RUMO AO ITA – SEMANA 07

POLINÔMIOS

Polinômio de uma Variável

Chamamos polinômio de grau **n** a forma descritiva:

$$a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \dots a_nx^n = \sum_{i=0}^{n} a_1x^1$$

$$\text{onde } \begin{cases} n \subset N; \\ a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \text{ são reais ou complexos;} \\ a_n \neq 0; \\ \mathbf{x} \text{ é uma variável.} \end{cases}$$

- **Exemplos**

a) $4 + 3x - 7x^2$ é um polinômio de grau 2.
b) $7x - 4x^7$ é um polinômio de grau 7.
c) $\sqrt{7}x^9$ é um polinômio de grau 9.
d) 27 é um polinômio de grau 0.
e) $4 - \frac{5}{3}x$ é um polinômio de grau 1.
f) $ix^2 + (2+i)x - 3$ é um polinômio de grau 2.

A definição pode ser estendida, incluindo o **0** como polinômio. Tal polinômio é chamado de **polinômio duplo** (ou identicamente nulo). Para esse polinômio não é definido o grau.

Dado um polinômio **P**, o grau de **P** poderá ser notado por ∂P.

Dado um polinômio **P**, na variável **x**, ele poderá ser representado por P(x).

Dado um polinômio:

$$P(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \dots + a_nx^n,$$

para obtermos o seu valor numérico para $x = \alpha$, basta, substituindo **x** por α, calcular o valor de:

$$P(\alpha) = a_0\alpha^0 + a_1\alpha^1 + a_2\alpha^2 + \dots + a_n\alpha^n$$

Grau

Dados dois polinômios **P** e **Q**, tais que $\partial P \geq \partial Q$, então:

a) $P = Q \Rightarrow \partial P = \partial Q$
b) $\partial[P \cdot Q] = \partial P + \partial Q$
c) $\partial[P : Q] = \partial P - \partial Q$
d) $\partial[P + Q] \leq \partial P \ (\text{se } P + Q \neq 0)$

Raiz

Dado um polinômio **P**, se $P(\alpha) = 0$, dizemos que α é uma raiz (ou zero) de **P**.

Igualdade de Polinômios

Consideremos dois polinômios **f** e **g** de mesmo grau:

$$f = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

$$g = b_0x^0 + b_1x^1 + b_2x^2 + \dots + b_nx^n$$

Dizemos que **f** é igual a **g** se, e somente se, $a_1 = b_1$ para todo $i(i \leq n)$.

Algoritmo da Divisão

Dado o polinômio $A(x)$ e um polinômio $B(x)$ não-nulo, existe, e é único, o par de polinômios $Q(x)$ e $R(x)$, satisfazendo as seguintes condições:

a) $A(x) = Q(x) \cdot B(x) + R(x)$ e
b) $R(x) \neq 0 \Rightarrow \partial R(x) < \partial B(x)$.

- **Observações**

$$\begin{array}{l|l} A(x) & B(x) \\ \cline{2-2} R(x) & Q(x) \end{array}$$

$A(x)$: dividendo
$B(x)$: divisor
$Q(x)$: quociente
$R(x)$: resto

1. Se tivermos $R(x) = 0$, a condição **a** resume-se em $A(x) = Q(x) \cdot B(x)$, e, neste caso, podemos dizer que:
   a) $A(x)$ é divisível por $B(x)$.
   b) $B(x)$ é um divisor de $A(x)$.
   c) $A(x)$ é um múltiplo de $B(x)$.
   d) A divisão de $A(x)$ por $B(x)$ é exata.

2. Se $A(x)$ é divisível por $B(x)$, escrevemos $B(x) \mid A(x)$.

3. Casos particulares.
   a) Se $A(x)=0$, então $Q(x)=0$ e $R(x)=0$.
   b) Se $\partial A(x)<\partial B(x)$, então $Q(x)=0$ e $R(x)=A(x)$.
   c) Nos demais casos, isto é, aqueles em que $\partial A(x)\geq\partial B(x)$, tem-se $\partial A(x)=\partial Bx+\partial Q(x)$.

Teorema do Resto

O resto da divisão de um polinômio $P(x)$ por $(x-a)$ é $P(a)$.

De uma maneira mais geral, podemos ter como divisor: $(x+a)$; $(ax+b)$; $(ax-b)$, onde o resto é dado de acordo com a tabela abaixo.

Dividendo	Divisor	Resto
$P(x)$	$x+a$	$P(-a)$
$P(x)$	$x-a$	$P(a)$
$P(x)$	$ax+b$	$P\left(-\frac{b}{a}\right)$
$P(x)$	$ax-b$	$P\left(\frac{b}{a}\right)$

Teorema de D'Alembert

A condição necessária e suficiente para que o polinômio $P(x)$ seja divisível por $(x-a)$ é que **a** seja uma raiz de $P(x)$, isto é, $P(a)=0$.

Dispositivo Prático de Briot-Ruffini

• **Exemplo 1**

Vamos efetuar a divisão $\left(2x^4-7x^2+3x-1\right):(x-3)$.

3	2	0	−7	3	−1
	$\underbrace{2}_{2}$	$\underbrace{2\cdot3+0}_{6}$	$\underbrace{6\cdot3-7}_{11}$	$\underbrace{11\cdot3+3}_{36}$	$\underbrace{36\cdot3-1}_{107}$

Quociente: $2x^3+6x^2+11x+36$
Resto: 107

Sequência:
a) Em cima, à direita, como o divisor é (x – 3), marcamos 3.
b) Em cima, em seguida, escrevemos todos os coeficientes do dividendo (mesmo os que são iguais a zero), ordenados segundo as potências decrescentes de **x**:
c) Baixamos o 1º algarismo 2.
d) 2 · 3 + 0 = 6; 6 · 3 – 7 =11; 11 · 3 + 3 = 36; 36 · 3 – 1 = 107.
e) 2, 6, 11 e 36 são os coeficientes do quociente.
f) 107 é o resto.

• **Exemplo 2**

$\left(3x^4-2x^4+x^2-7x+1\right):(3x-5)$, lembrando que $(3x-5)=3\left(x-\frac{5}{3}\right)$, vamos dividir primeiro por $\left(x-\frac{5}{3}\right)$ e depois por 3.

$\frac{5}{3}$	3	−2	1	−7	1
	$\underbrace{3}_{3}$	$\underbrace{3\cdot\frac{5}{3}-2}_{3}$	$\underbrace{3\cdot\frac{5}{3}+1}_{6}$	$\underbrace{6\cdot\frac{5}{3}-7}_{3}$	$\underbrace{3\cdot\frac{5}{3}+1}_{6}$

Quociente: x^3+x^2+2x+1
Resto: 6

Máximo Divisor Comum de Polinômios

Máximo divisor comum de vários polinômios $P_1(x), P_2(x), \ldots, P_n(x)$ é um polinômio de maior grau, da forma $K\cdot D(x)$, que divide separadamente os polinômios dados, sendo **K** um número real qualquer, não-nulo.

Seja $D(x)-a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$; se $a_0=1$, diremos que $D(x)$ é um polinômio unitário. Se **D** é um máximo divisor comum e é unitário, então indicaremos:

$$\text{mdc}(P_1, P_2, \ldots, P_n)=D(x)$$

Cálculo do Máximo Divisor Comum

Um dos métodos para o cálculo do máximo divisor comum é o das divisões sucessivas:
a) Dados os polinômios $P_1(x)$ e $P_2(x)$ com $\partial P_1\geq\partial P_2$.
b) Deixar P_1 e P_2 na forma reduzida e ordenada, dividindo-se em seguida P_1 por P_2.
c) Seja R_1 o resto da divisão anterior. Se $R_1=0$, então, se P_2 for um polinômio unitário, $\text{mdc}(P_1\cdot P_2)=P_2$, caso contrário o máximo divisor comum será $K\cdot P_2$, tal que KP_2 seja unitário.

   Se $R_1\neq0$, então:

d) Prosseguir na divisão, isto é, dividir P_2 por R_1. Seja R_2 o resto desta segunda divisão. Se $R_2=0$, e R_1 for um polinômio unitário, então o $\text{mdc}(P_1\cdot P_2)=R_1$, caso contrário o máximo divisor comum será $K\cdot R_1$, tal que KR_1 seja unitário.

Sendo $R_2 \neq 0$, prosseguir com as divisões sucessivas até obter um resto nulo.

e) O máximo divisor comum é o último divisor utilizado; se ele for uma constante, dizemos que os polinômios são primos entre si.

Mínimo Múltiplo Comum de Polinômios

Mínimo múltiplo comum de vários polinômios $P_1(x), P_2(x), \ldots, P_n(x)$ é o polinômio de menor grau na forma $K \cdot M(x)$ divisível pelos polinômios dados separadamente, onde **K** é um número real não-nulo.

Se $M(x)$ for um polinômio unitário, indicaremos o mínimo múltiplo comum com a anotação: $mmc(P_1, P_2, \ldots, P_n) = M(x)$.

Cálculo do Mínimo Múltiplo Comum

Para se obter o mínimo múltiplo comum de polinômios, pode-se proceder de acordo com a seguinte regra:

a) Achar o máximo divisor comum dos polinômios dados.
b) O mínimo múltiplo comum é dado por:

$$M(x) = \frac{P_1(x) \cdot P_2(x)}{D(x)}$$

Se $M(x)$ for um polinômio unitário, indicaremos com a notação $mmc(P_1, P_2) = M(x)$, caso contrário, o mínimo múltiplo comum será $K \cdot M(x)$, onde $K \cdot M(x)$ é polinômio unitário.

Divisibilidade por (x – a)(x – b)

Se um polinômio $P(x)$ é divisível separadamente por $(x-a)$ e $(x-b)$, com $a \neq b$, então $P(x)$ é divisível por $(x-a)(x-b)$.

Consequência:

Dividindo-se $P(x)$ por $(x-a)$, e depois dividindo-se os quocientes que forem sendo obtidos por $(x-a)$, ao fim de **r** divisões sucessivas, se todos os restos forem nulos, $P(x)$ será divisível por $(x-a)'$.

EXERCÍCIOS

1. Um polinômio $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, satisfaz as seguintes condições: $p(1) = 0$ e $p(-x) + p(x) = 0$, qualquer que seja **x** real. Qual o valor de $p(2)$?
   a) 2
   b) 3
   c) 4
   d) 5
   e) 6

2. Indicando as raízes da equação: $x^{100} - 7x - 1{,}25 = 0$, por $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{100}$ podemos afirmar que $\sum_{i=1}^{100} (x_i)^{100}$ é igual a:
   a) 70
   b) 700
   c) –12,5
   d) 125
   e) n.d.a.

3. (Mack-SP) Dado o polinômio $p(x) = x^n - 1$, $n \in N^*$, cujas raízes são 1, a, b, c, ..., t. Então, $(1-a) \cdot (1-b) \cdot (1-c) \cdot \ldots \cdot (1-t)$ vale:
   a) **n**, somente se o grau do polinômio for par.
   b) **n**, somente se o grau do polinômio for ímpar.
   c) 2n, somente se o grau do polinômio for ímpar.
   d) 3n, somente se o grau do polinômio for ímpar.
   e) **n**, qualquer que seja o grau do polinômio.

4. Se $q_1(x)$ e r_1 são, respectivamente, o resto e o quociente da divisão polinomial x^8 por $x + \frac{1}{2}$, e se $q_2(x)$ e r_2 são o quociente e o resto, respectivamente, da divisão de $q_1(x)$ por $x + \frac{1}{2}$, então r_2 é igual a:
   a) $\frac{1}{256}$
   b) $\frac{-1}{16}$
   c) 1
   d) –16
   e) 256

5. Dado $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$, o resto da divisão de $f(x^5)$ por $f(x)$ é:
   a) 1
   b) $x^4 + 1$
   c) 3
   d) $x^5 + 1$
   e) 5

Gabarito

01	02	03	04	05
E	D	A	B	E

Acrísio Fernandes
Rev.: CALS
30/4/2009