# Lista de Matemática – ITA 2012
## Números Complexos

**01 - (UFPE/2011)**
A representação geométrica dos números complexos z que satisfazem a igualdade 2|z − i| = |z − 2| formam uma circunferência com raio r e centro no ponto com coordenadas (a, b). Calcule r, a e b e assinale $9(a^2 + b^2 + r^2)$.

**02 - (ITA SP/2010)**
Se z é uma solução da equação em C,

$$z-\bar{z}+|z|^2=-\left[\left(\sqrt{2}+i\right)\left(\frac{\sqrt{2}-1}{3}-i\frac{\sqrt{2}+1}{3}\right)\right]^{12},$$

pode-se afirmar que

a) $i(z-\bar{z})<0$
b) $i(z-\bar{z})>0$
c) $|z| \in [5, 6]$
d) $|z| \in [6, 7]$
e) $\left|z+\frac{1}{z}\right|>8$

**03 - (ITA SP/2010)**
Os argumentos principais das soluções da equação em z,
$iz + 3\bar{z} + (z + \bar{z})^2 - i = 0$,
pertencem a

a) $\left]\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right[$
b) $\left]\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right[$
c) $\left[\frac{5\pi}{4},\frac{3\pi}{2}\right[$
d) $\left]\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{3\pi}{2},\frac{7\pi}{4}\right[$
e) $\left]0,\frac{\pi}{4}\right[\cup\left]\frac{7\pi}{4},2\pi\right[$

**04 - (ITA SP/2008)**
Sejam $\alpha,\beta \in C$ tais que $|\alpha|=|\beta|=1$ e $|\alpha-\beta|=\sqrt{2}$. Então $\alpha^2+\beta^2$ é igual a
a) −2
b) 0
c) 1
d) 2
e) 2i

**05 - (ITA SP/2008)**
Determine as raízes em *C* de $4z^6+256=0$, na forma $a+bi$, com $a,b\in R$, que pertençam a $S=\{z\in C;1<[z+2]<3\}$.

**06 - (IME RJ/2007)**
Sejam z e w números complexos tais que:

$$\begin{cases} w^2-z^2=4+12i \\ \bar{z}-\bar{w}=2+4i \end{cases}$$

onde $\bar{z}$ e $\bar{w}$ representam, respectivamente, os números complexos conjugados de z e w. O valor de z + w é:
a) 1 − i
b) 2 + i
c) −1 + 2i
d) 2 − 2i
e) −2 + 2i

**07 - (ITA SP/2007)**
Considere a equação: $16\left(\frac{1-ix}{1+ix}\right)^3=\left(\frac{1+i}{1-i}-\frac{1-i}{1+i}\right)^4$

Sendo *x* um número real, a soma dos quadrados das soluções dessa equação é
a) 3.
b) 6.
c) 9.
d) 12.
e) 15.

**08 - (ITA SP/2007)**
Determine o conjunto *A* formado por todos os números complexos *z* tais que $\frac{\bar{z}}{z-2i}+\frac{2z}{\bar{z}+2i}=3$ e $0<|z-2i|\le 1$

**09 - (UFPE/2007)**
Se a e b são inteiros positivos, e o número complexo $(a + bi)^3 - 11i$ também é inteiro, calcule a e b e assinale $a^2 + b^2$.

**10 - (UFC CE/2006)**
Seja $z\neq 1$ um número complexo tal que $z^7 = 1$. Determine o valor numérico da expressão:

$$\frac{z}{1-z^2}+\frac{z^2}{1-z^4}+\frac{z^3}{1-z^6}+\frac{z^4}{1-z}+\frac{z^5}{1-z^3}+\frac{z^6}{1-z^5}$$

**11 - (ITA SP/2006)**
Se para todo $z\in C$, $|f(z)|=|z|$ e $|f(z)-f(1)|=|z-1|$, então, pra todo $z\in C$, $\overline{f(1)}f(z)+f(1)\overline{f(z)}$ é igual a
a) 1
b) 2z
c) 2Rez
d) 2Imz
e) $2|z|^2$

**12 - (ITA SP/2004)**
A soma das raízes da equação $z^3+z^2-|z|^2+2z=0$, z $\in$ C, é igual a:
a) −2
b) −1

c) 0
d) 1
e) 2

**13 - (IME RJ/2003)**
Seja z um número complexo de módulo unitário que satisfaz a condição $z^{2n} \neq -1$, onde n é um número inteiro positivo.

Demonstre que $\dfrac{z^n}{1+z^{2n}}$ é um número real.

**14 - (ITA SP/2002)**
Seja a equação em C $z^4 - z^2 + 1 = 0$ . Qual dentre as alternativas abaixo é igual à soma de duas das raízes dessa equação?

a) $2\sqrt{3}$
b) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
c) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
d) – i.
e) $\dfrac{i}{2}$

**15 - (ITA SP/2002)**
Sejam a e b dois números complexos não-nulos, tais que $a^2 + b^2 = 0$. Se z, w ∈ C satisfazem a

$$\begin{cases} \overline{z}.w + z.\overline{w} = 6a \\ \overline{z}.w - z.\overline{w} = 8b \end{cases}$$

determine o valor de |a| de forma que |z w| = 1.

**16 - (UFRJ/2001)**
Determine o menor inteiro **n** para o qual $(\sqrt{3}+i)^n$ é um número real positivo.

**17 - (ITA SP/1997)**
Seja S o conjunto dos númeos complexos que satisfazem, simultaneamente, às equações: |z – 3 i| = 3 e |z + i| = |z – 2 – i|
O produto de todos os elementos de S é igual a:

a) $-2+i\sqrt{3}$
b) $2\sqrt{2}+3i\sqrt{3}$
c) $2\sqrt{2}+3i\sqrt{3}$
d) – 3 + 3i
e) – 2 + 2i

**18 - (ITA SP/1997)**
Considere, no plano complexo, um hexágono regular centrado em $z_0$ = i.Represente por $z_1$, $z_2$, ..., $z_6$, seus vértices, quando percorridos no sentido anti-horário. Se $z_1$ = 1 então $2z_3$ é igual a:

a) 2 + 4i
b) $(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{3}+3)i$
c) $\sqrt{6}+(\sqrt{2}+2)i$
d) $(2\sqrt{3}-1)+(2\sqrt{3}+3)i$
e) $\sqrt{2}+(\sqrt{6}+2)i$

**19 - (UFU MG/1996)**
Qual o módulo do número complexo z que satisfaz a condição |z – 10i| ≤ 5 e tem o menor argumento possível?

a) $3\sqrt{5}$
b) $5\sqrt{5}$
c) 5
d) 10
e) $5\sqrt{3}$

**20 - (ITA SP/1994)**
Sejam x e y números reais, com x ≠ 0, satisfazendo $(x + iy)^2 = (x + y)$ i. Então:

a) x e y são números irracionais.
b) x > 0 e y < 0
c) x é uma raiz da equação $x^3 + 3x^2 + 2x - 6 = 0$
d) x < 0 e y = x
e) $x^2 + xy + y^2 = 0,5$

**21 - (ITA SP/1991)**
Sejam w = a + bi com b ≠ 0 e a, b, c ∈ R. o conjunto dos números complexos z que verificam a equação $wz + \overline{wz} + c = 0$, descreve.

a) Um par de retas paralelas.
b) Uma circunferência.
c) Uma elepse.
d) Uma reta com coeficiente angular $m = \dfrac{a}{b}$
e) n.d.a.

**22 - (ITA SP/1990)**
A igualdade 1 + |z| = |1 + z|, onde z ∈ C, é satisfeita:

a) Para todo z ∈ C tal que Rez = 0 e Imz < 0.
b) Para todo z ∈ C tal que Rez ≥ 0 e Imz = 0.
c) Para todo z ∈ C tal que |z| = 1
d) Para todo z ∈ C tal que Imz = 0
e) Para todo z ∈ C tal que |z| < 1

**Nota:** C denota o conjunto dos números complexos, Rez a parte real de z e Imz parte imaginária de z.

**23 - (ITA SP/1990)**
Considere as equações $z^3 = i$ e $z^2 + (2 + i) z + 2i = 0$, onde z é complexo. Seja $S_1$ o conjunto das raízes da primeira equação e $S_2$ o da segunda. Então:

a) $S_1 \cap S_2$ é vazio.

b) $S_1 \cap S_2 \subset R$
c) $S_1$ possui apenas dois elementos distintos.
d) $S_1 \cap S_2$ é unitário.
e) $S_1 \cap S_2$ possui dois elementos.

**24 - (ITA SP/2009)**

Se $a = \cos\frac{\pi}{5}$ e $b = \text{sen}\frac{\pi}{5}$, então, o número complexo $\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{5}\right)^{54}$ é igual a

a) a + bi
b) –a + bi
c) $(1 - 2a^2b^2) + ab(1 + b^2)i$
d) a – bi
e) $1 - 4a^2b^2 + 2ab(1 - b^2)i$.

**25 - (IME RJ/2009)**

Considere o sistema abaixo, onde $x_1$, $x_2$, $x_3$ e Z pertencem ao conjunto dos números complexos.

$$\begin{cases}(1+i)x_1 - ix_2 + ix_3 = 0\\ 2ix_1 - x_2 - x_3 = Z\\ (2i-2)x_1 + ix_2 - ix_3 = 0\end{cases}$$

O argumento de Z, em graus, para que $x_3$ seja um número real positivo é:

a) 0º
b) 45º
c) 90º
d) 135º
e) 180º

**Obs.:** $i = \sqrt{-1}$

**26 - (ITA SP/2007)**

Assinale a opção que indica o módulo do número complexo

$\frac{1}{1+i\,\text{cotg}\,x}, x \neq k\pi, k \in Z$

a) $|\cos x|$
b) (1+ sen *x*)/2
c) $\cos^2 x$
d) $|\text{cossec}\,x|$
e) $|\text{sen}\,x|$

**27 - (ITA SP/2006)**

Se $\alpha \in [0; 2\pi)$ é o argumento de um número complexo $z \neq 0$ e n é um número natural tal que $(z/|z|)^n = i\,\text{sen}(n\alpha)$, então, é verdade que

a) $2n\alpha$ é múltiplo de $2\pi$
b) $2n\alpha - \pi$ é múltiplo de $2\pi$
c) $n\alpha - \pi/4$ é múltiplo de $\pi/2$
d) $2n\alpha - \pi$ é múltiplo não nulo de 2
e) $n\alpha - 2\pi$ é múltiplo de $\pi$

**28 - (ITA SP/2003)**

Seja z ∈ C. Das seguintes afirmações independentes:

I. Se $\omega = \frac{2iz^2 + 5\bar{z} - i}{1 + 3\bar{z}^2 + 2iz + 3|z|^2 + 2|z|}$, então $\bar{\omega} = \frac{-2i\bar{z}^2 + 5z + i}{1 + 3z^2 - 2i\bar{z} + 3|\bar{z}|^2 + 2|z|}$.

II. Se $z \neq 0$ e $\omega = \frac{2iz + 3i + 3}{(1+2i)z}$, então $|\omega| \leq \frac{2|z| + 3\sqrt{2}}{\sqrt{5}|z|}$.

III. Se $\omega = \frac{(1+i)z^2}{4\sqrt{3} + 4i}$, então $2\arg z + \frac{\pi}{12}$ é um argumento de $\omega$.

é (são) verdadeira(s):

a) todas
b) apenas I e II
c) apenas II e III
d) apenas I e III
e) apenas II

**29 - (ITA SP/1997)**

Considere os números complexos $z = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ e $w = 1 + i\sqrt{3}$. Se $m = \left|\frac{w^6 + 3z^4 + 4i}{z^2 + w^3 + 6 - 2i}\right|$, então **m** vale:

a) 34
b) 26
c) 16
d) 4
e) 1

**30 - (ITA SP/1992)**

Sabe-se que $2(\cos\frac{\pi}{20} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{20})$ é uma raiz quíntupla de w. Seja S o conjunto de todas as raízes de $z^4 - 2z^2 + \frac{w - 16\sqrt{2}i}{8\sqrt{2}} = 0$. Um subconjunto de S é:

a) $\{2^{\frac{1}{2}}(\cos\frac{7\pi}{8} + i\,\text{sen}\frac{7\pi}{8}), 2^{\frac{1}{2}}(\cos\frac{\pi}{8} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{8})\}$
b) $\{2^{\frac{1}{2}}(\cos\frac{9\pi}{8} + i\,\text{sen}\frac{9\pi}{8}), 2^{\frac{1}{2}}(\cos\frac{5\pi}{8} + i\,\text{sen}\frac{5\pi}{8})\}$
c) $\{2^{\frac{1}{4}}(\cos\frac{7\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{7\pi}{4}), 2^{\frac{1}{4}}(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{4})\}$
d) $\{2^{\frac{1}{4}}(\cos\frac{7\pi}{8} + i\,\text{sen}\frac{7\pi}{8}), 2^{\frac{1}{4}}(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{4})\}$
e) n.d.a

**31 - (ITA SP/1992)**

Considere o número complexo z = a + 2i cujo argumento está no intervalo (0, $\frac{\pi}{2}$). Sendo S o conjunto dos valores de **a** para os quais $z^6$ é um número real, podemos afirmar que o produto dos elementos de S vale:

a) 4

b) $\frac{4}{\sqrt{3}}$

c) 8

d) $\frac{8}{\sqrt{3}}$

e) n.d.a.

**32 - (ITA SP/1991)**

Se z = cos t + i sen t, onde 0 < t < 2π, então podemos afirmar que $w = \frac{1+z}{1-z}$ é dado por:

a) $i \operatorname{cotg} \frac{t}{2}$

b) $i \operatorname{tg} \frac{t}{2}$

c) i cotg t

d) i tg t.

e) n.d.a.

**33 - (ITA SP)**

Considere a família de curvas do plano complexo, definida por Re($\frac{1}{z}$) = C, onde z é um comlexo não nulo e C é uma constante real positiva. Para cada C temos uma:

a) circunferência com centro no eixo real e raio igual a C.

b) circunferência tangente ao eixo real e raio igual a $\frac{1}{2C}$.

c) circunferência tangente ao eixo imaginário e raio igual a $\frac{1}{2C}$.

d) circunferência com centro no eixo real e raio igual a $\frac{1}{C}$.

e) circunferência com centro na origem e raio igual a $\frac{1}{C}$.

**34 - (ITA SP)**

As raízes de ordem 4 do número $z = e^{\frac{\pi i}{2}}$, onde i é a unidade imaginária, são:

a) $z_k$ = cos $\theta_k$ + i . sen $\theta_k$, onde $\theta_k = \frac{1+4k}{8}.\pi$, com k = 0, 1, 2, 3.

b) $z_k = e^{i\theta_k}$, onde $\theta_k = \frac{1+3k}{8}.\pi$, com k = 0, 1, 2, 3

c) $z_k = e^{i\theta_k}$, onde $\theta_k$ = 4kπ, com k = 0, 1, 2, 3

d) $z_k = e^{i\theta_k}$, onde $\theta_k = \frac{1-4k}{8}.\pi$, com k = 0, 1, 2, 3

e) n.d.a

## Aprofundamento em Números Complexos – ITA

1)Tome $z_1, z_2 \in C$.Prove que o número $E = z_1.\bar{z_2} + \bar{z_1}.z_2$ é um número real.

2)Prove que se $|z_1| = |z_2| = 1$ e $z_1.z_2 \neq -1$, então $\frac{z_1 + z_2}{1 + z_1.z_2}$ é um número real.

3)Seja a um número real positivo e seja $M_a = \left\{ z \in C^* : \left| z + \frac{1}{z} \right| = a \right\}$.Ache o valor minimo e o valor máximo de $|z|$ onde $z \in M_a$.

4)Prove que para todo número complexo $z$, $|1+z| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ ou $|z^2 + 1| \geq 1$.

5)Prove que $\sqrt{\frac{7}{2}} \leq |1+z| + |1 - z + z^2| \leq 3\sqrt{\frac{7}{6}}$ para todo complexo com $|z| = 1$.

6)Considere o conjunto $H = \{ z \in C : z = x - 1 + xi, x \in R \}$.Prove que existe um único número $z \in H$ tal que $|z| \leq |w|$ para todo $w \in H$.

7)Tome $x, y, z$ como número complexos distintos tais que $y = tx + (1-t)z$, $t \in (0,1)$.Prove que $\frac{|z| - |y|}{|z - y|} \geq \frac{|z| - |x|}{|z - x|} \geq \frac{|y| - |x|}{|y - x|}$.

8)Ache todos os números complexos z tais que $|z| = 1$ e $\left| \frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z} \right| = 1$.

9)Ache o número de pares ordenados (a , b) de números reais tais que $(a + bi)^{2002} = a - bi$.

10) Dois polígonos regulares estão inscritos no mesmo círculo. O primeiro polígono tem 1982 lados e o segundo tem 1973 lados. Se os polígonos têm muitos vértices comuns, quantos vértices comuns temos?

## GABARITO

**1) Gab**: 40

**2) Gab**: E

**3) Gab**: C

**4) Gab**: B

**5) Gab**:

$$\bullet\, z = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\cdot \text{sen}\frac{\pi}{2}\right) = 2i;$$

$$\bullet\, z = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\cdot \text{sen}\frac{5\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} + i;$$

$$\bullet\, z = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\,.\,\text{sen}\frac{7\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} - i \ \text{ e}$$

$$\bullet\, z = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\cdot \text{sen}\frac{3\pi}{2}\right) = -2i$$

**6) Gab:** D

**7) Gab**: B

**8) Gab**:
A = {i}

**9) Gab**: 5

**10) Gab:**
0

**11) Gab:** C

**12) Gab**: A

**13) Gab**: $\dfrac{1}{2\cos(n\theta)} \in \text{IR}$

**14) Gab:** D

**15) Gab:** $|a| = -\frac{1}{5}$

**16) Gab:** n = 12

**17) Gab:** D

**18) Gab:** B

**19) Gab:** E

**20) Gab:** C

**21) Gab:** D

**22) Gab:** B

**23) Gab:** D

**24) Gab:** B

**25) Gab:** E

**26) Gab:** E

**27) Gab:** B

**28) Gab:** A

**29) Gab:** A

**30) Gab:** D

**31) Gab:** A

**32) Gab:** A

**33) Gab:** C

**34) Gab:** A

Elaborado por:
Alex Pereira Bezerra (alexmatematica1234@gmail.com)

Diagramado por:
Jülio Sousa (contatos@rumoaoita.com)