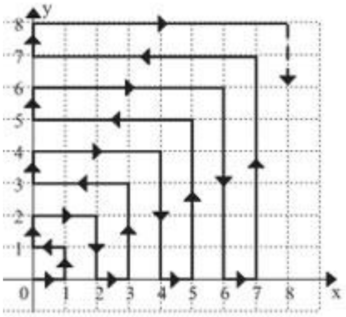
Exercícios de Matemática
Sequências

1) (FUVEST-2009) A soma dos cinco primeiros termos de uma PG, de razão negativa, é $\frac{1}{2}$. Além disso, a diferença entre o sétimo termo e o segundo termo da PG é igual a 3.
Nessas condições, determine:
a) A razão da PG.
b) A soma dos três primeiros termos da PG.

2) (UFSCar-2009) Uma partícula se move ao longo do primeiro quadrante do plano cartesiano ortogonal a partir do ponto (0, 0), conforme indica o gráfico a seguir.

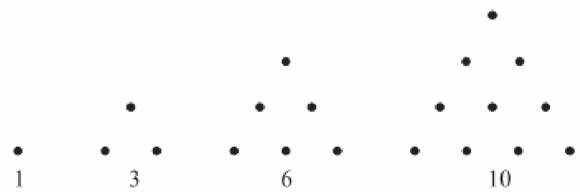


O deslocamento de 1 unidade (vertical ou horizontal) do plano é feito em 1 minuto pela partícula, com velocidade constante.

Mantido o mesmo padrão de movimento, a partícula atingirá o ponto (50, 50), a partir do início do deslocamento, em exatas
a) 42 horas e meia.
b) 38 horas.
c) 36 horas e meia.
d) 27 horas.
e) 19 horas e meia.

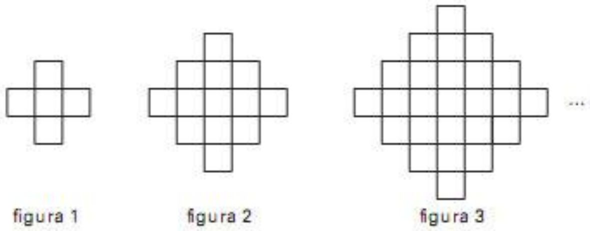
3) (UNIFESP-2007) As medidas dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados formam uma progressão aritmética em que o primeiro termo é a_1 e a razão é $r > 0$.
a) Se $a_1 \geq 25°$ e se $r \geq 10°$, obtenha o valor máximo possível para n nas condições enunciadas.
b) Se o maior ângulo mede 160º e a razão é igual a 5º, obtenha o único valor possível para n.

4) (UNIFESP-2008) "Números triangulares" são números que podem ser representados por pontos arranjados na forma de triângulos eqüiláteros. É conveniente definir 1 como o primeiro número triangular. Apresentamos a seguir os primeiros números triangulares.



Se T_n representa o n-ésimo número triangular, então $T_1 = 1$, $T_2 = 3$, $T_3 = 6$, $T_4 = 10$, e assim por diante. Dado que T_n satisfaz a relação $T_n = T_{n-1} + n$, para n = 2,3,4,..., pode-se deduzir que T_{100} é igual a
a) 5.050.
b) 4.950.
c) 2.187.
d) 1.458.
e) 729.

5) (UFSCar-2008) Observe o padrão de formação das figuras numeradas.



a) Sabendo-se que as figuras 1, 2 e 3 são formadas, respectivamente, por 5, 13 e 25 quadrados de área $1cm^2$, calcule a área da figura 10 da seqüência indicada.
b) Seja x o número da figura x, e f(x) o número de quadrados de $1cm^2$ que compõem essa mesma figura. Em relação à função f, determine sua lei de formação e seus conjuntos domínio e imagem.

6) (UFC-2007) A seqüência $(a_n)_{n\geq1}$ tem seus termos dados pela fórmula $a_n = \frac{n+1}{2}$. Calcule a soma dos dez primeiros termos da seqüência $(b_n)_{n\geq1}$, onde $b_n = 2^{a_n}$ para $n \geq 1$.

7) (FUVEST-2007) Em uma progressão aritmética a_1, a_2, ..., a_n, ... a soma dos n primeiros termos é dada por $S_n = b.n^2 + n$, sendo b um número real. Sabendo-se que $a_3 = 7$, determine

a) o valor de b e a razão da progressão aritmética.
b) o 20º termo da progressão.
c) a soma dos 20 primeiros termos da progressão.

8) (ESPM-2006) De 1995 a 2004, a população de uma cidade vem aumentando anualmente em progressão aritmética. Em 2004 constatou-se que o número de habitantes era 8% maior que no ano anterior. Pode-se concluir que, de 1995 a 2004, a população dessa cidade aumentou em:
a) 200%
b) 180%
c) 160%
d) 100%
e) 80%

9) (UFV-2005) O interior de uma jarra é um cilindro circular reto e contém V litros de água. Se fosse retirado 1 litro desta água, o raio, o diâmetro e a altura da água, nesta ordem, formariam uma progressão aritmética. Se, ao contrário, fosse adicionado 1 litro de água na jarra, essas grandezas, na mesma ordem, formariam uma progressão geométrica. O valor de V é:
a) 6
b) 4
c) 9
d) 7
e) 5

10) (UFC-2006) Seja f uma função polinomial de primeiro grau, crescente e tal que f(f(x)) = 9x + 8, para todo x real. Sabendo-se que 2, 5, 8, ..., 44 é uma progressão aritmética de razão 3, o valor numérico de f(2) + f(5) + f(8) + ... + f(44) é:
a) 1020
b) 1065
c) 1110
d) 1185
e) 1260

11) (UERJ-2005) A figura acima apresenta 25 retângulos. Observe que quatro desses retângulos contêm números e um deles, a letra n.

			n	
	65			
				130
		75		
0				

Podem ser escritos, em todos os outros retângulos, números inteiros positivos, de modo que, em cada linha e em cada coluna, sejam formadas progressões aritméticas de cinco termos.
Calcule:
a) a soma dos elementos da quarta linha da figura;
b) o número que deve ser escrito no lugar de n.

12) (ITA-2005) Seja a_1, a_2, ... uma progressão aritmética infinita tal que

$$\sum_{k=1}^{n} a_{3k} = n\sqrt{2} + \pi.n^2, \text{ para } n \in IN^*$$

Determine o primeiro termo e a razão da progressão.

13) (UFRJ-1999) Uma progressão geométrica de 8 termos tem primeiro termo igual a 10. O logaritmo decimal do produto de seus termos vale 36. Ache a razão da progressão.

14) (UERJ-1998) Geraldo contraiu uma dívida que deveria ser paga em prestações mensais e iguais de R$ 500,00 cada uma, sem incidência de juros ou qualquer outro tipo de correção monetária. Um mês após contrair essa dívida, Geraldo pagou a 1ª prestação e decidiu que o valor de cada uma das demais prestações seria sempre igual ao da anterior, acrescido de uma parcela constante de K reais, sendo K um número natural. Assim, a dívida poderia ser liquidada na metade do tempo inicialmente previsto.
a) Considerando t o tempo, em meses, inicialmente previsto, t > 2 e t - 2 como um divisor par de 2000, demonstre que $K = \frac{2000}{t-2}$.
b) Se a dívida de Geraldo for igual a R$ 9000,00, calcule o valor da constante K.

15) (Fatec-1996) Num certo jogo de azar, apostando-se uma quantia X, tem-se uma das duas possibilidades seguintes:
1) perde-se a quantia X apostada;
2) recebe-se a quantia 2X.
Uma pessoa jogou 21 vezes da seguinte maneira: na primeira vez, apostou 1 centavo; na segunda vez, apostou 2 centavos, na terceira vez, apostou 4 centavos e assim por diante, apostando em cada vez o dobro do que havia apostado na vez anterior. Nas 20 primeiras vezes, ela perdeu. Na 21ª vez, ela ganhou. Comparando-se a quantia total T por ela desembolsada e a quantia Q recebida na 21ª jogada, tem-se que Q é igual a:
a) $\frac{T}{2}$
b) T
c) 2T
d) T-1
e) T+1

16) (FGV-2004) Seja a seqüência (a_1, a_2, a_3, … a_n, …) tal que $a_n = \log 10^{n-1}$, em que $n \in N^*$.
O valor de $\sum_{n=1}^{100} a_n$ é:
a) 4 950
b) 4 850
c) 5 050
d) 4 750
e) 4 650

17) (FGV-2004) Dois amigos, Alfredo e Bruno, combinam disputar a posse de um objeto num jogo de "cara ou coroa". Alfredo lança 3 moedas e Bruno 2 moedas, simultaneamente. Vence o jogo e, conseqüentemente, fica com o objeto, aquele que conseguir o maior número de caras. Ocorrendo empate,

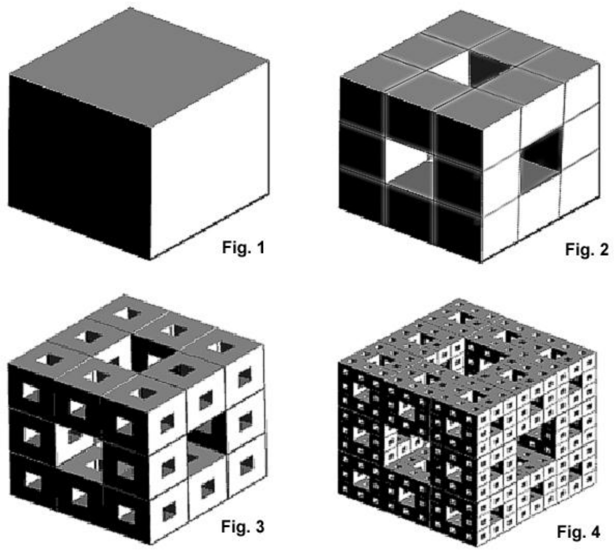
a experiência será repetida, tantas vezes quantas forem necessárias, até que haja um vencedor. Calcule:
a) a probabilidade de que Alfredo vença a disputa na primeira experiência.
b) a probabilidade de que Alfredo vença a disputa.

18) (Vunesp-2004) Considere os números complexos w = 2i e z = (1 + i).
Determine:
a) z^2 e $(w^2 \cdot \bar{z} + w)$, onde $\bar{z}$ indica o conjugado de z.
b) |z| e |w|. Mostre que a seqüência (1, |z|, |w|, |zw|, $|w^2|$) é uma progressão geométrica, determinando todos os seus termos e a sua razão.

19) (CPCAR-2003) Um candidato do CPCAR 2003, preparando-se para o teste de aptidão física, exercita-se numa esteira percorrendo 3,8 km por dia. Para um treinamento menos cansativo, ele inicia correndo a uma velocidade de 12 km/h e a cada 10 minutos ele reduz a velocidade pela metade. É correto afirmar que

a) o candidato completa o percurso de 3,8 km em menos de 45 minutos.
b) para percorrer a metade do percurso de 3,8 km ele gasta mais de 10 minutos.
c) após 30 minutos, a velocidade atingida é de 6 km/h no mínimo.
d) aos 40 minutos ele percorreu 3,5 km exatamente.

20) (UEL-2002) A figura construída segundo a seqüência abaixo é denominada Esponja de Sierpinski ou Esponja de Menger. Representa um fractal gerado a partir de um cubo. Partindo-se do cubo inicial, obtêm-se outros cubos menores, com arestas iguais a $\frac{1}{3}$ da aresta deste. O cubo central e os cubos do centro de cada face são removidos. O procedimento se repete em cada um dos cubos menores restantes. O processo é iterado infinitas vezes, gerando a Esponja. Supondo que a medida da aresta do cubo inicial seja igual a 1 m, qual é a área, em m^2, de uma face da figura 30?



a) $\left(\frac{8}{9}\right)^{30}$

b) $\left(\frac{8}{9}\right)^{29}$

c) $\left(\frac{9}{8}\right)^{30}$

d) $\left(\frac{20}{27}\right)^{19}$

e) $\left(\frac{27}{20}\right)^{19}$

21) (Unicamp-2003) Considere o conjunto S = {n $\in$ IN: $20 \le n \le 500$}.
a) Quantos elementos de S são múltiplos de 3 **e** de 7?
b) Escolhendo-se ao acaso um elemento de S, qual a probabilidade de o mesmo ser um múltiplo de 3 **ou** de 7?

22) (IME-1996) Calcule a soma a seguir:
$$\frac{1}{1.4}+\frac{1}{4.7}+\frac{1}{7.10}+\ldots+\frac{1}{2998.3001}$$

23) (FGV-2003) a) calcule $\sum_{j=1}^{60}(2j-1)$.
b) Obtenha o 20º termo da progressão geométrica $\left(1, -\frac{x}{2}, \frac{x^2}{4}, \ldots\right)$.

24) (PUC-SP-2003) Os termos da seqüência (10, 8, 11, 9, 12, 10, 13, ...) obedecem a uma lei de formação. Se a_n, em que $n \in \mathbb{N}^*$, é o termo de ordem n dessa seqüência, então $a_{30} + a_{55}$ é igual a

a) 58
b) 59
c) 60
d) 61
e) 62

25) (Unicamp-1994) Dada uma seqüência qualquer $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$, tem-se:

$$\sum_{j=1}^{n} (a_{j-1} - a_j) = (a_0 - a_1) + (a_1 - a_2) + \ldots + (a_{n-1} - a_n) = a_0 - a_n$$

No caso em que $a_J = j^3$, essa identidade assume a forma:

$$\sum_{j=1}^{n} \left[(j-1)^3 - j^3 \right] = 0^3 - n^3 = -n^3$$

Use esta identidade para mostrar que:

$$\sum_{j=1}^{n} j^2 = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$$

26) (Unicamp-1994) Seja $\alpha \neq -1$ um número complexo tal que $\alpha^n = 1$, onde n é um número inteiro positivo. Prove que, se n for par, a expressão $1 - \alpha + \alpha^2 - \alpha^3 + \ldots + (-\alpha)^n$ é igual a 1; e, se n for ímpar, essa expressão é igual a $\frac{1-\alpha}{1+\alpha}$.

27) (Fuvest-2003) No plano cartesiano, os comprimentos de segmentos consecutivos da poligonal, que começa na origem 0 e termina em B (ver figura), formam uma progressão geométrica de razão p, com $0 < p < 1$. Dois segmentos consecutivos são sempre perpendiculares. Então, se OA = 1, a abscissa x do ponto B = (x, y) vale:

a) $\frac{1-p^{12}}{1-p^4}$

b) $\frac{1-p^{12}}{1+p^2}$

c) $\frac{1-p^{16}}{1-p^2}$

d) $\frac{1-p^{16}}{1+p^2}$

e) $\frac{1-p^{20}}{1-p^4}$

28) (Olimpíada de Matemática Argentina-1988) Dados os números 7 e 15 determinar um terceiro número positivo tal que, ao se efetuar de todas as maneiras possíveis a soma de dois quaisquer deles multiplicada pelo restante se obtenham três números em progressão aritmética. Indique todas as soluções.

29) (OMU-2002) Considere as seqüências $S_n = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$ e $T_n = 1.2 + 2.3 + \ldots + n(n + 1)$.

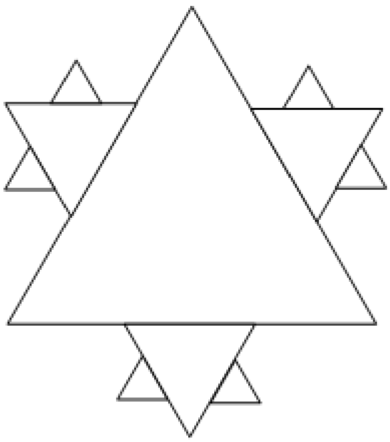
Calcule S_4, T_4 e $T_4 - S_4$.
Ache n tal que $T_n - S_n = 210$.

30) (Unicamp-1998) Considere uma progressão geométrica de termos não-nulos, na qual cada termo, a partir do
terceiro, é igual à soma dos dois termos imediatamente anteriores.

a) Calcule os dois valores possíveis para a razão q dessa progressão.

b) Supondo que o primeiro termo seja $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ e $q > 0$, calcule a soma dos três primeiros termos dessa progressão.

31) (Unicamp-1990) Construir "fractais" no computador corresponde a um procedimento como o descrito a seguir. A partir de um triângulo eqüilátero, de área A, acrescentamos no meio de cada lado um outro triângulo eqüilátero de lado igual á um terço do anterior; aos lados livres destes triângulos acrescentamos triângulos de lados iguais a um terço dos anteriores e assim sucessivamente construímos uma figura com uma infinidade de triângulos (veja o desenho). Calcule a área, em termos de A, da região determinada por esse processo.



32) (Unirio-1995) Dado um triângulo retângulo cujos catetos medem 2cm, construímos um segundo triângulo retângulo onde um dos catetos está apoiado na hipotenusa do primeiro e o outro cateto mede 2cm. Construímos um terceiro triângulo com um dos catetos medindo 2cm e o outro apoiado na hipotenusa do segundo triângulo. Se continuarmos a construir triângulos sempre da mesma forma, a hipotenusa do 15º triângulo medirá:
a) 15cm.
b) $15\sqrt{2}$ cm.
c) 14cm.
d) 8cm.
e) $8\sqrt{2}$ cm.

33) (Mack-1996) Num paralelepípedo retângulo a soma das medidas de todas as arestas é 52 e a diagonal mede $\sqrt{91}$. Se as medidas das arestas estão em progressão geométrica, então o seu volume é:
a) 216.
b) 108.
c) 81.
d) 64.
e) 27.

34) (UFC-1996) Considere a seqüência (a_n), na qual o produto $a_1.a_2. ... .a_n=2^n.n!$
Determine a soma $a_1 + a_2 + ... +a_8$.

35) (Unicamp-modificada-1990) Construir "fractais" no computador corresponde a um procedimento como o descrito a seguir. A partir de um triângulo eqüilátero, de área A, acrescentamos no meio de cada lado um outro triângulo eqüilátero de lado igual á um terço do anterior; aos segmentos livres destes triângulos acrescentamos triângulos de lados iguais a um terço dos anteriores e assim sucessivamente construímos uma figura com uma infinidade de triângulos (veja o desenho). Calcule a área, em termos de A, da região determinada por esse processo.

36) (UFRS-0) Para p e q inteiros e positivos, a soma dos 100 primeiros múltiplos de p é A e a soma dos 100 primeiros múltiplos de q é B. O valor de (A+B) é:
a) 200pq
b) 200(p+q)
c) 500(p+q)
d) 5050(p+q)
e) 505pq

37) (Fuvest-1999) Seja (a_n) uma progressão geométrica de 1º termo $a_1 = 1$ e razão q^2, onde q é um número inteiro maior que 1. Seja (b_n) uma progressão geométrica cuja razão é q. Sabe-se que $a_{11} = b_{17}$. Neste caso:
a) Determine o primeiro termo b_1 em função de q.
b) Existe algum valor de n para o qual $n_a = b_n$?
c) Que condição n e m devem satisfazer para que $a_n = b_m$?

38) (Fuvest-1998) 500 moedas são distribuídas entre três pessoas A, B e C, sentadas em círculo, da seguinte maneira: A recebe uma moeda, B duas, C três, A quatro, B cinco, C seis, A sete, e assim por diante, até não haver mais moedas suficientes para continuar o processo. A pessoa seguinte, então, receberá as moedas restantes.

a) Quantas foram as moedas restantes e quem as recebeu? (Deixe explícito como você obteve a resposta.)
b) Quantas moedas recebeu cada uma das três pessoas?

39) (Fuvest-1998) A soma das frações irredutíveis, positivas, menores do que 10, de denominador 4, é:
a) 10
b) 20
c) 60
d) 80
e) 100

40) (Fuvest-1997) Do conjunto de todos os números naturais n, $n \leq 200$, retiram-se os múltiplos de 5 e, em seguida, os múltiplos de 6. Calcule a soma dos números que permanecem no conjunto.

41) (Fuvest-2004) Um número racional r tem representação decimal da forma $r = a_1a_2,a_3$ onde $1 \leq a_1 \leq 9$, $0 \leq a_2 \leq 9$, $0 \leq a_3 \leq 9$. Supondo-se que:
» a parte inteira de r é o quádruplo de a_3 ,
» a_1, a_2, a_3 estão em progressão aritmética,
» a_2 é divisível por 3,
então 3 a vale:
a) 1
b) 3
c) 4
d) 6
e) 9

42) (UFBA-1996) Em um paralelepípedo retângulo P, a altura h, a diagonal da base d e a diagonal D são, nessa ordem, os termos consecutivos de uma progressão aritmética de razão r =1. Sendo a base do paralelepípedo P um quadrado, pode-se afirmar:

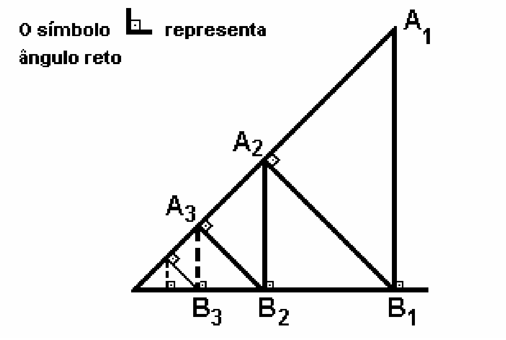
(01) h.d.D = 60 cm^3
(02) O volume de P é V = 16 cm^2
(04) A área total de P é S = $4(4+3\sqrt{2})$ cm^2

(08) A área do círculo inscrito na base de P é S = 2π cm^2

(16) O perímetro do triângulo cujos lados coincidem com h, d, D é p =12cm

A resposta é a soma dos pontos das alternativas corretas

43) (Fuvest-1994) Na figura a seguir , $A_1B_1=3$, $B_1A_2=2$.



Calcule a soma dos infinitos segmentos: $A_1B_1+B_1A_2+A_2B_2+B_2A_3+...$

Gabarito

1) a) -2

b) $\frac{3}{22}$

2) Alternativa: A

3) a) n = 8

b) n = 9

4) Alternativa: A

5) a) A área é $221cm^2$.
b) $f(x) = 2x^2 + 2x + 1$, $x \in$ IN*
Domínio:
D = IN*
Conjunto imagem:
Im = $\{5, 13, 25, \ldots, 2x^2 + 2x + 1, \ldots\}$, $x \in$ IN*

6)
$S_{10} = 62\,(\sqrt{2} + 1)$

7) a) $b = \frac{6}{5}$ e $r = \frac{12}{5}$

b) $a_{20} = \frac{239}{5}$

c) $S_{20} = 500$

8) Alternativa: A

9) Alternativa: D

10) Alternativa: B

11) a) Soma dos elementos da 4ª linha = 5.75 = 375
b)

			n	
	65			
2x	y			130
x	z	75		
0				

Na 3ª linha
$$\Rightarrow \begin{cases} 130 = 2x + 4r \Rightarrow r = \frac{65 - x}{2} \\ y = 2x + \frac{65 - x}{2} = \frac{65 + 3x}{2} \end{cases}$$

Na 4ª linha $\Rightarrow z = \frac{x + 75}{2}$

Na 2ª coluna $\Rightarrow 2y = 65 + z$

$$65 + 3x = 65 + \frac{x + 75}{2}$$

x = 15

6075 9010 5				
45	65			
30	55			
15				
0				

n = 105

12) O primeiro termo é $\sqrt{2}$ - $\frac{\pi}{3}$, e a razão é $\frac{2\pi}{3}$.

13) Razão = 10

14) a) Dívida original em t prestações → valor total = 500t
Com a mudança em t prestações → valor total = 500 + 500 + K + 500 + 2K + 500 + 3K+ ... + 500 + $\left(\frac{t}{2} - 1\right)K$
= $\left(250 + \frac{(t-2)K}{8}\right).t$

Igualando os totais, obtemos: $K = \frac{2000}{t-2}$

b) 500t = 9000 → t = 18, então $K = \frac{2000}{18-2} = 125$

15) Alternativa: E

16) Alternativa: A

17) a) $\frac{1}{8} + \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{2} + \frac{10}{32} \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{10}{32}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}$ + ... (soma infinita de PG) = $\frac{8}{11}$

18) a) 2i e -4 + 6i

b) $|z| = \sqrt{2}$, $|w| = 2$ e a seqüência é $(1, \sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, 4)$, que é uma progressão geométrica de razão $\sqrt{2}$.

19) Alternativa: A

20) Alternativa: B

21) a) os múltiplos de 3 e de 7 são múltiplos de 21: são 23 múltiplos
b) são (500 – 19 = 481) 481 números no espaço amostral;
desses, 160 são múltiplos de 3; 69 são múltiplos de 7 e 23 são múltiplos comuns de 3 e 7, ou seja, temos (160 + 69 – 23 = 206) 206 números no evento pedido.
Assim, $P = \dfrac{206}{481}$

22) Resp: $\dfrac{1000}{3001}$
Resolução: Observe que:

$$\frac{1}{1.4} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4}\right)$$

$$\frac{1}{4.7} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7}\right)$$

$$\frac{1}{7.10} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{7} - \frac{1}{10}\right)$$

...

$$\frac{1}{2998.3001} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2998} - \frac{1}{3001}\right)$$

A soma pedida fica:

$$\frac{1}{1.4} + \frac{1}{4.7} + \frac{1}{7.10} + \ldots + \frac{1}{2998.3001} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7}\right) + \ldots + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2998} - \frac{1}{3001}\right) =$$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \ldots + \frac{1}{2998} - \frac{1}{3001}\right) =$$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3001}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{3000}{3001}\right) = \frac{1000}{3001}$$

23) a) S = 1 + 3 + ... + 119 = 3600
b) $-\dfrac{x^{19}}{2^{19}}$

24) Alternativa: B
Supondo que os termos de ordem ímpar formem uma PA(10, 11, 12...) e o de ordem par, formem outra PA(8, 9, 10,...) então $a_{30} = 22$ e $a_{55} = 37$. Assim a soma é 59

OBS: Não há garantias que a seqüência apresentada seja formada por duas PA intercaladas. Isso foi assumido como a provável intenção do autor da questão. Mas, a rigor, a seqüência apresentada poderia ter qualquer número como a_{30} e a_{55}...e então a questão ficaria sem resposta.

25) Seja S o somatório pedido: $S = \sum_{j=1}^{n} j^2$

Do enunciado, temos que $\sum_{j=1}^{n}\left[(j-1)^3 - j^3\right] = 0^3 - n^3 = -n^3$

Então, $\sum_{j=1}^{n}\left[(j-1)^3 - j^3\right] = \sum_{j=1}^{n}\left[(j^3 - 3j^2 + 3j - 1) - j^3\right] =$

$\sum_{j=1}^{n}\left[-3j^2 + 3j - 1\right] = \sum_{j=1}^{n} -3j^2 + \sum_{j=1}^{n} 3j + \sum_{j=1}^{n} -1 =$

$-3\sum_{j=1}^{n} j^2 + 3\sum_{j=1}^{n} j - \sum_{j=1}^{n} 1 = -3S + 3(1+2+3+...+n) - (1+1+...+1) = -3S + 3\dfrac{(n+1)n}{2} - n = -n^3$

Isolando S, temos $S = \dfrac{-n^3 + n - \dfrac{3n^2 + 3n}{2}}{-3} =$

$$\frac{n^3}{3} - \frac{n}{3} + \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$$

26) $1 - \alpha + \alpha^2 - \alpha^3 + ... + (-\alpha)^n$ é a soma dos n+1 primeiros termos da PG de $a_1 = 1$ e $q = -\alpha$, portanto

$1 - \alpha + \alpha^2 - \alpha^3 + ... + (-\alpha)^n = \dfrac{(-\alpha)^{n+1} - 1}{-\alpha - 1} = \dfrac{(-\alpha)^n(-\alpha) - 1}{-\alpha - 1}$

Assim, se n for par, $\dfrac{(-\alpha)^n(-\alpha) - 1}{-\alpha - 1} = \dfrac{(\alpha)^n(-\alpha) - 1}{-\alpha - 1} = \dfrac{-\alpha - 1}{-\alpha - 1} = 1$ e

se n for ímpar, $\dfrac{(-\alpha)^n(-\alpha) - 1}{-\alpha - 1} = \dfrac{-(\alpha)^n(-\alpha) - 1}{-\alpha - 1} = \dfrac{\alpha - 1}{-\alpha - 1} = \dfrac{1 - \alpha}{1 + \alpha}$

27) Alternativa: D

28) Seja x o terceiro número, temos então seis possibilidades:

1) $22x \le 7(x + 15) \le 15(x + 7)$, então a razão, calculando a diferença entre os últimos termos, seria 8x, por outro lado, calculando entre os dois primeiros, seria 105 - 15x, logo 105 - 15x = 8x, e x = 105/23.

2) $7(x + 15) \le 22x \le 15(x + 7)$, então por um lado a razão deveria ser 105 - 7x, e por outro 15x - 105, assim 105 - 7x = 15x - 105, então x = 105/11.

3) $7(x + 15) \le 15(x + 7) \le 22x$, então teríamos pelo mesmo argumento 7x - 105 = 8x, logo x = -105, que não convém.

29) a) $S_4 = 1 + 4 + 9 + 16 = 30$. $T_4 = 2 + 6 + 12 + 20 = 40$. $T_4 - S_4 = 10$.

b) $T_n - S_n = \sum_{i=1}^{n}(i+1)i - i^2 = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$. Assim $n^2 + n - 420 = 0$, logo $(n - 20)(n + 21) = 0$, assim n = 20.

30) a) $q = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ou $q = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

b) $S_3 = -1-\sqrt{5}$

31) Excetuando-se o 1º triângulo (de área A), as áreas dos demais formam uma PG infinita de razão 2/9 e cuja soma infinita é 3A/7. Desta forma, a soma total das áreas é A+ 3A/7 = **10A/7**

32) Alternativa: D

33) Alternativa: E

34) $a_1=2$, $a_2=4$, $a_3=6$,....$a_8=16$, portanto a soma $a_1+...+a_8 = 72$

35) Excetuando-se o 1º triângulo (de área A), as áreas dos demais formam uma PG infinita de razão $\frac{4}{9}$ e cuja soma infinita é $3\frac{A}{5}$. Desta forma, a soma total das áreas é $A + 3\frac{A}{5} = 8\frac{A}{5}$.

36) Alternativa: D

$A = p+2p+3p+4p+...+100p = p(1+2+3+...+100) = \frac{(1+100).100}{2}p = 5005p$

$B = q+2q+3q+4q+\ldots+100q = q(1+2+3+\ldots+100) = 5005q$

$A+B = 5005(p+q)$

37) a) $b_1 = q^4$

b) sim, n = 5

c) 2n – m = 5

38) a) B recebeu as 4 moedas restantes.

b) A: 176
B: 159
C: 165

39) Alternativa: E

40) S = 20100 - 4100 - 3366 + 630 = 13264

41) Alternativa: E

Se a aparte inteira de r é o quádruplo de a_3, então $10a_1 + a_2 = 4.a_3$. Considerando que a_1, a_2,a_3 estão em PA, então $2a_2 = a_1 + a_3$. Isolando a_3 na 2ª equação e substituindo na 1ª, temos que $a_2 = 2a_1$. Então, a_2 é par, e, conforme o enunciado, divisível por 3. Assim, $a_2 = 6$ e $a_3 = 9$.

42) V - F - F - V - V → 1 + 8 + 16 = **25**

43) Temos 2 PGs infinitas de razão 4/9, uma iniciando em $A_1B_1 = 3$ e englobando apenas os segmentos verticais e outra iniciando em $B_1A_2 = 2$ englobando os inclinados. A soma das duas PGs resulta em **S = 9**.