \frac{3}{2}, c = \frac{7}{6}, d = 0$. Então

$$S_n = \frac{1}{3}n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{7}{6}n = \frac{2n^3 + 9n^2 + 7n}{6} = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$$ □

Teorema 2. (a_n) é uma progressão aritmética de ordem $p\,(p \geq 2)$, se e somente se a_n é um polinômio de grau p em n.

Prova. Vamos proceder por indução sobre p. Para $p=2$ o teorema foi provado no exemplo 17.

Suponhamos agora que o teorema seja verdadeiro para todo $p \in \{2,3,...,s\}$. Mostraremos que essa afirmação é verdadeira para $p=s+1$. Se (a_n) é uma progressão aritmética de ordem $s+1$, $b_n = \Delta a_n = a_{n+1} - a_n$ é uma progressão aritmética de ordem s e, pela hipótese da indução, b_n é um polinômio de grau s em n. Então, $\sum_{k=1}^{n} b_k = a_{n+1} - a_1$ é, pelo corolário do teorema 1, um polinômio de grau $s+1$ em n. Daí, a_{n+1} e, em conseqüência, a_n são polinômios de grau $s+1$ em n.

Se a_n é um polinômio de grau $s+1$ em n, Δa_n é um polinômio de grau s em n, conforme você facilmente verificará. Pela hipótese da indução, (Δa_n) é uma progressão aritmética de ordem s, ou seja, (a_n) é uma progressão aritmética de ordem $s+1$. □

O exemplo a seguir é conhecido como teorema fundamental da somação e fornece uma técnica bastante eficiente para o cálculo de somas.

Exemplo 21. Mostre que $\sum_{k=1}^{n} \Delta a_k = a_{n+1} - a_1$.

Solução.

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta a_k = \Delta a_1 + \Delta a_2 + \Delta a_3 + \cdots + \Delta a_{n-1} + \Delta a_n = (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 + a_3) + \cdots +$$

$$(a_n - a_{n-1}) + (a_{n+1} - a_n) = a_{n+1} - a_1. \qquad \square$$

Exemplo 22. Calcule $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)$.

Solução. Determinamos a_k tal que $\Delta a_k = k(k+1) = k^2 + k$, isto é, determinaremos $a_k = \Delta^{-1}(k^2 + k)$.

Como (Δa_k) é uma progressão aritmética de segunda ordem, (a_k) é uma progressão aritmética de terceira ordem. Logo, a_k é um polinômio do terceiro grau. Se

$$\begin{aligned} a_k &= ak^3 + bk^2 + ck + d, \\ \Delta a_k &= a_{k+1} - a_k \\ &= a(k+1)^3 + b(k+1)^2 + c(k+1) + d - \left[ak^3 + bk^2 + ck + d \right] \\ &= 3ak^2 + (3a + 2b)k + (a + b + c) = k^2 + k. \end{aligned}$$

Devemos ter $3a=1, 3a+2b=1, a+b+c=0$. Daí, $a=\frac{1}{3}$, $b=0$, $c=-\frac{1}{3}$ e d é arbitrário. Logo, $a_k=\frac{1}{3}k^3-\frac{1}{3}k+d$.

$$\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\sum_{k=1}^{n}\Delta a_k=a_{n+1}-a_1$$
$$=\frac{(n+1)^3-(n+1)}{3}+d-d=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}. \qquad \square$$

Exercícios

Proceda como não soubesse que há sugestões no final dos enunciados e resposta no fim do livro.

01. Formam-se n triângulos com palitos, conforme a figura.

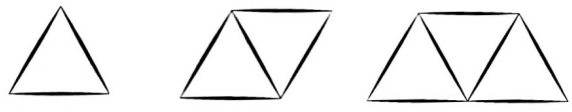


Figura 1.2

Qual o número de palitos usados para construir n triângulos?

02. Os ângulos internos de um pentágono convexo estão em progressão aritmética. Determine o ângulo mediano.

03. Se $3-x, -x, \sqrt{9-x}, \ldots$ é uma progressão aritmética, determine x e calcule o quinto termo.

04. Calcule a soma dos termos da progressão aritmética $2,5,8,11,\ldots$ desde o 25° até o 41° termo, inclusive.

05. Calcule a soma de todos os inteiros que divididos por 11 dão resto 7 e estão compreendidos entre 200 e 400.

06. Quantos são os inteiros, compreendidos entre 100 e 500, que não são divisíveis nem por 2, nem por 3 e nem por 5? Quanto vale a soma desses inteiros ?

07. Quanto valo o produto $(a)(aq)\left(aq^2\right)\left(aq^3\right)...\left(aq^{n-1}\right)$?

08. Determine o maior valor que pode ter a razão de uma progressão aritmética que admita os números 32, 227 e 942 como termos da progressão.

09. De quantos modos o número 100 pode ser representado como uma soma de dois ou mais inteiros consecutivos? E como soma de dois ou mais naturais consecutivos?

10. Um quadrado mágico de ordem n é uma matriz $n \times n$, cujos elementos são os inteiros $1,2,...,n^2$, sem repetir nenhum, tal que todas as linhas e todas as colunas têm a mesma soma. O valor dessa soma é chamado de constante mágica. Por exemplo, os quadrados

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 8 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 9 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 17 & 24 & 1 & 8 & 15 \\ 23 & 5 & 7 & 14 & 16 \\ 4 & 6 & 13 & 20 & 22 \\ 10 & 12 & 19 & 21 & 3 \\ 11 & 18 & 25 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

são mágicos, com constantes mágicas respectivamente iguais a 15, 15 e 65. Aliás, os dois últimos são hipermágicos, pois as linhas, colunas e também as diagonais têm a mesma soma. Calcule a constante mágica de um quadrado mágico de ordem n.

11. Os inteiros de 1 a 1000 são escritos ordenadamente em torno de um círculo. Partindo de 1, riscamos $1,16,31,...$ O processo continua até se atingir um número já previamente riscado. Quantos números sobram sem riscos?

12. Podem os números $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ e $\sqrt{5}$ pertencer a uma mesma progressão aritmética?

13. Suprimindo um dos elementos do conjunto $\{1,2,...,n\}$, a média aritmética dos elementos restantes é $16{,}1$. Determine o valor de n e qual foi o elemento suprimido.

14. Um bem, cujo valor hoje é de $R\$8000,00$, desvaloriza-se de tal forma que seu valor daqui a 4 anos será de $R\$2000,00$. Supondo constante a desvalorização anua, qual será o valor do bem daqui a 3 anos?

15. Um bem, cujo valor hoje é de $R\$8000,00$, desvaloriza-se de tal forma que seu valor daqui a 4 anos será de $R\$2000,00$. Supondo que o valor do bem cai segundo uma linha reta, determine o valor do bem daqui a 3 anos?

16. Calcule a soma de todas as frações irredutíveis, da forma $\frac{p}{72}$, que pertençam ao intervalo $[4,7]$.

17. Qual a maior potência de 7 que divide $1000!$?

18. Em quantos zeros termina o número resultante do cálculo de $1000!$?

19. Calcule o valor das somas dos n primeiros termos das seqüências:

a) $1^3, 2^3, 3^3, \ldots$

b) $1\cdot 4,\ 3\cdot 7, 5\cdot 10, 7\cdot 13, \ldots$

20. Representando por $\lfloor x \rfloor$ a parte inteira do real x, isto é, o maior número inteiro que é menor que ou igual a x e por $\{x\}$ o inteiro mais próximo do real x, determine:

a) $\lfloor \sqrt{1} \rfloor + \lfloor \sqrt{2} \rfloor + \lfloor \sqrt{3} \rfloor + \cdots + \lfloor \sqrt{n^2 - 1} \rfloor$

b) $\lfloor \sqrt[3]{2} \rfloor + \lfloor \sqrt[3]{2} \rfloor + \lfloor \sqrt[3]{3} \rfloor + \lfloor \sqrt[3]{n^3 - 1} \rfloor$

c) $\frac{1}{\{\sqrt{1}\}} + \frac{1}{\{\sqrt{2}\}} + \frac{1}{\{\sqrt{3}\}} + \cdots + \frac{1}{\{\sqrt{1000}\}}$

d) $\{\sqrt{1}\} + \{\sqrt{2}\} + \{\sqrt{3}\} + \cdots + \{\sqrt{1000}\}$.

Sugestões aos Exercícios

01. O aumento de um triângulo causa o aumento de 2 palitos. O número de palitos constitui uma progressão aritmética de razão 2.

02. A soma dos ângulos internos de um pentágono convexo é 540°.

03. $-x-(3-x)=\sqrt{9-x}-(-x)$.

04. Do inteiro a (inclusive) ao inteiro b (inclusive), há $b-a+1$ inteiros.

06a. Faça um diagrama para os conjuntos $X=\{x\in Z:100\le x\le 500\}$, $A=\{x\in X:x$ e divisível por $2\}$, $B=\{x\in X:x$ e divisível por $3\}$ e $C=\{x\in X:x$ é divisível por $5\}$. Queremos determinar o número de elementos do complementar de $A\cup B\cup C$ em relação ao universo X.

08. Se para passar do 32 para o 227 e para o 942 avançamos respectivamente p e q termos, temos $227=32+pr$ e $942=32+qr$. Daí, $\frac{p}{q}=\frac{195}{910}$. Como p e q são inteiros positivos, é fácil descobrir todos os valores possíveis para p e q; basta descobrir todas as frações que são iguais a $\frac{195}{910}$.

09. Se $100=(a+1)+(a+2)+\cdots+(a+n)$, com $n>1, 100=\frac{(2a+n+1)n}{2}$. Daí se conclui que $(2a+n+1)n=200$ e tanto n quanto $2a+n+1$ devem ser divisores de 200. Para evitar muitas contas, note também que sempre um dos números n e $2a+n+1$ é impar.

10. Calcule a soma de todos os elementos da matriz.

11. Uma solução muito bonita pode ser obtida pensando nos pontos riscados com vértices de um polígono. Uma solução "normal" pode ser obtida observando que o último número riscado na primeira volta é 991, o primeiro riscado na segunda volta é 6, etc...

12. Proceda como no problema 8.

13. $\frac{1+2+\cdots+(n-1)}{n-1}\le 16,1\le\frac{2+3+\cdots+n}{n-1}$

15. Esse problema é igual ao anterior.

16. Faça a soma de todas as frações subtraia a soma das redutíveis, que são as que tem numeradores múltiplos de 2 ou 3. Um diagrama de conjuntos ajuda.

17. Você substituir
$1000! = 1\times 2\times 3\times 4\times 5\times\cdots\times 1000$
por $7\times 14\times 21\times\cdots\times 994 = 7^{142}\left(1\times 2\times 3\times\cdots\times 142\right)$.

18. Você deve determinar a maior potência de 10 que divide $1000!$ Para isso basta determinar a maior potência de 5 que divide $1000!$

19a. Parta de $(k+1)^4 = k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k1$ e proceda como no exemplo 18.

19b. $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)(3k-1) = \sum_{k=1}^{n}\left(6k^2 - k - 1\right)$.

20. $\lfloor x\rfloor = k, k\geq 0$, se e somente se $k\leq x < k+1 \cdot \lfloor\sqrt{x}\rfloor = k, k\geq 0$, se e somente se $k^2 \leq x < k^2 + 2k + 1$. Há portanto $2k+1$ inteiros positivos x para os quais $\left\lfloor\sqrt{x}\right\rfloor = k$. A soma pedida é $\sum_{k=1}^{n-1}(2k+1)k$.

20c. se x inteiro positivo, $\left\{\sqrt{x}\right\} = k$, $k\geq 0$, se e somente se $k - \frac{1}{2} < \sqrt{x} < k + \frac{1}{2}$, ou seja, $k^2 - k + \frac{1}{4} < x < k^2 + k + \frac{1}{4}$, ou ainda, $k^2 - k + 1 \leq x \leq k^2 + k$. Há $2k$ inteiros positivos x tais que $\left\{\sqrt{x}\right\} = k$.

H 02

Exercícios

Proceda como não soubesse que há sugestões no final dos enunciados e resposta no fim do livro.

01. Prove que a soma de todos os inteiros positivos de n dígitos, $n>2$, é igual ao número $49499...95500...0$, no qual há $n-3$ dígitos sublinhados que são iguais a 9 e $n-2$ dígitos sublinhados que são iguais a 0.

02. Determine o primeiro termo e a razão da progressão aritmética na qual a soma dos n primeiros termos é, para todo n:

a) $S_n = 2n^2 + n$

b) $S_n = n^2 + n + 1$.

03. Determine no quadro a seguir:

a) O primeiro elemento da 31^{a} linha.

b) A soma dos elementos da 31^{a} linha.

$$
\begin{array}{ccccc}
1 & & & & \\
3 & 5 & & & \\
7 & 9 & 11 & & \\
13 & 15 & 17 & 19 & \\
21 & 23 & 25 & 27 & 27 \\
\multicolumn{5}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}
\end{array}
$$

04. Considere um jogo entre duas pessoas com as seguintes regras:

i) Na primeira jogada, o primeiro jogador escolhe um número no conjunto $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ e diz esse número.

ii) As pessoas joga alternadamente.

iii) Cada pessoa ao jogar escolhe um elemento de A, soma-o ao número dito pela pessoa anterior e diz a soma.

iv) Ganha quem disse 63.

Qual dos jogadores tem uma estratégia vencedora e qual é essa estratégia?

05. Refaça o exercício anterior para o caso do vencedor ser quem disse 64.

06. Refaça o exercício $24)$ para o conjunto $\{3,4,5,6\}$.

07. Mostre que no exercício $24)$, se o conjunto fosse $A=\{3,5,6,7\}$, o segundo jogador tem uma estratégia que impede o primeiro jogador de ganhar.

08. Na primeira fase do campeonato brasileiro de futebol, que é disputado por 24 clubes, quaisquer dois times jogam entre si uma única vez. Quantos jogos há?

09. Uma bolina de papel tem raio inteiro 5cm, raio externo 10cm e a espessura do papel é $0,01\text{cm}$. Qual é o comprimento da bobina desenrolada?

10. Dividem-se os números naturais em blocos do modo seguinte: $(1),(2.3)(4,5,6)(7,8,9)(11.12.13.15)...$ Em seguida suprimem-se os blocos que contêm um número por de elementos, formando-se o quadro:

$$1$$
$$4 \quad 5 \quad 6$$
$$11 \quad 12 \quad 13 \quad 14 \quad 15$$
$$.....$$

Determine:

a) o primeiro elemento da linha k.
b) o elemento central da linha k.
c) a soma dos elementos da linha k.
d) a soma dos elementos das k primeiras linhas.

11. Qual é o número máximo de regiões em que n retas podem dividir o plano?

12. Prove: se a_n é um polinômio de grau p então Δa_n é um polinômio de grau $p-1$.

13. Prove o corolário do teorema 1.

14. Quantos são os termos comuns às progressões aritméticas $(2,5,8,11,...,332)$ e $(7,12,17,22,...,157)$?

15. Há dois tipos de anos bissextos: os que são múltiplos de 4 mas não de 100 e os que são múltiplos de 400.

a) Quantos são os anos bissextos entre 1997 e 2401?
b) Se 1^{o} de janeiro de 1997 foi quarta feira, que dia será 1^{o} de janeiro de 2500?

c) Qual o primeiro ano, a partir de 1997, no qual o 1^{o} de janeiro será também quarta feira?
d) Escolhido um ano ao acaso, qual a probabilidade dele ser bissexto?

16. Benjamim começou a colecionar calendários em 1979. Hoje, sua coleção já tem algumas duplicatas – por exemplo, o calendário de 1985 é igual ao de 1991 - mas ainda não esta completa.
a) Em que ano Benjamim completará sua coleção?
b) Quando a coleção estiver completa, quantos calendários diferentes nela haverá?

17. A razão entre as somas dos n primeiros termos de duas progressões aritméticas é $\frac{2n+3}{4n-1}$, para todo valor de n. Quanto vale a razão entre seus termos de ordem n?

18. O números triangular T_n é definido como a soma dos n primeiros termos da progressão aritmética $1,2,3,4,\ldots$. O número quadrangular Q_n é definido como a soma dos n primeiros termos da progressão aritmética $1,3,5,7,\ldots$. Analogamente são definidos números pentagonais, hexagonais, etc. A figura abaixo justifica essa denominação.
Determine o número j-gonal de ordem n.

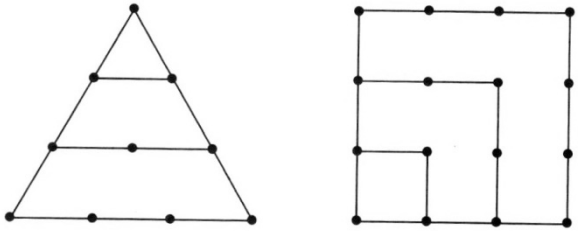


Figura 1.3

19. Mostre que se $\Delta a_k = \Delta b_k$ então $a_k - b_k$ é constante.

20. Se $a \neq 1$, determine Δa^k.

21. Se $a \neq 1$, determine $\Delta^{-1} a^k$.

22. Use o teorema fundamental da somação para calcular:

a) $\sum_{k=1}^{n} 3^k$.

b) $\sum_{k=1}^{n} k \cdot k!$.

c) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$

Sugestões aos Exercícios

01. A soma pedida é a soma de uma progressão aritmética de razão 1, com primeiro termo igual a 10^{n-1} e último termo igual a 10^{n-1}.

03. O primeiro elemento da 31^{a} linha é precedido por $1+2+\cdots+30$ termos.

04. Para ter certeza de alcançar 63, você deve antes alcançar 55.

07. Em algum momento o segundo jogador receberá uma soma maior que ou igual a 49.

08. O Botafogo joga 23 partidas; o primeiro dos times restantes joga 22 partidas que ainda não foram contadas, etc...

09. Considere a bobina formada por círculos cujos raios formam uma progressão aritmética cuja razão é a espessura do papel.

10a. Trata-se de uma progressão aritmética de segunda ordem.

10b. Trata-se de uma progressão aritmética de segunda ordem.

10c. Trata-se de uma progressão aritmética de terceira ordem.

10d. Trata-se de uma progressão aritmética de segunda ordem.

11. Trata-se de uma progressão aritmética de segunda ordem.

12. Basta mostrar que a_n e a_{n+1} são polinômios de grau p cujos termos de maior grau são idênticos e cujos termos de grau $p-1$ são diferentes.

13. Se $F(k) = a_p k^p + a_{p-1}k^{p-1} + \cdots + a_1 k + a_0$ então

$$\sum_{k=1}^{n} F(k) = a_p \sum_{k=1}^{n} k^p + a_{p-1} \sum_{k=1}^{n} k^{p-1} + \cdots + a_1 \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} a_0 .$$

14. Os termos da primeira progressão são da forma $2+3t, 0 \le t \le 110$ e os da segunda são da forma $7+5s, 0 \le s \le 30$. Devemos ter $2+3t = 7+5s$. Daí, $3t = 5(1+s)$ e t deve ser múltiplo de 5. Se $t = 5k, s = 3k-1$. As limitações $0 \le t \le 110$ e $0 \le s \le 30$ dão origem a uma limitação para k.

15b. Um ano não – bissexto tem 52 semanas e 1 dia; um ano bissexto tem 52 dias e 2 dias. Logo, o ano $x+1$ começa um dia da semana adiantado em relação ao ano x, se x não e bissexto, e dois dias adiantado, se x é bissexto.

15d. Os anos se repetem em ciclos de 400 anos.

16. Procure primeiramente entender porque os calendários de 1983 e 1991 são iguais. Em segundo lugar, note que, como há mais anos não – bissextos do que bissextos, provavelmente a coleção ficará completa quando Benjamim tiver todos os calendários de anos bissextos.

17. Mostre que a razão dada é igual à razão entre os termos de ordem $\frac{n+1}{2}$.

21. Use o exercício 40.

22a. Use o exercício 41.

22b. $\Delta k! = k \cdot k!$.

22c. $\Delta \frac{1}{k} = \frac{-1}{k(k+1)}$.

H 03

Progressões

Progressões Geométricas

Um problema interessante, que costuma deixar os alunos intrigados e os professores desconfiados, é o problema a seguir, adaptado de um problema do exame nacional da MAA (Mathematical Association of America).

Exemplo 1. Uma pessoa, começando com $R\$64{,}00$, faz seis apostas consecutivas, em cada uma das quais arrisca perder ou ganhar a metade do que possui na ocasião. Se ela ganha três e perde três dessas apostas, pode-se afirmar que ela:

a) ganha dinheiro.
b) não ganha nem perde dinheiro.
c) perde $R\$27{,}00$.
d) perde $R\$37{,}00$.
e) ganha ou perde dinheiro, dependendo da ordem em que ocorreram suas vitórias e derrotas.

Comentário. Em geral os alunos escolhem uma ordem para ver o que acontece; aliás, essa é até uma boa estratégia. Por exemplo, se ela vence as três primeiras apostas e perde as últimas três, o seu capital evolui de acordo com o esquema: $64 \to 96 \to 144 \to 216 \to 108 \to 54 \to 27$.

Se ela começou com $R\$64{,}00$ e terminou com $R\$27{,}00$, ela perdeu $R\$37{,}00$. Já houve um progresso. Sabemos agora que a resposta só poderá ser C) ou E).

Em seguida ao alunos costumam experimentar uma outra ordem; por exemplo, ganhando e perdendo alternadamente. Obtêm-se: $64 \to 96 \to 48 \to 72 \to 36 \to 54 \to 27$. Nessa ordem a pessoa também perdeu $R\$37{,}00$.

Em seguida, experimentam outra ordem, torcendo para que a pessoa não termine com $R\$27{,}00$, o que permitiria concluir que a resposta é E). Infelizmente encontram que a pessoa novamente termina com $R\$27{,}00$ e permanecem na dúvida na duvida. Alguns se dispõem a tentar todas as ordens possíveis, mas logo desistem ao perceber que há 20 ordens possíveis.

Solução. A melhor maneira de abordar problemas nos quais há uma grandeza variável, da qual é conhecida a taxa (porcentagem) de variação, é concentrar a atenção, não na taxa de variação da grandeza, e sim no valor da grandeza depois da variação.

Neste problema, devemos pensar assim: Cada vez que ganha, o capital aumenta de $\frac{1}{2}$ (ou seja 50%) e passa a valer $1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ do que valia; cada vez que perde, o capital diminui de $\frac{1}{2}$ (ou seja, 50%) e passa a valer $1-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ do que valia; cada vez que perdeu, o capital diminui de $\frac{1}{2}$ (ou seja, 50%) e passa a valer $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ do que valia.

Pensando assim, fica claro que se a pessoa vence as três primeiras apostas e perde as três últimas, a evolução de seu capital se dá de acordo com o esquema:

$$64 \to 64\cdot\frac{3}{2} \to 64\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2} \to 64\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2} \to 64\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2} \to$$
$$\to 64\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} \to 64\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot$$

Ela termina com $64\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=27$ reais. Além disso, fica claro também que se as vitórias e derrotas tivessem ocorrido em outra ordem, isso apenas mudaria a ordem dos fatores, sem alterar o produto, e a pessoa também terminaria com $\mathrm{R\$}\,27{,}00$.

Se ela começa com $\mathrm{R\$}\,64{,}00$ e terminou com $\mathrm{R\$}\,27{,}00$ ela perdeu $\mathrm{R\$}\,37{,}00$. A resposta é C). □

Exemplo 2. Aumentando de 20% o raio da base de um cilindro e diminuindo de 30% sua altura, de quanto variará seu volume?

Solução. O volume é diretamente proporcional ao quadrado do raio e á sua altura. Portanto, $V=kr^2h$, onde k é a constante de proporcionalidade. Sabemos que $k=\pi$, mas isso é irrelevante para o problema.

Depois da variação, os novos valores de r e de h serão $r'=1{,}2r$ e $h'=0{,}7h$, pois o que aumenta de 20% passa a valer $120\%=1{,}2$ do que valia e o que diminui de 30% passa a valer $70\%=0{,}7$ do que valia.

O novo volume será

$$V'=k\left(1{,}2r\right)^2\,0{,}7h=1{,}008\,k\,r^2h=100{,}8\%\;V\;.$$

O volume aumenta de $0{,}8\%$. □

Exemplo 3. A população de um pais é hoje igual a P_0 e cresce 2% ao ano. Qual será a população desse país a n anos?

Solução. Se a população cresce 2% ao ano, em cada ano a população é de 102% da população do ano anterior. Portanto, a cada ano que passa, a população sofre uma multiplicação por $102\% = 1,02$. Depois de n anos, a população será $P_0 \cdot 1,02^n$. □

Exemplo 4. A torcida de certo clube é hoje igual a P_0 e decresce 5% ao ano. Qual será a torcida desse clube daqui a n anos?

Solução. Se a torcida decresce 5% ao ano, em cada ano a torcida é 95% da torcida do ano anterior. Portanto, a cada ano que passa, a torcida sofre uma multiplicação por $95\% = 0,95$. Depois de n anos, a torcida será $P_0 \cdot 0,95^n$.

O que deve ter ficado claro nesses exemplos é que se uma grandeza tem taxa de crescimento igual a i, cada valor da grandeza é igual a $(1+i)$ vezes o valor anterior.

Progressões geométricas são seqüências nas quais a taxa de crescimento i de cada termo para o seguinte é sempre a mesma.

Exemplo 5. A seqüência $(1,2,4,8,16,32,...)$ é um exemplo de uma progressão geométrica. Aqui a taxa de crescimento de cada termo para o seguinte é de 100%, o que faz com que cada termo seja igual a 200% do termo anterior.

□

Exemplo 6. A seqüência $(1000,800,640,512,...)$ é um exemplo de uma progressão geométrica. Aqui, cada termo é 80% do termo anterior. A taxa de crescimento de cada termo para o seguinte é de -20%.

É claro então que numa progressão geométrica cada termo é igual ao anterior multiplicado por $1+i$, onde i e a taxa de crescimento dos termos. Chamamos $1+i$ de razão da progressão e representamos a razão por q.

Portanto, uma progressão geométrica é uma seqüência na qual é constante o quociente da divisão de cada termo pelo termo anterior. Esse quociente constante é chamado de razão da progressão e é representado pela letra q. A razão q de uma progressão geométrica é simplesmente o valor de $1+i$, onde i é a taxa de crescimento constante de cada termo para o seguinte.

Exemplo 7. As seqüências $(2,6,18,54,...)$ e $(128,32,8,2,...)$ são progressões geométricas cujas razões valem respectivamente $q_1 = 3$ e $q_2 = \frac{1}{4}$. Suas taxas de crescimento são respectivamente $i_1 = 2 = 200\%$ e $i_2 = -\frac{3}{4} = -75\%$, pois $q = 1 + i$.

□

Em uma progressão geométrica $(a_1, a_2, a_3, ...)$, para avançar um termo basta multiplicar pela razão; para avançar dois termos, basta multiplicar duas vezes pela razão, e assim por diante.

Por exemplo, $a_{13} = a_5 q^8$, pois avançamos 8 termos ao passar de a_5 para a_{13}; $a_{12} = a_7 q^5$, pois avançamos 5 termos ao passar de a_7 para a_{12}; $a_4 = \frac{a_{17}}{a^{13}}$, pois ao passar de a_{17} para a_4, retrocedemos 13 termos; de modo geral, $a_n = a_1 q^{n-1}$, pois, ao passar de a_1 para a_n, avançamos $n-1$ termos.

Em muitos casos é mais natural numerar os termos a partir de zero, como foi feito nos exemplos 3 e 4; nesse caso, $a_n = a_0 q^n$, pois avançamos n termos ao passar de a_0 para a_n. □

Exemplo 8. Em uma progressão geométrica, o quinto termo vale 5 e o oitavo termo vale 135. Quanto vale o sétimo termo dessa progressão?

Solução. $a_8 = a_5 q^3$, pois ao passar do quinto termo para o oitavo, avançamos 3 termos. Logo, $135 = 5q^3$ e $q = 3$. Analogamente, $a_7 = a_5 q^2 = 5 . 3^2 = 45$. O sétimo termo vale 45. □

Exemplo 9. Como em uma progressão geométrica $a_n = a_0 q^n$, a função que associa a cada natural n o valor de a_n é simplesmente a restrição aos naturais da função exponencial $a(x) = a(0) q^x$. Portanto, pensando em uma progressão geométrica como uma função que associa a cada número natural n o valor a_n, o gráfico dessa função e formado por um seqüência de pontos pertencentes ao gráfico de uma função exponencial. □

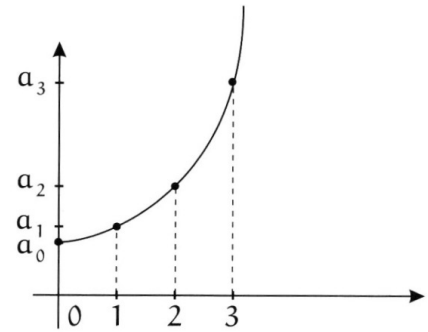


Figura 1.4

Exemplo 10. Qual é a razão da progressão geométrica que se obtém inserindo 3 termos entre os números 30 e 480?

Solução. Temos $a_1 = 30$ e $a_5 = 480$. Como $a_5 = a_1 q^4$, $480 = 30q^4$, $q^4 = 16$ e $q = \pm 3$. □

Um resultado importante é a fórmula que relaciona taxas de crescimento referidas a períodos de tempos diversos.

Fórmula das taxas equivalentes

Se I é a taxa de crescimento de uma grandeza relativamente ao período de tempo T e i é a taxa de crescimento relativamente ao período t, e se $T = nt$, então $1 + \mathrm{I} = (1+i)^n$. □

Prova. Seja G_0 o valor inicial da grandeza. Após um período de tempo T, o valor da grandeza será $G_0(1+\mathrm{I})^1$. Como um período de tempo T equivale a n períodos de tempo iguais a t, o valor da grandeza será também igual a $G_0(1+\mathrm{I})^n$. Logo, $G_0(1+\mathrm{I})^1 = G_0(1+i)^n$ e $1+\mathrm{I} = (1+i)^n$, cqd.

Exemplo 11. Se a população de um país cresce 2% ao ano, quanto crescerá em 25 anos?

Solução. Temos $i = 2\% = 0,02$ e $n = 25$. Daí, $1+\mathrm{I} = (1+i)^n = (1+0,02)^{25} \cong 1,6406$ e $\mathrm{I} \cong 0.6406 = 64,06\%$. Crescerá aproximadamente $64,06\%$.

Exemplo 12. Uma bomba de vácuo retira, em cada sucção, 2% do gás existente em certo recipiente. Depois de 50 sucções, quanto restará do gás inicialmente existente?

Solução. Temos $i = -2\% = -0,02$ e $n = 50$. Daí, $1 + \mathrm{I} = (1+i)^n = (1-0,02)^{50} \cong 0,3642$ e $\mathrm{I} \cong -0,6358 = -63,58\%$. A quantidade de gás diminuirá de aproximadamente $63,58\%$. Restarão aproximadamente $36,42\%$ do gás inicialmente existente.

□

Outro resultado importante é a:

Fórmula da soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica

A soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica (a_n) de razão $q \neq 1$, é $S_n = a_1 \dfrac{1-q^n}{1-q}$.

Prova. $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$.

Multiplicando por q m obtemos

$$qS_n = a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n + a_{n+1}$$

Subtraindo, $S_n - qS_n = a_1 - a_{n+1}$, isto é, $S_n(1-q) = a_1 - a_1 q^n$ e, finalmente, $S_n = a_1 \dfrac{1-q^n}{1-q}$. □

Exemplo 13. Diz a lenda que o inventor do xadrez pediu como recompensa 1 grão de trigo pela primeira casa, 2 grãos pela segunda, 4 pela terceira e assim por diante, sempre dobrando a quantidade a cada nova casa. Como o tabuleiro de xadrez tem 64 casas, o número de grãos pedido pelo inventor do jogo é a soma dos 64 primeiros termos da progressão geométrica $1, 2, 4, \ldots$. O valor dessa soma é

$$S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q} = 1\frac{1-2^{64}}{1-2} = 2^{64} - 1.$$

Calculando, obtemos um estupendo número de vinte dígitos:

$$18\,446\,744\,073\,709\,551\,615.$$ □

Nas progressões geométricas em que $|q| < 1$, a soma dos n primeiros termos tem um limite finito quando $n \to \infty$. Como nesse caso $\lim\limits_{x\to\infty} q^n = 0$ temos

$$\lim_{x\to\infty} S_n = a_1 \frac{1-0}{1-q}, \text{ isto é, } \lim_{x\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}.$$

Exemplo 14. O limite da soma $0,3+0,03+0,003+\ldots$ quando o número de parcelas tende a infinito é igual a $\frac{0,3}{1-0,1}=\frac{1}{3}$. O resultado é intuitivo pois somando um número muito grande de termos da progressão encontraremos aproximadamente a dízima periódica $0,333333\cdots=\frac{1}{3}$. □

Exemplo 15. Calcule o limite da soma da progressão geométrica $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots$.

Solução. $\lim\limits_{x\to\infty} S_n=\frac{q_1}{1-q}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$.

O resultado admite uma interessante paráfrase. Suponha que Salvador deva correr 1km. Inicialmente ele corre metade dessa distância, isto é, $\frac{1}{2}\text{km}$; em seguida ele corre metade da distância que falta isto é, $\frac{1}{4}\text{km}$; depois, metade da distância restante, isto é, $\frac{1}{8}\text{km}$, e assim por diante.

Depois de n dessas etapas, Salvador terá corrido

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}\text{km}.$$

Se n for grande, essa soma será aproximadamente igual a 1km. □

Exemplo 16. O teorema fundamental da somação, $\sum\limits_{k=1}^{n}\Delta a_k=a_{n+1}-a_1$, também nos permitiria determinar o valor da soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica. Supondo $q\neq 1$ e observando que $\Delta q^{k-1}=q^k-q^{k-1}=q^{k-1}\left(q-1\right)$, temos

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}a_1q^{k-1}=\frac{a_1}{q-1}\sum_{k=1}^{n}\Delta q^{k-1}=$$
$$=\frac{a_1}{q-1}\left(q^{n+1-1}-q^0\right)=a_1\frac{1-q^n}{1-q}.$$

□

Encerramos esta seção com a chamada fórmula de somação por partes. Temos $\Delta(a_k b_k) = a_{k+1}b_{k+1} - a_k b_k = a_{k+1}(b_{k+1} - b_k) + b_k(a_{k+1} - a_k) = a_{k+1}\Delta b_k + b_k \Delta a_k$.

Daí resulta $a_{k+1}\Delta b_k = \Delta(a_k b_k) - b_k \Delta a_k$. Somando, obtemos a fórmula de somação por partes:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{k+1}\Delta b_k = a_{n+1}b_{n+1} - a_1 b_1 - \sum_{k=1}^{n} b_k \Delta a_k$$

Exemplo 17. Calcule $\sum_{k=1}^{n} k3^k$.

Solução. $\Delta 3^k = 3^{k+1} - 3^k = 3^k(3-1) = 2 \cdot 3^k$.

Logo, $3^k = \frac{1}{2}\Delta 3^k$ e $\sum_{k=1}^{n} k3^k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k\Delta 3^k$.

Aplicando a fórmula de somação por partes

$$\sum_{k=1}^{n} a_{k+1}\Delta b_k = a_{n+1}b_{n+1} - a_1 b_1 - \sum_{k=1}^{n} b_k \Delta a_k$$

com $a_{k+1} = k$ (logo, $a_k = k-1$ e $\Delta a_k = a_{k+1} - a_k = 1$) e $b_k = 3^k$, temos

$$\sum_{k=1}^{n} k3^k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k\Delta 3^k = \frac{1}{2}\left[n \cdot 3^{n+1} - 0 - \sum_{k=1}^{n} 3^k \cdot 1 \right].$$

Mas

$$\sum_{k=1}^{n} 3^k = 3\frac{1-3^n}{1-3} = \frac{3^{n+1}}{2} - \frac{3}{2}.$$

Daí resulta

$$\sum_{k=1}^{n} k3^k = \frac{n}{2}3^{n+1} - \frac{3^{n+1}}{4} + \frac{3}{4} = \frac{2n-1}{4}3^{n+1} + \frac{3}{4}.$$ □

Exercícios

01. Aumentos sucessivos de 10% e 20% equivalem a um aumento único de quanto?

02. Descontos sucessivos de 10% e 20% equivalem a um desconto único de quanto?

03. Um aumento de 10% seguido de um desconto de 20% equivale a um desconto único de quanto?

04. Aumentando sua velocidade em 60%, de quanto você diminui o tempo de viagem?

05. Um decrescimento mensal de 5% gera um decrescimento anual de quanto?

06. O período de um pêndulo simples é diretamente proporcional à raiz quadrada do seu comprimento. De quanto devemos aumentar o comprimento para aumentar de 20% o período?

07. Mantida constante a temperatura, a pressão de um gás perfeito é inversamente proporcional a seu volume. De quanto aumenta a pressão quando reduzimos de 20% o volume?

08. Se a base de um retângulo aumenta de 10% e a altura diminui de 10%, de quando aumenta a área?

09. Um carro novo custa $R\$18000{,}00$ e, com 4 anos de uso, vale $R\$1200{,}00$. Supondo que o valor decresça a uma taxa anual constante, determine o valor do carro com 1 ano de uso.

10. Os lados de um triângulo retângulo formam um progressão geométrica crescente. Determine a razão dessa progressão.

11. Os lados de um triângulo estão em progressão geométrica. Entre que valores pode variar a razão?

12. Qual o quarto termo da progressão geométrica $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[6]{2}$,...?

13. Determine três números em progressão geométrica, conhecendo sua soma 19 e a soma de seus quadrados 133.

14. A soma de três números em progressão geométrica é 19. Subtraindo-se 1 ao primeiro, eles passam a formar uma progressão aritmética. Calcule-os.

15. Quatro números são tais que os três primeiros formam uma progressão aritmética de razão 6, os três últimos uma progressão geométrica e o primeiro número é igual ao quarto. Determine-os.

16. Número perfeito é aquele que é igual à metade da soma dos seus divisores positivos. Por exemplo, 6 é perfeito pois a soma dos seus divisores é $1+2+3+6=12$. Prove que, se 2^p-1 é um número primo, então $2^{p-1}\cdot\left(2^p-1\right)$ é um número perfeito.

17. Calcule o valor da soma de n parcelas $1+11+\cdots+111...1$.

18. Mostre que o número $444...488...89$, formado por n dígitos iguais a 4, $n-1$ dígitos iguais a 8 e um dígito igual a 9, é um quadrado perfeito. Determine sua raiz quadrada.

19. A espessura de uma folha de estanho é $0{,}1\text{mm}$. Forma-se uma pilha de folhas colocando-se uma folha na primeira vez e, em cada uma das vezes seguintes, tantas quantas já houveram sido colocadas anteriormente. Depois de 33 dessas operações, a altura da pilha será, aproximadamente:

a) a altura de um poste de luz,
b) a altura de um prédio de 40 andares.
c) o comprimento da praia de Copacabana.
d) a distância Rio – São Paulo.
e) o comprimento do equador terrestre.

Sugestões aos Exercícios

09. O valor, em mil reais, do carro com n anos de uso forma a progressão geométrica na qual $a_0=18$ e a_{12}. Determine a_1.

13. $a+aq+aq^2=19$ e $a^2+a^2q^2+a^2q^4=133$. Divida.

14. Comece pela progressão aritmética $x-r,x,x+r$. A progressão geométrica será $x-r+1,x,x+r$. Temos $\left(x-r+1\right)+x+\left(x+r\right)=19$ e $\dfrac{x}{x-r+1}=\dfrac{x+r}{x}$.

15. Os números são $x-6, x, x+6, x-6$ e $\frac{x+6}{x} = \frac{x-6}{x+6}$.

16. Os divisores são da forma $2^{\alpha} \cdot \left(2^{p}-1\right)^{\beta}$ com $\alpha \in \{0,1,..., p-1\}$ e $\beta \in \{0,1\}$. Para calcular a soma dos divisores, some separadamente os divisores que têm $\beta = 1$.

17. A k-ésima parcela da soma é $1+10+10^2+\cdots+10^{k-1}$.

18. O número é $9+8\cdot 10+8\cdot 10^2+\cdots+8\cdot 10^{n-1}+4\cdot 10^n+\cdots+4\cdot 10^{2n-1}$.

19. Cada operação dobra o número de folhas. Use $2^{10} = 1024 \cong 10^3$.

H 04

20. Um garrafão contém p litros de vinho. Retira-e um litro de um vinho do garrafão e acrescenta-se um litro de água, obtendo-se uma mistura homogênea; retira-se, a seguir um litro da mistura e acrescenta-se um litro de água e assim por diante. Qual a quantidade de vinho que restará no garrafão após n dessa operações?

21. Calcule a soma dos divisores de 12.600 que sejam:
a) positivos.
b) ímpares e positivos.

22. Determine as geratrizes das dízimas periódicas:
a) $0{,}141\ 414\ 141...$
b) $0{,}345\ 454\ 545...$
c) $0{,}999\ 999\ 999...$
d) $1{,}711\ 111\ 111...$

23. Determine os limites das somas abaixo:
a) $2+\frac{2}{3}+\frac{2}{9}+...$
b) $\frac{1}{7}+\frac{2}{7^2}+\frac{1}{7^3}+\frac{2}{7^4}+\frac{1}{7^5}+\frac{2}{7^6}+...$
c) $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{8}+\frac{7}{16}+\frac{9}{32}+...$
d) $1+2x+3x^2+4x^3+...,-1<x<1$
e) $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}-...$

24. Larga-se uma bola de uma altura 5m. Após cada choque com o solo, ela recupera apenas $4/9$ da altura anterior. Determine:
a) a distância total percorrida pela bola.
b) o tempo gasto pela bola até parar.

25. Na figura abaixo temos uma linha poligonal, de lados ora perpendiculares a AB, ora perpendiculares a AC. Sendo a e b, respectivamente, os dois lados da poligonal, pede-se determinar:
a) o comprimento da mesma.
b) o comprimento do n-ésimo lado do poligonal.

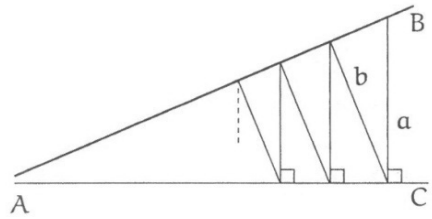


Figura 1.5

26. Na figura abaixo temos um espiral formada por semicírculos cujos centros pertencem ao eixo das abcissas. Se o raio do primeiro semicírculo é igual a 1 e o raio de cada semicírculo é igual à metade do raio do semicírculo anterior, determine:

a) o comprimento da espiral

b) a abcissa do ponto P, ponto assintótico da espiral.

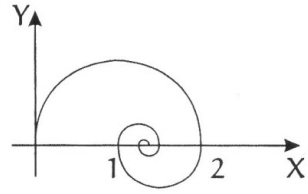


Figura 1.6

27. Na figura a seguir temos uma seqüência de círculos tangentes a duas retas. O raio do primeiro círculo é 1 e o raio do segundo é $r<1$. Cada círculo tangencia externamente o círculo anterior. Determine a soma dos raios dos n primeiros círculos.

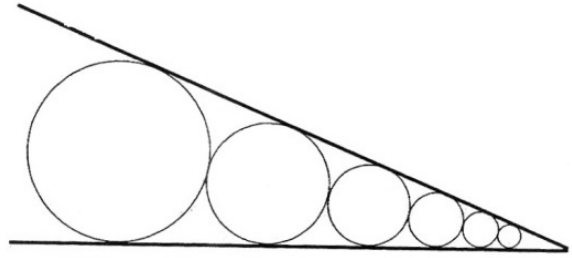


Figura 1.7

28. Uma faculdade recebe todos os anos 300 alunos novos no primeiro semestre e 200 alunos novos no segundo semestre. 30% dos alunos são reprovados no primeiro período e repetem o período no semestre seguinte. Sendo a_n e b_n, respectivamente, o número de alunos do primeiro período no primeiro e no segundo semestres do ano n, calcule $\lim a_n$ e $\lim b_n$.

29. Seja S_n a soma das áreas dos n primeiros quadrados obtidos a partir de um quadrado Q_1 de lado 1 pelo seguinte processo: "os vértices do quadrado Q_{n+1} são os pontos médios dos lados de Q_n". Determine quais das afirmações abaixo são verdadeiras:

1) É possível escolher S_n de modo que $S_n > 1,9$.
2) É possível escolher S_n de modo que $S_n > 2$.
3) É possível escolher S_n de modo que $S_n > 2,1$.
4) É possível escolher S_n de modo que $S_n = 2$.
5) É possível escolher S_n de modo que $S_n = 1,75$.

30. Calcule $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{3^{2n}}$.

31. Sendo x e y positivos, calcule:

a) $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x...}}}}$

b) $\sqrt{x\sqrt{y\sqrt{x\sqrt{y...}}}}$

32. Começando com um segmento de tamanha 1, dividimo-los em três partes iguais e retiramos o interior da parte central, obtendo dois segmentos de comprimento $1/3$. Repetimos agora essa operação com cada um desses segmentos e assim por diante.

a) O valor de S_n.

b) O valor de $\lim S_n$.

c) Certo livro, muito citado em aulas de análise de erros de livros didáticos, afirma que, ao final, o conjunto dos pontos não retirados é vazio. Isso é verdade?

33. Se (a_n) é uma progressão geométrica de termos positivos, prove que (b_n) definida por $b_n = \log a_n$ é uma progressão aritmética.

34. Se (a_n) é uma progressão aritmética, prove que (b_n) definida por $b_n = e^{a_n}$ é uma progressão geométrica.

35. O rádio - 226 tem meia-vida (período de tempo em que metade da massa inicialmente presente se desintegra) de 1600 anos. A taxa de variação da massa é constante. Em quanto tempo a terça parte da massa inicialmente presente se desintegrará?

36. Sejam $a = 111...1$ (n dígitos iguais a 1) e $b = 100...05$ ($n-1$ dígitos iguais a 0). Prove que $ab+1$ é um quadrado perfeito e determine sua raiz quadrada.

37. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$. Determine A^n.

38. A curva de Koch é obtida em estágios pelo processo seguinte:

i) No estágio 0, ela é um triângulo eqüilátero de lado 1.

ii) O estágio $n+1$ é obtido a partir do estágio n, dividindo cada lado em três partes iguais, construindo externamente sobre a parte central um triângulo eqüilátero e suprimindo então a parte central (ver figura abaixo). Sendo P_n e A_n respectivamente o perímetro e a área do n-ésimo estágio da curva de Koch, determine:

a) P_n.

b) A_n.

c) $\lim P_n$.

d) $\lim A_n$.

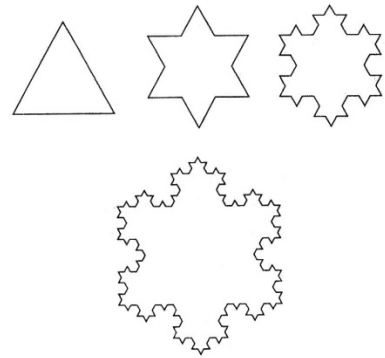


Figura 1.8

39. Pitágoras[1], que estudou a geração dos sons, observou que duas cordas vibrantes, cujos comprimentos estivessem na razão de 1 para 2, soariam em uníssono. Hoje sabemos que a razão das freqüências dos sons emitidos por essas cordas seria a razão inversa dos seus comprimentos, isto é, de 2 para 1 e que duas é cordas vibram em uníssono se e só se a razão de seus comprimentos é uma potência inteira de 2.

[1]Pitágoras, matemático de Samos, cerca de cinco séculos e meio antes de Cristo.

A freqüência da nota lá-padrão (o lá central do piano) é $440\,\text{Hz}$ e a freqüência do lá seguinte, mais agudo, é $880\,\text{Hz}$ (Hz é a abreviatura de hertz, unidade de freqüência que significa ciclo por segundo).
A escala musical ocidental (de J.S.Bach para cá), dita cromática, divide esse intervalo em doze semitons iguais, isto é, tais que a razão das freqüência de notas consecutivas é constante.
Sabendo que essas são LÁ – LÁ# - SI – DÓ – DÓ# - RÉ – RÉ# - MI – FÁ – FÁ# - SOL – SOL# - LÁ, determine:

a) a freqüência desse dó, primeiro dó seguinte ao lá padrão.
b) a freqüência do sinal de discar de um telefone, que é o primeiro sol anterior ao lá padrão.
c) a nota cuja freqüência é $186\,\text{Hz}$.

40. A lei de Weber (Ernest Heinrich Weber; 1795 – 1878; fisiologista alemão), para resposta de seres humanos a estímulos físicos, declara que diferenças marcantes na resposta a um estímulo ocorrem para variação de intensidade do estímulo proporcionais ao próprio estímulo. Por exemplo, um homem, que sai de um ambiente iluminado para outro, só percebe um variação da luminosidade se esta for superior a 2%; só distingue entre soluções salinas se a variação da salinidade for superior 25%, etc...
Fechner (Gustav Theodor Fechner; 1801 – 1887; físico e filósofo alemão) propôs um método de construção de escalas baseado na lei de Weber. Propôs que enquanto os estímulos variassem em progressão geométrica, as medidas das respostas variassem em progressão aritmética.

a) Mostre que numa escala de Fechner, as medidas da resposta y e do estímulo x se relacionam por $y = a + b\log x$.
b) Uma das mais conhecidas escalas de Fechner é a que mede a sensação de ruído. Ela é definida por $L = 120 + 10\log_{10} I$, onde L é a medida da sensação de ruído em decibéis (dB) e I e a intensidade sonora, medida em W/m^2. Duas bandas de "heavy metal" provocam um ruído quantos decibéis acima do ruído provocado por uma banda?

41. Determine o valor de:

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}$

b) $\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot 2^k$.

Sugestões aos Exercícios

20. Em cada operação, a quantidade de vinho diminui de $\frac{1}{p}$.

23b. São duas progressões geométricas.

23c. Sendo S a soma pedida, calcule $\frac{S}{2}$ e subtraia.

23d. Sendo S a soma pedida, calcule xS e subtraia.

23e. São três progressões geométricas.

24b. O tempo que uma bola gasta, partindo do repouso, para cair de uma altura h é $\sqrt{2h/g}$ e quando um bola é lançada do chão verticalmente para cima, o tempo gasto na subida é igual ao tempo da descida.

25. Os triângulos são semelhantes e a razão de semelhança de cada um para o anterior é sempre a mesma.

26. A abcissa do ponto assintótico é $2-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+...$

28. $\lim a_n = 300 + 0,3 \cdot 200 + 0,3^2 \cdot 300 + 0,3^3 \cdot 200 + ...$

30. Inspire-se no problema 23c).

31a. A expressão é igual a $x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{4}} \cdot x^{\frac{1}{8}} ...$

32c. O que acontece com os pontos de abcissas $\frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{3^3}$ etc?

35. Tomando 1600 anos como unidade de tempo, a massa existente no instante t é $M(t) = M(0)0,5^t$.

36. $a = 1 + 10 + 10^2 + \cdots 10^{n-1}$ e $b = 10^n + 5$.

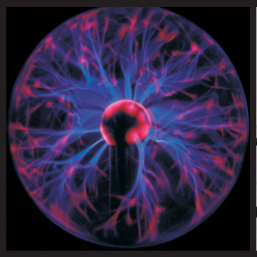
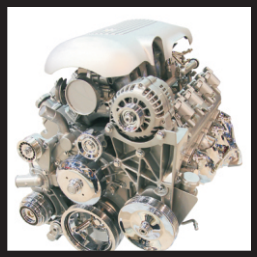
37. $A^2 = 5A$.

38. $P_{n+1} = \frac{4}{3}$ e $A_{n+1} = A_n + \frac{\sqrt{3}}{12}\left(\frac{4}{9}\right)^n$

41a. Somação por partes com $a_{k+1} = k^2$ e $\Delta b_k = \left(\frac{1}{2}\right)^k$.

41b. Somação por partes com $a_{k+1} = k$ e $\Delta b_k = 2^k$.

Coleção **olimpo**

IME ITA

opirus
EDITORA