MATEMÁTICA

CURSO DE NÚMEROS COMPLEXOS PARA O ITA

Introdução

Desde os primórdios da história a experiência matemática do homem se confunde com a necessidade de resolver problemas, envolvendo números complexos.
Neste contexto, números complexos é a parte da matemática que tenta despertar nos estudantes desta bela ciência o prazer da descoberta e entendimento, através da resolução de problemas e da análise de situações as mais engenhosas.

Banco de problemas

Esta lista contém o banco de problemas para as turmas ITA e IME de matemática 2013. Os problemas estão divididos em dois tópicos: **SEÇÃO NÓ-CEGO e SEÇÃO ESCOLAS MILITARES**. Todos os problemas aqui contidos envolvem um raciocínio matemático apurado e certa dose de criatividade!

1. A HISTÓRIA DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Em 1545, Jerônimo Cardano (1501-1576), em seu livro *Ars Magna* (A Grande Arte), mostrou o método para resolver equações do terceiro grau que é hoje chamado de Fórmula de Cardano. Bombelli (1526-1572), discípulo de Cardano, em sua "Álgebra", aplicou a fórmula de Cardano à equação $x^3 - 15x - 4 = 0$. Obtendo $x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$

Embora não se sentisse completamente à vontade em relação às raízes quadradas de números negativos (dizia que eram inúteis e sofísticas), Bombelli operava livremente com elas, aplicando-lhes as regras usuais da Álgebra.

No caso, Bombelli mostrou que:

$$\left(2+\sqrt{-1}\right)^3 = 2^3 + 3\cdot 2^2\sqrt{-1} + 3\cdot 2\cdot\left(\sqrt{-1}\right)^2 + \left(\sqrt{-1}\right)^3$$

$$\left(2+\sqrt{-1}\right)^3 = 8 + 12\sqrt{-1} - 6 - \sqrt{-1}$$

$$\left(2+\sqrt{-1}\right)^3 = 2 + \sqrt{-121}$$

Logo,

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1}$$

e, analogamente,

$$\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = 2 - \sqrt{-1}$$

Portanto, o valor de **x** é $x = 2+\sqrt{-1}+2-\sqrt{-1} = 4$. Como 4 é realmente raiz da equação, a partir de Bombelli os matemáticos passaram a usar as raízes quadradas de números negativos, embora se sentissem um pouco desconfortáveis com isso. Bombelli trabalhava sistematicamente com a quantidade $\sqrt{-1}$, que hoje chamamos de unidade imaginária e representamos por **i**. Apenas no século XIX, quando Gauss (1787-1855), o grande matemático da época e um dos maiores de todos os tempos, divulga a representação geométrica dos números complexos é que essa sensação de desconforto desaparece.
(Referência: *A Matemática do Ensino Médio* **– volume 3)**

2. CONJUNTOS DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Um número complexo **z** pode ser definido como um par ordenado (x, y) de números reais,
z = (x, y)
O par (x, 0) é identificado como o número real **x**,
x = (x, 0)
e o para (0, 1) será chamado de unidade imaginária: denotado por **i**:
(0, 1) = i.

Observamos que:

$(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ se, somente se, $\begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$.

Em particular, temos que:

$z = (x, y) = 0 = (0, 0)$ se, e só se, $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$.

Dados dois números complexos quaisquer $z_1 = (x_1, y_1)$ e $z_2 = (x_2, y_2)$ definiremos duas operações: **Soma e Produto,** denotado por $z_1 + z_2$ e $z_1 \cdot z_2$, definidos por:

$$z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$
$$z_1 \cdot z_2 = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2, x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1)$$

Em particular, temos:

$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y)$

Por outro lado, (0, y) = (y, 0) · (0, 1). Assim,

$z = (x, 0) + (y, 0) \cdot (0, 1) = x + y \cdot i$

Com isso, a representação $\boxed{z = x + y \cdot i \text{ onde } z = (x, y)}$ é chamada FORMA ALGÉBRICA.

Como i = (0, 1), podemos calcular i^2, isto é,

$i^2 = i \cdot i$

$i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1)$

$i^2 = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0)$

$i^2 = (-1, 0)$

$i^2 = -1$

Logo, $\boxed{i^2 = -1}$

Nesse resultado, notam-se facilmente, as potências de expoentes múltiplos de 4: $i^0 = i^4 = i^8 = i^{12} = i^{16} = \ldots = i^{4k} = (i^4)^k = (1)^k = 1$, onde $K \in$ N.

Assim, dado i^n, com $n \in$ n, temos:

$$\begin{array}{l|l} n & 4 \\ \hline r & k \end{array} \Longrightarrow n = 4k + r$$

r → resto: 0, 1, 2 ou 3

Daí,

$$i^n = i^{4k+r} = \underbrace{i^{4k}}_{1} \cdot i^r \Rightarrow i^n = i^r = \begin{cases} 1, \text{ se } r = 0 \\ i, \text{ se } r = 1 \\ -1, \text{ se } r = 2 \\ -i, \text{ se } r = 3 \end{cases}$$

3. OPERAÇÕES DOS NÚMEROS COMPLEXOS

3.1. Igualdade de números complexos.

Por tratar-se de pares ordenados, dois números complexos são iguais se têm, respectivamente, as mesmas componentes:

$$(a,b)=(c,d) \Leftrightarrow a=c \text{ e } b=d$$

$$a+bi=c+di \Leftrightarrow \begin{cases} a=c \text{ (partes reais iguais)} \\ b=d \text{ (partes imaginárias iguais)} \end{cases}$$

3.2 Adição de números complexos.

Sendo dados $Z_1 = (x_1, y_1)$ e $Z_2 = (x_2, y_2)$, por definição, temos:

$$Z_1+Z_2=(x_1+x_2; y_1+y_2)$$

ou

$$(x_1+y_1 i)+(x_2+y_2 i)=\underbrace{(x_1+x_2)}_{\text{soma das partes reais}}+\underbrace{(y_1+y_2)}_{\text{soma das partes imaginárias}}$$

3.3 Multiplicação de números complexos.

Sendo $Z_1 = (x_1, y_1)$ e $Z_2 = (x_2, y_2)$, em que $Z_1, Z_2 \in C$, definimos a multiplicação em **C** do seguinte modo:

$$(x_1; y_1) \cdot (x_2; y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2; x_1y_2 + x_2y_1)$$

ou

$$(x_1 + y_1 i) \cdot (x_2 + y_2 i) = (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)i$$

Note: $y_1y_2i^2 = y_1y_2 \cdot (-1) = -y_1y_2$ é real

4. CONJUGADO DE UM NÚMERO COMPLEXO ($\overline{Z}$)

Chamaremos de conjugado do número complexo $Z = (x, y) = x + yi$, e denotaremos por $\overline{Z}$, o número complexo da forma $\overline{Z} = (x, -y) = x - yi$.

5. MÓDULO DE UM NÚMERO COMPLEXO

O número $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ é chamado de módulo ou valor absoluto do número complexo $z = x + y \cdot i$.

6. PROPRIEDADES DOS NÚMEROS COMPLEXOS

A operação de conjugação goza das seguintes propriedades:

1. $\operatorname{Re} z = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$ e $\operatorname{Im} z = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}$;
2. $\overline{z+w} = \overline{z}+\overline{w}$, $\overline{z \text{ x } w} = \overline{z} \text{ x } \overline{w}$ e $\overline{\left(\dfrac{z}{w}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{w}}$;
3. $\overline{z} = z$ se z é real;
4. $\overline{\overline{z}} = z$;
5. $z \cdot \overline{z} = |z|^2$;
6. $|\overline{z}| = |z|$;
7. $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

DEMONSTRAÇÕES:

1. Seja z = a + bi com **a** e **b** $\in \mathbb{R}$. Então,

$$\frac{z+\overline{z}}{2}=\frac{(a+bi)+(a-bi)}{2}=\frac{2a}{2}=a=\text{Re } z \text{ e}$$
$$\frac{z-\overline{z}}{2i}=\frac{(a+bi)-(a-bi)}{2i}=\frac{2bi}{2i}=b=\text{Im } z.$$

2. Sejam z = a + bi com **a** e **b** $\in \mathbb{R}$ e w = c + di com **c** e **d** $\in \mathbb{R}$. Então,

$$\overline{z+w}=\overline{(a+bi)+(c+di)}=\overline{(a+c)+(b+d)i}=(a+c)-(b+d)\,i=$$
$$=a-bi+c-di=\overline{z}+\overline{w}.$$

$$\overline{z\times w}=\overline{(a+bi)\times(c+di)}=\overline{ac+adi+cbi-bd}=\overline{(ac-bd)+(ad+cb)i}=$$
$$=(ac-bd)-(ad+cb)i=ac-adi-cbi-bd=(a-bi)\times(c-di)=$$
$$=\overline{z}\times\overline{w}.$$

Caso $w \neq 0$, isto é, **c** e **d** não são simultanemante nulos, então,

$$\overline{\left(\frac{z}{w}\right)}=\overline{\left(\frac{a+bi}{c+di}\right)}=\overline{\left[\frac{(a+bi)}{(c+di)}\times\frac{(c-di)}{(c-di)}\right]}=\overline{\left[\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}\right]}=$$
$$=\frac{(ac+bd)-(bc-ad)i}{c^2+d^2}=\frac{(ac+bd)+(ad-bc)i}{c^2+d^2}=\frac{(a-bi)(c+di)}{c^2+d^2}=$$
$$=\frac{(a-bi)}{(c-di)}\times\frac{(c+di)}{(c+di)}=\frac{\overline{z}}{\overline{w}}.$$

3. Suponha-se que $\overline{z}=z.$ Então da propriedade 1.,

$$\text{Re } z=\frac{z+\overline{z}}{2}=\frac{2z}{2}=z.$$

Inversamente, suponha-se que **z** é real. Então, z = a + 0i = a – 0i, a $\in \mathbb{R}$, isto é, $\overline{z}=z$.

4. Suponha-se que z = a + bi. Então,

$$\overline{\overline{z}}=\overline{\overline{a+bi}}=\overline{a-bi}=a+bi=z.$$

5. Suponha-se que z = a + bi. Então,

$$z\cdot\overline{z}=(a+bi)\times(a-bi)=a^2+b^2=|z|^2.$$

6. Suponha-se que z = a + bi. Então,

$$|z|=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{a^2+(-b)^2}=|a-bi|=|\overline{z}|.$$

7. A demonstração desta propriedade pode efectuar-se por indução matemática. Comecemos por observar que o resultado é trivialmente verdadeiro para n = 1. Admita-se que o resultado é verdadeiro para p = n. Em resultado da propriedade 2 irá ser verdadeiro para p = n + 1. Então, pelo princípio de indução matemática conclui-se que a afirmação é verdadeira para todo **n** natural.

7. PROPRIEDADES DOS MÓDULOS NÚMEROS COMPLEXOS

Sendo $Z_1 = (x_1, y_1)$ e $Z_2 = (x_2, y_2)$, em que $Z_1, Z_2 \in$ C. Prove que:

a) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

b) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$

c) $|z_2| - |z_2| \le |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$

d) $|z_1| - |z_2| \le |z_1 - z_2| \le |z_1| + |z_2|$

DEMONSTRAÇÃO:

a) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

$|z_1 \cdot z_2|^2 = (z_1 \cdot z_2) \cdot \left(\overline{z_1 \cdot z_2}\right)$

$|z_1 \cdot z_2|^2 = \left(z_1 \cdot \overline{z_1}\right)\left(z_2 \cdot \overline{z_2}\right) = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2$

logo:

$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

b) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \left|z_1 \cdot \dfrac{1}{z_2}\right|$

$\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \left|z_1 \cdot z_2^{-1}\right|$

$\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = |z_1| \cdot \left|z_2^{-1}\right| = |z_1| \cdot \dfrac{1}{|z_2|}$

logo:

$\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}.$

c) $|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2) \cdot \left(\overline{z_1 + z_2}\right) = |z_1|^2 + z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2 + |z_2|^2$

mas:

$\overline{z_1 \cdot \overline{z_2}} = \overline{z_1} \cdot z_2$

com isso:

$z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1 \cdot \overline{z_2}} = 2 \cdot \mathrm{Re}\left(z_1 \cdot \overline{z_2}\right) \le 2 \cdot \left|z_1 \cdot \overline{z_2}\right| = 2 \cdot |z_1| \cdot |z_2|$

logo:

$|z_1 + z_2|^2 \le |z_1|^2 + 2|z_1| \cdot |z_2| + |z_2|^2 = \left(|z_1| + |z_2|\right)^2$

portanto:

$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$

usando a ideia acima temos:

$|z_1| = |z_1 + z_2 + (-z_2)| \le |z_1 + z_2| + |-z_2|$

logo:

$|z_1| - |z_2| \le |z_1 + z_2|$

d) $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$

usando a ideia acima temos:

$|z_1| = |z_1 - z_2 + (z_2)| \le |z_1 - z_2| + |z_2|$

logo:

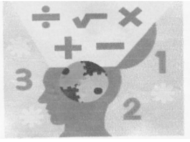
$|z_1| - |z_2| \le |z_1 - z_2|$

mas:

$|z_1 - z_2| = |z_1 + (-z_2)| \le |z_1| + |-z_2| = |z_1| + |z_2|$

portanto:

$|z_1| - |z_2| \le |z_1 - z_2| \le |z_1| + |z_2|$



VAMOS EXERCITAR O CÉREBRO COM UMA LISTA DE EXERCÍCIOS RESOLVIDOS.

Problema 01.

Suponha que z = a + bi. Mostre que $(a, b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right)$.

SOLUÇÃO:

Basta mostrar que $\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right) \times (a, b) = (1, 0)$. Por quê?

Assim,

$$\left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right) \times (a, b) =$$

$$\left(\frac{a}{a^2 + b^2} \times a - \frac{-b}{a^2 + b^2} \times b, \frac{a}{a^2 + b^2} \times b + \frac{-b}{a^2 + b^2} \times a\right) = (1, 0).$$

Problema 02.

Mostre que dois números complexos são iguais se e só se as suas partes reais e imaginárias também forem iguais.

SOLUÇÃO:

Suponha-se que z = a + bi e w = c + di são iguais. Então

$$(a + bi) - (c + di) = 0 \Rightarrow$$
$$(a - c) + (b - d)i = 0 \Rightarrow$$
$$a - c = 0 \text{ e } b - d = 0,$$

isto é

$$a = c \text{ e } b = d,$$

donde se conclui que z = w. O recíproco resulta imediatamente da definição.

Problema 03.

Prove que se $z = \bar{z}$, então **z** é um número complexo real.

SOLUÇÃO:

Se $z = a + b \cdot i$ e $\bar{z} = a - b \cdot i$

logo:

$z = \bar{z}$

temos:

$a + b \cdot i = a - b \cdot i$

portanto:

$b = 0$

logo, o número complexo $z = a$ (número real)

Problema 04.
Prove que se $z+\overline{z}=0$, então **z** é um número complexo imaginário puro.

SOLUÇÃO:
Se $z=a+b\cdot i$ e $\overline{z}=a-b\cdot i$ com $b\neq 0$
temos:
$z+\overline{z}=a+bi+a-b\cdot i=0$
$2a=0$
portanto:
$a=0$
logo, o número complexo $z=b\cdot i$ (número imaginário puro)

Problema 05.
Resolva a equação $z^3 = 18 + 26i$, onde $z = x + yi$ e x, y são números inteiros.

SOLUÇÃO:
$(x + yi)^3 = (x + yi)^2 (x + yi) = (x^2 - y^2 + 2xyi)(x + yi) = (x^3 - 3xy^2) + (3x^2y - y^3) = 18 + 26i.$
Usando a definição de igualdade de números complexos, obtemos:

$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = 18 \\ 3x^2y - y^3 = 26 \end{cases}$$

Fazendo $y = tx$ na igualdade $18(3x^2y - y^3) = 26(x^3 - 3xy^2)$, observamos que $x \neq 0$ e $y \neq 0$ implica $18(3t - t^3) = 26(1 - 3t^2)$. A última relação é equivalente a $(3t - 1)(3t^2 - 12t - 13) = 0$. A única solução racional da equação é $t = \frac{1}{3}$, então, $x = 3$, $y = 1$ e $z = 3 + i$.

Problema 06.
Prove a identidade
$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$ para todos os complexos z_1 e z_2.

SOLUÇÃO:
Usando $z\cdot\overline{z}=|z|^2$, temos que

$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=(z_1+z_2)\left(\overline{z_1}+\overline{z_2}\right)+(z_1-z_2)\left(\overline{z_1}-\overline{z_2}\right)$$
$$=|z_1|^2+z_1\cdot\overline{z_2}+z_2\cdot\overline{z_1}+|z_2|^2+|z_1|^2-z_1\cdot\overline{z_2}-z_2\cdot\overline{z_1}+|z_2|^2$$
$$2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right).$$

Problema 07.
Se $Z_1 = (x_1, y_1)$ e $Z_2 = (x_2, y_2)$, em que $Z_1, Z_2 \in C$. Prove que o número $E=z_1\cdot\overline{z_2}+\overline{z_1}\cdot z_2$ é um número real.

SOLUÇÃO:

Usando a ideia de um número complexo é dito real quando ele for igual a seu conjugado.
Com isso:
$\overline{E}=\overline{z_1\cdot\overline{z_2}+\overline{z_1}\cdot z_2}$
utilizando as propriedades dos conjugados, temos:
$\overline{E}=\overline{z_1}\cdot z_2+z_1\cdot\overline{z_2}$
portanto:
$\overline{E}=E$ (é um número real)

Problema 08.

(F.G.V.-SP) As raízes quadradas do número **3 + 4i**, onde **i** representa a unidade imaginária, são:

a) $\{2+i;\ -2-i\}$ b) $\{1+i;\ 1-i\}$ c) $\{3+i;\ 3-i\}$ d) $\{4+i;\ 4-i\}$ e) n.d.a

SOLUÇÃO:

Caro leitor, este problema vamos resolver utilizando produtos notáveis e radical duplo.
Vejamos:

$$\sqrt{3+4i} = \pm\sqrt{(4-1+4i)}$$

$$\sqrt{3+4i} = \pm\sqrt{4+4i+i^2}$$

portanto:

$$\sqrt{3+4i} = \pm(2+i)$$

outra maneira:

utilizando radical duplo, temos:

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-C}{2}}$$

onde:

$$C = \sqrt{A^2 - B}$$

logo:

$$\sqrt{3+4i} = \sqrt{3+4\sqrt{-1}}$$

com isso:

$$\sqrt{3+4i} = \sqrt{3+\sqrt{-16}}$$

então:

$$C = \sqrt{9-(-16)} = 5$$

portanto:

$$\sqrt{3+4i} = \pm\left(\sqrt{\frac{3+5}{2}} + \sqrt{\frac{3-5}{2}}\right)$$

$$\sqrt{3+4i} = \pm(2+i)$$

Problema 09.

(TITU ANDRESCU) Resolva a equação $z^2 - 8(1-i)\cdot z + 63 - 16\cdot i = 0$ onde **z** representa um número complexo e **i** é a unidade imaginária.

SOLUÇÃO:

Calculando o discriminante temos:

$$\Delta = 64\cdot(1-i)^2 - 4\cdot 1\cdot(63-16i)$$

$$\Delta = -63\cdot 4 - 64\cdot i$$

logo:

$$\Delta = -4(63+16\cdot i) = 4\cdot i^2\left(64+16\cdot i + i^2\right) = 4i^2(8+i)^2$$

com isso:

$$z = \frac{8(1-i)\pm(-2+16\cdot i)}{2}$$

portanto:

$$z_1 = 3+4\cdot i$$

$$z_2 = 5-12\cdot i$$

Problema 10.

Prove o Teorema de Bramagupta: Se **a** e **b** são números naturais cada um deles é uma soma de dois quadrados perfeitos então a · b também é uma soma de dois quadrados perfeitos.

SOLUÇÃO:

De acordo com o enunciado temos:

$$x = a^2 + b^2$$
$$y = c^2 + d^2$$
com isso:
$$x \cdot y = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$$
$$x \cdot y = (a.c)^2 - 2abcd + (bd)^2 + (ad)^2 + 2abcd + (bc)^2$$
logo:
$$x \cdot y = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$$

Segunda maneira:

Utilizando a ideia dos números complexos e suas propriedades temos:

Se $z_1 = a + b \cdot i$ e $z_2 = c + d \cdot i$

logo:
$$x = a^2 + b^2 = z_1.\overline{z_1}$$
$$y = c^2 + d^2 = z_2.\overline{z_2}$$
com isso:
$$x \cdot y = (z_1 \cdot \overline{z_1})(z_2 \cdot \overline{z_2}) = (z_1 \cdot z_2) \cdot (\overline{z_1 \cdot z_2})$$
$$z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc) \cdot i$$
portanto:
$$x \cdot y = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$$

Terceira maneira:

Utilizando a ideia de determinantes e suas propriedades:

Sejam as matrizes:
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}$$
logo:
$$\det A = a^2 + b^2 \quad e \quad \det B = c^2 + d^2$$
com isso:
$$x \cdot y = \det A \cdot \det B = \det(A \cdot B)$$
então:
$$x \cdot y = \det\left[\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}\right] = \det\left[\begin{pmatrix} ac - bd & ad + bc \\ -bc - ad & ac - bd \end{pmatrix}\right]$$
portanto:
$$x \cdot y = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$$

SEÇÃO NÓ-CEGO

- Esta secção nó-cego tem como objetivo principal aprofundar os seus conhecimentos, isto é, todos os problemas aqui contidos envolvem um raciocínio matemático apurado e uma certa dose de criatividade.

Problema 01.
(Peru/2003) Se |z + w| = |z – w| $\forall$ z, w $\in$ C. Achar $\text{Re}\left(z \cdot \overline{w}\right)$

Problema 02.
(IME/94) Dado $z = \dfrac{1}{\sqrt{7+24i}}$, calcule as partes real e imaginária de **z**.

Problema 03.
(AFA/2007) Seja **z** um número complexo não nulo e **i** a unidade imaginária $\left(i^2 = -1\right)$, $z \neq i$. O conjunto de todos os valores de **z**, para os quais $\dfrac{z+i}{1+i \cdot z}$ é um número real, representa um (a):

a) elipse b) hipérbole c) circunferência d) círculo

Problema 04.

(ITA/1998) Sejam **x** e **y** números reais tais que:

$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = 1 \\ 3x^2y - y^3 = 1 \end{cases}$$

Então, o número complexo z = x + iy é tal que z^3 e |z|, valem respectivamente:
a) 1 – i e $\sqrt[6]{2}$
b) 1 + i e $\sqrt[6]{2}$
c) i e 1
d) –i e 1
e) 1 + i e $\sqrt[3]{2}$

Problema 05.
(Índia) Sabendo que $|z|$ representa o módulo de um número complexo e $\dfrac{5z_2}{7z_1}$ é um número complexo imaginário puro, então o valor da expressão $\left|\dfrac{2z_1+3z_2}{2z_1-3z_2}\right|$ é igual a:
a) 1 b) 2 c) 7 d) 14 e) 21

Problema 06.

(Peru) Seja $z = \dfrac{1 - i + \cfrac{1}{1 + i + \cfrac{1}{1 - i + \cfrac{1}{\ddots}}}}{1 + i + \cfrac{1}{1 - i + \cfrac{1}{1 + i + \cfrac{1}{1 - i + \cfrac{1}{\ddots}}}}}$. Então o valor de $|z + 1|$ é igual a:

a) 1 b) $\sqrt{2}$ c) 2 d) 3 e) $\sqrt{3}$

Problema 07.

(EUA) Se $x = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ e $y = \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$ onde $i^2 = -1$, então qual das seguintes opções não é correta?

a) $x^5 + y^5 = -1$ b) $x^7 + y^7 = -1$ c) $x^9 + y^9 = -1$ d) $x^{11} + y^{11} = -1$ e) $x^{13} + y^{13} = -1$

Problema 08.

(EUA) Sejam $x = a + b$, $y = a \cdot w + b \cdot w^2$, $z = aw^2 + bw$, onde $w^2 + w + 1 = 0$. O valor da expressão $\dfrac{x^3 + y^3 + z^3}{a^3 + b^3}$ é igual a:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

Problema 09.

(KVANT) Resolva o sistema de equações:

$$\begin{cases} x + \left(\dfrac{3x - y}{x^2 + y^2}\right) = 3 \\ y - \left(\dfrac{x + 3y}{x^2 + y^2}\right) = 0 \end{cases}$$

Problema 10.

Prove o Teorema de Bramagupta: Se **a** e **b** são números naturais cada um deles é uma soma de dois quadrados perfeitos então $a \cdot b$ também é uma soma de dois quadrados perfeitos.

Problema 11.

(ITA/1995) Sejam z_1 e z_2 números complexos com $|z_1| = |z_2| = 4$. Se 1 é uma raiz da equação $z_1 z^6 + z_2 z^3 - 8 = 0$ então a soma das raízes reais é igual a:

a) -1
b) $-1 + 2^{1/2}$
c) $1 - 2^{1/3}$
d) $1 + 3^{1/2}$
e) $-1 + 3^{1/2}$

Problema 12.

(IME/2003) Seja **z** um número complexo de módulo unitário que satisfaz à condição $z^{2n} \neq -1$, onde **n** é um número inteiro positivo. Demonstre que $\left(\dfrac{z^n}{1 + z^{2n}}\right)$ é um número real.

Problema 13.

(IME/2008) Determine a expressão da soma a seguir, onde **n** é um inteiro múltiplo de 4 · $1+2\cdot i+3\cdot i^2+....+(n+1)\cdot i^n$

Problema 14.

(EUA) Se **a** é um número real positivo e satisfaz a condição $M_a = \left\{ z \in C^*; \left| z+\frac{1}{z} \right| = a \right\}$.

Calcule o valor mínimo e máximo de $|z|$ onde $z \in M_a$.

Problema 15.

(EUA) Ache todos os números complexos **z** tais que $(3z+1)(4z+1)(6z+1)(12z+1)=2$

Problema 16.

(ITA/1999) Sejam a_k e b_k números reais com k = 1, 2, ..., 6. Os números complexos $z_k = a_k + ib_k$ são tais que $|z_k| = 2$ e $b_k \geq 0$, para todo k = 1, 2, ..., 6. Se $(a_1, a_2, ..., a_6)$ é uma progressão aritmética de razão –1/5 e soma 9, então z_3 é igual a:

a) $2i$

b) $\frac{8}{5}+\frac{6}{5}i$

c) $\sqrt{3}+i$

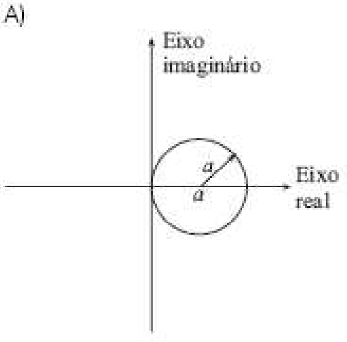
d) $\frac{-3\sqrt{3}}{5}+\frac{\sqrt{73}}{5}i$

e) $\frac{4\sqrt{2}}{5}+\frac{2\sqrt{17}}{5}i$

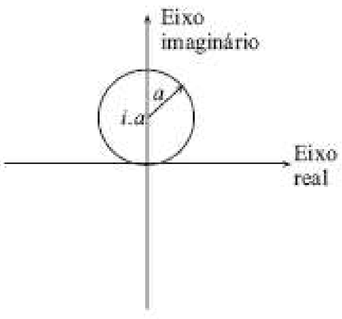
Problema 17.

(IME/2009) Seja $z = \rho \cdot e^{i\theta}$ um número complexo onde ρ e θ são, respectivamente, módulo e o argumento de **z** e **i** é a unidade imaginária. Sabe-se que $\rho = 2a \cdot \cos\theta$, onde **a** é uma constante real positivo. A representação de **z** no plano complexo é:

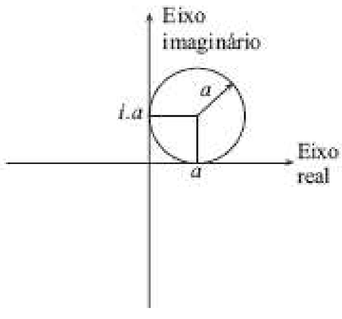
A)



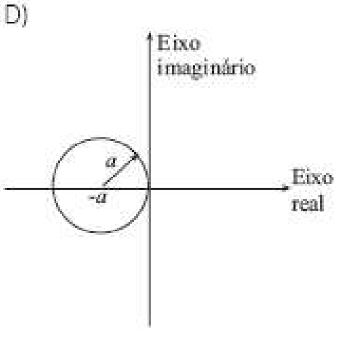
B)



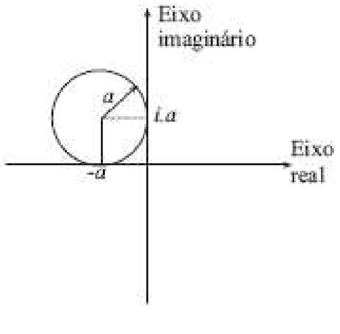
C)



D)



E)



Problema 18.

(EUA) Suponha $z = a + i \cdot b$ é uma solução da equação polinomial $c_4 \cdot z^4 + ic_3 \cdot z^3 + c_2 \cdot z^2 + ic_1 \cdot z + c_0 = 0$, onde c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, **a** e **b** são constantes reais e $i = \sqrt{-1}$. Qual das alternativas abaixo também é solução?

a) $-a + b \cdot i$ b) $a - b \cdot i$ c) $a + b \cdot i$ d) $b + a \cdot i$ e) $b - a \cdot i$

Problema 19.

(Canadá) Considere os números complexos **x** e **y** não nulos, satisfazendo $x^2 + x \cdot y + y^2 = 0$. Então o valor de $\left(\frac{x}{x+y}\right)^{2002} + \left(\frac{y}{x+y}\right)^{2002}$ é igual a:

a) 2^{-2002} b) -1 c) 1 d) i e) $-i$

Problema 20.

(O.C.M.) Se $x^2 + x + 1 = 0$, calcule o valor numérico de:

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 + \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)^2 + \ldots\ldots + \left(x^{27} + \frac{1}{x^{27}}\right)^2$$

Problema 21.

(IME/2008) Assinale a opção correspondente ao valor de μ que faz com que a equação $(1+\mu) \cdot s^3 + 6 \cdot s^2 + 5 \cdot s + 1 = 0$ possua raízes no eixo imaginário.

a) 0 b) 6 c) 14 d) 29 e) 41

Problema 22.

(AMAN/2001) Calcule o módulo do determinante da matriz $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1+i\sqrt{3}}{2} & \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \\ -1 & \frac{1+i\sqrt{3}}{2} & \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1+i\sqrt{3}}{2} & 1 & \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ onde $i = \sqrt{-1}$

Problema 23.

(Peru) Se $r^4 - r^2 + 1 = 0$. Então o valor de $r^7 - \frac{1}{r^7}$ é igual a:

a) i b) $-2i$ c) 0 d) 7 e) -7

Problema 24.

(PUTNAM/1989) Prove que se $11 \cdot z^{10} + 10 \cdot i \cdot z^9 + 10 \cdot i \cdot z - 11 = 0,$ então $|z| = 1$

Problema 25.

(ITA) Seja a equação em C $z^4 - z^2 + 1 = 0$. Qual dentre as alternativas a soma de duas das raízes dessa equação?

a) $2\sqrt{3}$ b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $-i$ e) $\frac{i}{2}$

Problema 26.

(EUA/2002) Sabendo que a equação $z(z+i)(z+3i) = 2002 \cdot i$ é da forma a + b · i tal que **a** e **b** são números reais positivos e diferentes de zero. Então, o valor de **a** é igual a:

a) $\sqrt{118}$ b) $\sqrt{210}$ c) $2\sqrt{210}$ d) $\sqrt{2002}$ e) $100\sqrt{2}$

Problema 27.
(EUA/2002) O valor de $i+2\cdot i^2+3\cdot i^3+......+2002\cdot i^{2002}$ é igual a:

a) $-999+1002\cdot i$ b) $-1002+999\cdot i$ c) $-1001+1000\cdot i$ d) $-1002+1001\cdot i$ e) i

Problema 28.
(EUA/2002) The complex sequence z_0, z_1, z_2, ... is defined by $z_0=i+\left(\frac{1}{137}\right)$ and $z_{n+1}=\frac{(z_n+i)}{(z_n-i)}$. Find z_{2002}.

Problema 29.

(AIME) Sejam $w_1, w_2, ..., w_n$ números complexos. Uma reta **L** no plano complexo é chamada de reta média para os pontos $w_1, w_2, ..., w_n$ se **L** contém pontos (números complexos) $z_1, z_2, ..., z_n$ tais que $\sum_{k=1}^{n}(z_k-w_k)=0$.

Para os números $w_1=32+170\cdot i$, $w_2=-7+64\cdot i$, $w_3=-9+200\cdot i$, $w_4=1+27\cdot i$ e $w_5=-14+43\cdot i$ existe uma única reta média que intercepta o eixo **y** no ponto (0,3). Determine o coeficiente angular desta reta média.

Problema 30.
(ITA/2006) Se para todo $z\in C$, $|f(z)|=|z|$ e $|f(z)-f(1)|=|z-1|$, então para todo $z\in C$, $\overline{f(1)}\cdot f(z)+f(1)\cdot\overline{f(z)}$ é igual a:

a) 1 b) 2z c) $2\cdot \text{Re}(z)$ d) $2\cdot \text{Im}(z)$ e) $2\cdot|z|^2$

Problema 31.
(ITA/2004) A soma das raízes da equação $z^3+z^2-|z|^2+2z=0$, onde $z\in C$, é igual a:
a) –2 b) –1 c) 0 d) 1 e) 2

Problema 32.
(ITA/2004) Sendo $z=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$, calcule $\left|\sum_{n=1}^{60} z^n\right|$

Problema 33.
(ITA/2005) Seja $z\in C$ com $|z|=1$. Então, a expressão $\left|\frac{1-\bar{z}.w}{z-w}\right|$ assume valor:
a) maior que 1, para todo w com $|w|>1$.
b) menor que 1, para todo w com $|w|<1$.
c) maior que 1, para todo w com $w\neq z$.
d) igual a 1, independente de w com $w\neq z$.
e) crescente para $|w|$ crescente, com $|w|<|z|$.

Problema 34.
(ITA/2007) Considere a equação: $16.\left(\frac{1-ix}{1+i.x}\right)^3=\left(\frac{1+i}{1-i}-\frac{1-i}{1+i}\right)^4$. Sendo **x** um número real, a soma dos quadrados das soluções dessa equação é:

a) 3 b) 6 c) 9 d) 12 e) 15

Problema 35.
(ITA/2007) Assinale a opção que indica o módulo do número complexo $\frac{1}{1+i\cdot \cot gx}$, $x\neq k\cdot\pi$, $k\in Z$.

a) $|\cos x|$ b) $\frac{1+\text{sen}x}{2}$ c) $\cos^2 x$ d) $|\text{cossec}\, x|$ e) $|\text{sen}x|$

Problema 36.
(IME/84) Sejam os reais **a**, **b**, **c** e **d** não nulos tal que a equação $x^2 + (a + b \cdot i)x + c + i \cdot d = 0$ admite uma raiz real. Então, o valor de $d^2 + b^2c$ é igual a:
a) abc
b) abd
c) acd
d) bcd
e) abcd

Problema 37.
(IME/97) Determine os parâmetros α, β, γ e δ da transformação complexa, $w = \dfrac{\alpha \cdot z + \beta}{\gamma \cdot z + \delta}$, que leva os pontos $z = 0, -i, -1$ para $w = i, 1, 0$, respectivamente, bem como, z para $w = -2 - i$, onde $i = \sqrt{-1}$.

Problema 38.
(IME/2006) Sejam $a_1 = 1 - i$, $a_n = r + si$ e $a_{n+1} = (r - s) + (r + s) \cdot i$ $(n > 1)$ termos de uma sequência. Determine, em função de **n**, os valores de **r** e **s** que tornam esta sequência uma progressão aritmética, sabendo que **r** e **s** são números reais e $i = \sqrt{-1}$

Problema 39.
(AMAN/2007) Seja $z \in C$, onde C é o conjunto dos números complexos. Identifique o lugar geométrico descrito pelo conjunto $z = \left\{ z;\ \operatorname{Im}\left(\dfrac{z}{\overline{z}}\right) = H,\ H \in \mathbb{R}^* \text{ e } |H| < 1 \right\}$ onde $\mathbb{R}^*$ é o conjunto dos números reais diferentes de zero, Im(w) é a função cujo valor é a parte imaginária do número complexo w, e $\overline{w}$ denota o conjugado do número complexo **w**.

Problema 40.
(EUA) Se **a**, **b**, **c** são números complexos satisfazendo $|a| = |b| = |c| = 1$. Então o valor de $2008 \cdot \left|\dfrac{ab + ac + bc}{a + b + c}\right|$ é igual a:.

a) 2004 b) 2005 c) 2006 d) 2007 e) 2008

Problema 41.
(O.M.ESPANHA) Sabendo que **x**, **y** e **z** são números complexos de módulo unitário, e são raízes do seguinte sistema:
$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ xyz = 1 \end{cases}$. Então o valor da expressão $x^3 + y^3 + z^3$ é igual a :
a) 0 b –1 c) i d) 1 e) 3

Problema 42.
(Canadá) Sendo $x = a + b$, $y = a \cdot w + b \cdot w^2$, $z = a \cdot w^2 + b \cdot w$ e $w^3 = 1$ com $a \cdot b \neq 0$. Então o valor de $\dfrac{x^2 + y^2 + z^2}{a \cdot b}$ é igual a:
a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6

Problema 43.
(Espanha) Se o complexo **z** é definido como: $z = \dfrac{\sqrt{\operatorname{sen}\alpha + i\sqrt{\cos\alpha}} - i.\sqrt{\operatorname{sen}\alpha - i\sqrt{\cos\alpha}}}{\sqrt{\operatorname{sen}\alpha + i\sqrt{\cos\alpha}} + i\sqrt{\operatorname{sen}\alpha - i\sqrt{\cos\alpha}}}$ tal que $\alpha \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Então podemos afirmar que:
a) z é um número real
b) z é um imaginário puro
c) $z = i \cdot \operatorname{tg}\alpha$
d) $z = \dfrac{\sqrt{\operatorname{sen}^2\alpha + \cos\alpha}}{\operatorname{sen}\alpha} \cdot i$
e) $z = i \cdot \operatorname{tg}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$

Problema 44.

(Peru) Se i = (0, – 1). Então o valor de **E** na expressão $E = \dfrac{x^4+4}{(x-1-i)(x-1+i)(x+1+i)(x+1-i)}$ é igual a:

a) 0 b) 1 c) 2 d) –1 e) 3

Problema 45.

(Peru) Achar o valor de **w** sabendo que $w = \dfrac{\mathrm{Im}\left(\dfrac{w_1}{w_1+w_2}\right)+\mathrm{Im}\left(\dfrac{w_2}{w_1+w_2}\right)}{\mathrm{Re}\left(\dfrac{w_1}{w_1+w_2}\right)+\mathrm{Re}\left(\dfrac{w_2}{w_1+w_2}\right)}$ para $\forall\ w_1 \neq w_2$ e w_1 , $w_2 \in$ C.

Problema 46.

(EUA) Sabendo que **z** é um número complexo que satisfaz $\left|\dfrac{6\cdot z-i}{2+3\cdot i\cdot z}\right| \leq 1$. Calcule o valor máximo do 12 · $|z|$.

Problema 47.

(Austrália) Sejam **z** e **w** números complexos, de modo que:

$$\begin{cases}(1-i)\cdot\bar{z}+i\cdot w = i\\ 2\cdot z+(1+i)\cdot\bar{w} = 0\end{cases}$$

Suponha que a = – Re(z), b = – Im(z), c = Re(w) e n é um inteiro positivo tal que:

$n = 2c + 2007a + 2007b + 2007a^2 + 2007b^2 + 2007a^3 + 2007b^3 + \ldots$

Podemos afirmar que a soma dos algarismos de **n** é?

a) 19
b) 18
c) 17
d) 16
e) 15

Problema 48.

(EUA) Define-se a sequência de números complexos $a_n = (1+i)\left(1+\dfrac{i}{\sqrt{2}}\right)\left(1+\dfrac{i}{\sqrt{3}}\right)\ldots\ldots\ldots\left(1+\dfrac{i}{\sqrt{n}}\right)$ para $n \geq 1$. Calcule um número natural **m** tal que $\sum_{n=1}^{m}|a_n - a_{n+1}| = 2005$.

Problema 49.

(Romênia) Sejam Z_1 e Z_2 complexos que adicionados aos respectivos inversos dão como resultado o valor 1. Se $S_n = Z_1^n + Z_2^n$, $n \in N^*$, então o valor de $\sum_{p=1}^{100}(S_{20})^p$ é igual a:

a) 200 b) 2 c) 1 d) 0 e) –1

Problema 50.

(Índia) Seja $i = \sqrt{-1}$. Defina uma sequência de números complexos por $z_1 = 0$ e $z_{n+1} = z_n^2 + i$ para $n \geq 1$. Sabendo que no plano complexo **d** é a distância de z_{111} à origem, então o valor de $\log_d^S$ onde $S = \sum_{k=0}^{49}\binom{100}{2k+1}$ vale:

a) 197 b) 198 c) 199 d) 200 e) 201

Problema 51.
(Vietnã) Encontre todos os números reais positivos **x** e **y** satisfazendo o sistema de equações:

$$\begin{cases} \sqrt{3x}\left(1+\dfrac{1}{x+y}\right)=2 \\ \sqrt{7y}\left(1-\dfrac{1}{x+y}\right)=4\sqrt{2} \end{cases}$$

Problema 52.
(EUA) Seja z = a + ib, com b ≠ 0 e **a** e **b** reais. Sabendo que $\dfrac{z}{1-z+z^2}$ é um número real, podemos afirmar que $a^2 + b^2$ é:

a) 0
b) –1
c) –2
d) 1
e) 2

Problema 53.
(Peru) Seja z = x + i.y com y ≠ 0 e x e y são números reais. Sabendo que $\dfrac{z}{z^2+64}$ resulta em um número complexo real, então o módulo de **z** é igual a:

a) 4 b) 8 c) 12 d) 5 e) 7

Problema 54.
(Austrália) Seja f: C → R uma função definida por : f(a + b · i) = f(b) + i · f(a) onde **i** é a unidade imaginária dos complexos. Então o valor da expressão $\sum_{k=1}^{2002} f(k+i)$ é igual a:

a) 2002 b) 2001 c) 0 d) 1 e) 2002 + 200 · i

Problema 55.
(Revista Europeia/2003) Se **a** e **b** são números reais que satisfaz $\begin{cases} a^3-3ab^2=44 \\ b^3-3a^2b=8 \end{cases}$. Sabendo que $a^2 + b^2 = m \cdot 2^{\frac{p}{q}}$, onde **m**, **p** e **q** são números naturais, então o valor p + q + m é igual a:

a) 10 b) 11 c) 12 d) 13 e) 14

Problema 56.
(UFC) Seja c ≠ 1 um número complexo tal que $c^7 = 1$. Determine o valor numérico da expressão E:

$$E=\frac{c}{1-c^2}+\frac{c^2}{1-c^4}+\frac{c^3}{1-c^6}+\frac{c^4}{1-c}+\frac{c^5}{1-c^3}+\frac{c^6}{1-c^5}.$$

Problema 57.
(Titu Andrescu) Prove para todo número complexo z, $|1+z|\ge\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ou $|z^2+1|\ge 1$.

Problema 58.
(EUA) Se **a**, **b**, **c** são números complexos tais que a + b + c = 0 e $|a|=|b|=|c|=1$. Então o valor de $a^2 + b^2 + c^2$ é igual a:

a) 0 b) 1 c) –1 d) i e) –i

Problema 59.

(Índia) Se $z_1, z_2 \in C$ são números complexos tais que $|z_1 + z_2| = \sqrt{3}$ e $|z_1| = |z_2| = 1$. Então o valor de $|z_1 - z_2|$ é igual a:

a) $\frac{1}{2}$ b) 1 c) $\sqrt{3}$ d) $\sqrt{2}$ e) $\frac{3}{2}$

Problema 60.

(USA) Sabendo que $|z_1| = |z_2| = 1$ e $z_1.z_2 \neq -1$. Prove que $\frac{z_1 + z_2}{1 + z_1.z_2}$ é um número real.

Problema 61.

(IME) Determine as raízes de $z^2 + 2iz + 2 - 4i = 0$ e localize-os no plano complexo, sendo $i = \sqrt{-1}$.

Problema 62.

(O.C.M. – 2003) Uma lista de números complexos distintos $z_1, z_2, ,......, z_n$ é um ciclo de comprimento **n** para uma função $f : C \to C$ se $z_2 = f(z_1),\ z_3 = f(z_2), ..., z_n = f(z_{n-1})$ e $z_1 = f(z_n)$.

Seja $f(z) = z^2 + 2003$ e $z_1, z_2, ..., z_{2003}$ um ciclo de comprimento 2003. Calcule

$$\prod_{i=1}^{2003} \left(f(z_i) + z_i \right) \text{ onde o símbolo } \prod \text{ indica o produto}$$

Problema 63.

(O.C.M/1999) Sejam **a** e **z** números complexos tais que $|a| < 1$ e $\overline{a}z \neq 1$. Mostre que se $\left| \frac{z - a}{1 - \overline{a}z} \right| < 1$ então $|z| < 1$.

Problema 64.

(USA) Seja $z_k = 3^{-k} + 2^{-k} \cdot i$ com $k = 0, 1, 2, ...$ Sabendo que $\sum_{k=0}^{\infty} z_k = a + b \cdot i$, então o valor da expressão $2 \cdot a + b$ é igual a:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

Problema 65.

(EUA-IME/2008) Se **n** é um múltiplo de 4, a soma $S = 1 + 2i + 3i^2 + ... + (n + 1)i^n$, onde $i = \sqrt{-1}$, é igual a:

a) $1 + i$

b) $\frac{n+2}{2}$

c) $\frac{n+2-ni}{2}$

d) $\frac{(n+1)(1-i)+2}{2}$

e) $\frac{n^2+8-4ni}{8}$

Problema 66.

Se **z** é raiz do polinômio $p(x) = a_n.x^n + a_{n-1}.x^{n-1} + ... + a_1.x + a_0$ com $a_k \in \mathbb{R}$, onde $k = 1, 2, 3, ...$. Prove que o conjugado de **z** também é raiz.

Problema 67.

(Índia) Seja **k** uma constante real e **z** um número complexo tal que $|z| = 1$. Prove que $|z + k| = |k \cdot z + 1|$.

Problema 68.

(AMC/2002) Calcule o número de pares ordenados (a, b) com **a** e **b** reais que satisfaz a equação $(a + b.i)^{2002} = a - b.i$ para $i = \sqrt{-1}$.

Problema 69.

(IME/2011) Resolva a equação $z^2 + \frac{9z^2}{(z+3)^2} = -5$, onde **z** pertence ao conjunto dos números complexos.

Problema 70.
(IME/2012) As raízes cúbicas da unidade, no conjunto dos números complexos, são representadas por 1, w e w^2 é um número complexo.
O intervalo que contém de $(1 - w)^6$ é:
a) $(-\infty, -30]$
b) $(-30, -10]$
c) $(-10, 10]$
d) $10, 30]$
e) $30, \infty]$

Problema 71.
(IME/2012) Seja o número complexo Z = a + bi, com a e b $\in \mathbb{R}$ (real) e $i = \sqrt{-1}$. Determine o módulo de **Z** sabendo que
$$\begin{cases} a^3 = 3(1 + ab^2) \\ b^3 = 3(a^2b - 1) \end{cases}.$$

Problema 72.
(USA) Se $|z| = 1$. Calcule $\left|\dfrac{a \cdot z + b}{\overline{b} \cdot z + \overline{a}}\right|$ para todo número complexo **a** e **b**.

Problema 73.
(China-adaptada) Os números complexos z_1 e z_2 satisfazem $|z_1 + z_2| = 3$ e $|z_1 - z_2| = 3\sqrt{3}$. Então o valor da expressão $\sqrt{\dfrac{1}{10}\left[\log_3^{\left|(z_1.\overline{z_2}) + (\overline{z_1}.z_2)\right|^{2000}}\right]}$ é igual a:

a) 10 b) 15 c) 20 d) 25 e) 30

Problema 74.
(USA) Sabendo que os números complexos **z** satisfaz tais condições $|z| = 1$ e $\left|(z)^2 + (\overline{z})^2\right| = 1$. Então o valor de z^{2016} é igual a:

a) 0 b) 1 c) –1 d) i e) –i

Problema 75.
(Peru) Sejam **a**, **b**, **c** e **d** reais não nulos. Mostre que a equação $x^2 + (a + b \cdot i) \cdot x + c + d \cdot i = 0$ não admite um número e um imaginário puro simultaneamente como raízes.

Problema 76.
Represente o número complexo $\dfrac{1 + i \cdot tg\theta}{1 - i \cdot tg\theta}$ na forma algébrica.

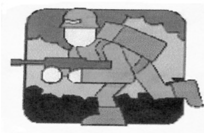
Problema 77.
(LIANG – SHIN) Seja um número complexo **z** tal que $z^5 = 1$;

a) Prove que: $\dfrac{z}{1+z^2} + \dfrac{z^2}{1+z^4} + \dfrac{z^3}{1+z} + \dfrac{z^4}{1+z^3} = 2$

b) Supondo $z \neq 1$, prove que: $\dfrac{z}{1-z^2} + \dfrac{z^2}{1-z^4} + \dfrac{z^3}{1-z} + \dfrac{z^4}{1-z^3} = 0$

Problema 78.
(TITU ANDRESCU) Se **a**, **b** e **c** são números reais e $w = -\dfrac{1}{2} + i \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Calcule o valor de $(a + bw + cw^2)(a + bw^2 + cw)$.

Problema 79.
(TITU ANDRESCU) Se z_1, z_2 e z_3 são números complexos que satisfaz as seguintes relações:
$z_1 + z_2 + z_3 = 0$ e $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$. Prove que $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$



SEÇÃO DE ESCOLAS MILITARES.

Esta secção de escolas militares tem como objetivo principal resolver questões que já foram abordadas em vários concursos militares. Mas também aprofundando os seus conhecimentos matemáticos e adquirindo cada vez um raciocínio apurado e uma certa dose de criatividade nas resoluções de problemas.

Problema 80.

(AFA/94) A solução da equação $3z - 8 = \bar{z} - 2i$, onde **z** é um número complexo, $\bar{Z}$ é o seu conjugado e **i**, a unidade imaginária, é dada por:

a) $z = -4 + \frac{1}{2}i$ b) $z = -4 - \frac{1}{2}i$

c) $z = 4 + \frac{1}{2}i$ d) $z = 4 - \frac{1}{2}i$

Problema 81.

(AFA/95) Se $w = \dfrac{2-i}{1+i}$, $i = \sqrt{-1}$, então $\bar{w}$ é igual a:

a) $\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$ b) $\frac{1}{2}+\frac{-3}{2}i$ c) $\frac{-1}{2}+\frac{3}{2}i$ d) $\frac{-1}{2}+\frac{-3}{2}i$

Problema 82.

(AFA/95) Se $z = 2 - 5i$ e $w = -1 + 3i$, sendo $i = \sqrt{-1}$, então o valor de $|zw|$ é:

a) $\sqrt{270}$ b) $\sqrt{290}$ c) $\sqrt{310}$ d) $\sqrt{330}$

Problema 83.

(AFA/1999) Os valores reais de **x**, para os quais a parte real do número complexo $z = \dfrac{x-2i}{x+i}$ é negativa, pertencem ao conjunto (intervalo)

a) { }
b) {0}
c) (–1,1)
d) $\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$

Problema 84.

(AFA/2002) Dado o número complexo **z** tal que $z + 2 \cdot \bar{z} - 9 = 3 \cdot i$, é correto afirmar que:

a) $|z| = 3\sqrt{10}$

b) $z = 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i \cdot \text{sen}\frac{7\pi}{4}\right)$

c) $\bar{z} = 9 - 3i$

d) $z^{-1} = \dfrac{1+i}{3}$

Problema 85.

(AFA/2000) A soma dos treze primeiros termos da progressão geométrica (2i, –2,...), onde i = $\sqrt{-1}$, é:

a) 0
b) 2i
c) –2i
d) 2i – 2

Problema 86.

(EsFAO/87) Se W = $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -i \\ 2 & 2i & 3 \end{vmatrix}$ e V = $(2 + i)^3$, então o módulo de $\sqrt{149}$ (W – V) é igual a:

a) 149 b) 148 c) 147 d) 146 e) 145

Problema 87.

(EFOMM/98) Sabendo-se que $Z_1 = (1-i)^3$ e $Z_2 = (1+2i)^4$, o resultado de $Z_1 - Z_2$ é:

a) 5 + 22i b) 15 + 22i c) 3 + 24i d) 13 – 24i e) 22i

Problema 88.

(EFOMM/1994) As soluções da equação $z^2 = -8 + 8 \cdot \sqrt{3}\, i$ são:

a) $2+2\sqrt{3}i$ e $-2-2\sqrt{3}i$
b) $-2+2\sqrt{3}i$ e $-2-2\sqrt{3}i$
c) $2+\sqrt{3}i$ e $-2-2\sqrt{3}i$
d) $2+2\sqrt{3}i$ e $-2-2\sqrt{3}i$
e) $2+\sqrt{3}i$ e $-2+\sqrt{3}i$

Problema 89.

(EFOMM/1994) O módulo do nº complexo z, tal que iz – 2z + 3 – i = 0 é:

a) 1 b) $\sqrt{2}$ c) $\sqrt{3}$ d) 2 e) $\sqrt{5}$

Problema 90.

(EFOMM/2001) Sabendo-se que $Z_1 = (1 - 2i)^4$ e $Z_2 = (2 + 2i)^3$, o resultado de $Z_1 - Z_2$ é:

a) 5 + 22i b) 15 + 22i c) 3 + 24i d) 13 – 24i e) 9 + 8i

Problema 91.

(EM/97) Sendo **i** a unidade imaginária dos números complexos, o valor do número natural **n** tal que $(2i)^n + (1+i)^{2n} = 64i$:

a) 4 b) 5 c) 6 d) 7 e) 9

Problema 92.

(EN/93) Considere os números complexos u = 1 + i e v = 1 – i. O valor de $u^{52} \cdot v^{-51}$ é:

a) v b) u c) v – u d) u + v e) u – v

Problema 93.

(ITA/1996) O valor da potência $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^{93}$ é:

a) $\dfrac{-1+i}{\sqrt{2}}$

b) $\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$

c) $\dfrac{-1-i}{\sqrt{2}}$

d) $\left(\sqrt{2}\right)^{93} i$

e) $\left(\sqrt{2}\right)^{93} + i$

Problema 94.
(ITA/97) Considere os números complexos

$z = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ e $w = 1 + i\sqrt{3}$.

$m = \left|\dfrac{w^6 + 3z^4 + 4i}{z^2 + w^3 + 6 - 2i}\right|^2$, então **m** vale:

a) 34 b) 26 c) 16 d) 4 e) 1

Problema 95.
(ITA/87) Seja **S** a coleção de todos os números complexos **z**, que são raízes da equação $|z| - z = 1 + 2i$, onde **i** é a unidade imaginária. Então, podemos garantir que:

a) $S = \left\{\dfrac{3}{2} - 2i\right\}$

b) $S = \left\{\dfrac{1}{2} + 2i, -\dfrac{1}{2} - 2i\right\}$

c) $S = \left\{\dfrac{1}{2} + 4k\pi,\ k = 1,2,3\right\}$

d) $S = \left\{\dfrac{1}{4} + 3i\right\}$

e) $S = \{1 + 2ki\ ;\ k = 1,2,3\}$

Problema 96.
(ITA/87) A soma de todas as raízes da equação $z^3 - 1 = 0$ é:

a) 1 b) 2 c) zero d) $-2\sqrt{2}\,i$ e) $2 + \sqrt{3}\,i$

Problema 97.
(ITA/87) Seja **N** o número de soluções reais da equação sen x = |2 + 3i|. Então, temos:

a) N > 50 b) N = zero c) N = 2 d) N = 1 e) N > 2 e N < 10

Problema 98.
(ITA/87) Considerando **z** e **w** números complexos arbitrários e $u = z \cdot w + \bar{z} \cdot \bar{w}$, então o conjugado de **u** será necessariamente:

a) igual a $|z|\ |w|$.
b) um número imaginário puro.
c) igual ao dobro da parte real de z + w.
d) igual ao dobro da parte real do número $z \cdot w$.
e) diferente de **u**.

Problema 99.
(ITA/88) Seja a equação $z^4 - a - bi = 0$ onde **a** e **b** são reais não nulos. Sobre as raízes desta equação podemos afirmar que:
a) uma delas é um imaginário puro.
b) os seus módulos formam uma progressão aritmética de razão $\sqrt[4]{|a+bi|}$.
c) o seu produto é um imaginário puro.
d) cada uma tem argumento igual a $\dfrac{\arg(a+bi)}{4}$.
e) a sua soma é zero.

Nota: arg (a + bi) denota o argumento do número a + bi.

Problema 100.
(ITA/88) O número natural **n** tal que $(2i)^n + (1+i)^{2n} = -16i$, onde **i** é a unidade imaginária do conjunto dos números complexos, vale:
a) n = 6 b) n = 3 c) n = 7 d) n = 4 e) não existe **n** nestas condições.

Problema 101.
(EFOMM/97) Sabendo-se que $z = \dfrac{i^{26} - 3i^{14} + 5i^{23}}{4i^{15} + i^4 - i^{124}}$, então, podemos afirmar que o dobro de $\dfrac{z}{1-i}$ vale:
a) $\frac{3}{4}+\frac{7}{4}i$ b) $\frac{1}{4}+\frac{3}{4}i$ c) $\frac{2}{3}+\frac{1}{3}i$ d) $\frac{3}{8}+\frac{7}{8}i$ e) $1-\frac{7}{4}i$

Problema 102.
(EFOMM/2002) O quociente de $\dfrac{i^{31} - i^{110}}{i^{13}}$ é:
a) $-1 - i$ b) $1 - i$ c) $-1 + i$ d) $1 + i$ e) i

Problema 103.
(EFOMM/2003) Dado o número complexo **Z = 1 – i** e considerando ser ele uma das raízes da equação $\mathbf{x^{10} - p = 0}$ o valor de **p** é:
a) 8i
b) – 4i
c) – 8i
d) – 16i
e) – 32i

Problema 104.
(ITA/90) A igualdade $1 + |z| = |1 + z|$, onde $z \in C$, é satisfeita:
a) para todo $z \in C$ que $Re(z) = 0$ e $Im(z) < 0$.
b) para todo $z \in C$ que $Re(z) \geq 0$ e $Im(z) < 0$.
c) para todo $z \in C$ que $|z| = 1$
d) para todo $z \in C$ que $Im(z) = 0$
e) para todo $z \in C$ que $|z| < 1$

Problema 105.
(ITA/89) O produto dos números complexos $z = x + yi$, que têm módulo igual a $\sqrt{2}$ e se encontram sobre a reta $y = 2x - 1$ contida no plano complexo, é igual a:

a) $\frac{6}{5}-\frac{8}{5}i$
b) $\frac{4}{5}-\frac{2}{5}i$
c) $-\frac{8}{5}-\frac{8}{5}i$
d) 2 + 2i
e) não existe nenhum complexo que pertença à reta $y = 2x - 1$ e cujo módulo seja $\sqrt{2}$.

Problema 106.
(ITA/92) Considere o número complexo z = a + 2i cujo argumento está no intervalo (0, π/2). Sendo **S** o conjunto dos valores de **a** para os quais z^6 é um número real, podemos afirmar que o produto dos elementos de **S** vale:

a) 4
b) $\frac{4}{\sqrt{3}}$
c) 8
d) $\frac{8}{\sqrt{3}}$
e) n.d.a.

Problema 107.
(ITA/93) Resolvendo a equação $z^2 = \overline{2+z}$ no conjunto dos números complexos, conclui-se sobre as soluções que:

a) nenhuma delas é um número inteiro.
b) a soma delas é dois.
c) estas são em número de 2 e são distintas.
d) estas são em número de quatro e são 2 a 2 distintas.
e) uma delas é da forma z = bi com **b** real não nulo.

Problema 108.
(ITA/94) Sejam **x** e **y** números reais com $x \neq 0$, satisfazendo $(x + iy)^2 = (x + y)i$, então:
a) x e y são números irracionais.
b) x > 0 e y < 0
c) x é uma raiz da equação $x^3 + 3x^2 + 2x - 6 = 0$
d) x < 0 e y = z
e) $x^2 + xy + y^2 = \frac{1}{2}$

Problema 109.
(ITA/93) Seja **a** o módulo do número complexo $\left(2 - 2\sqrt{3}i\right)^{10}$. Então o valor de **x** que verifica a igualdade $(4a)^x = a$ é:

a) $\frac{10}{11}$ b) -2 c) $\frac{5}{8}$ d) $\frac{3}{8}$ e) $\frac{1}{5}$

Problema 110.
(IME/89) Sejam **z** e **w** números complexos tais que $|z| = 1$ e $|w| \neq 1$. Calcule $\left|\frac{z-w}{1-\overline{w}\cdot z}\right|$

Problema 111.
(IME/88) Seja **z** um número complexo. Mostre que $\left(z + \frac{1}{z}\right)$ é um número real se e somente se **z** é um número real ou $|z| = 1$.

Problema 112.
(IME/74) São dados dois números complexos z_1 e z_2. As partes real e imaginária de um complexo são dadas por $\operatorname{Re}(z)$ e $\operatorname{Im}(z)$. Determine z_1 e z_2, sabendo que:

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = 5 \\ 4.z_1^2 + z_2^2 + 15[\operatorname{Re}(z_2)] = 0 \\ \operatorname{Re}(z_2) = 4.\left[\operatorname{Re}(z_1)\right] \end{cases}$$

Problema 113.
(IME/74) Determine o conjunto dos pontos **z** do plano complexo tais que $\frac{z+2}{z(z+1)}$ representa um número real.

Problema 114.
(IME) A parte real de um número complexo é $x^2 - 2$ e a parte imaginária $x\sqrt{2}$. Determine o valor mínimo do módulo desse complexo.

Problema 115.
(IME/2001) Dois números complexos são ortogonais se suas representações gráficas forem perpendiculares entre si. Prove que dois números complexos Z_1 e Z_2 são ortogonais se e somente se:
$Z_1\overline{Z_2} + \overline{Z_1}Z_2 = 0$

Problema 116.
(IME/87) Dois números complexos Z_1 e Z_2, não nulos, são tais que $|Z_1 + Z_2| = |Z_1 - Z_2|$. Mostre que Z_2 / Z_1 é imaginário puro.

Problema 117.
(IME/70) Seja $F = \sqrt{-15-8i}$. Calcule **F**, escrevendo a resposta sob a forma a + bi, com **a** e **b** inteiros.

Problema 118.
(IME/86) Considere os seguintes conjuntos de números complexos:
$A\{z \in C;\ |z| = 1 \text{ e } Im(z) > 0\}$ e $B = \{z \in C;\ Re(z) = 1 \text{ e } Im(z) > 0\}$.

a) Mostre que para cada **z** pertencente a **A**, o número $\frac{2z}{z+1}$ pertence a **B**.

b) Mostre que cada **w** pertencente a **B** pode ser escrito na forma $\frac{2z}{z+1}$, para algum **z** pertencente a **A**.

Problema 119.
(AMAN/2004) Determine todos os números naturais **n** tais que:
$(1+i)^{2n} + (2.i)^n - 16.i = 0$ onde $i = \sqrt{-1}$

Problema 120.
(AMAN/99) Considere os números complexos **z** tais que $\left|z + \frac{1}{z}\right| = 1$. Determine o valor máximo do módulo de **z**.

Problema 121.
(AMAN/2009) Determine os valores do número complexo **z**, diferente de zero, que satisfaz a equação $\begin{vmatrix} i^8 & z & i^2 \\ 0 & i^7 & z \\ i^5 & 0 & -\overline{z} \end{vmatrix} = 1.$

Obs.:
$\begin{cases} \overline{z} \text{ é o complexo conjugado de } \mathbf{z}; \\ \mathbf{i} \text{ é a unidade imaginária.} \end{cases}$

Problema 122.

(ITA/2013) A soma das raízes da equação em C, $z^8 - 17z^4 + 16 = 0$, tais que $z - |z| = 0$, é:
a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

GABARITO

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
zero	*	c	b	a	b	c	c	*	*	c	*	*	*	*	b	a	a	b	54
21	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**	**31**	**32**	**33**	**34**	**35**	**36**	**37**	**38**	**39**	**40**
d	3	a	*	d	a	d	*	163	c	a	*	d	b	e	b	*	*	*	e
41	**42**	**43**	**44**	**45**	**46**	**47**	**48**	**49**	**50**	**51**	**52**	**53**	**54**	**55**	**56**	**57**	**58**	**59**	**60**
d	e	b	b	zero	4	*	2005	d	b	*	d	b	c	e	*	*	a	*	*
61	**62**	**63**	**64**	**65**	**66**	**67**	**68**	**69**	**70**	**71**	**72**	**73**	**74**	**75**	**76**	**77**	**78**	**79**	**80**
*	*	*	e	*	*	*	*	*	b	*	*	*	*	*	*	–	*	*	d
81	**82**	**83**	**84**	**85**	**86**	**87**	**88**	**89**	**90**	**91**	**92**	**93**	**94**	**95**	**96**	**97**	**98**	**99**	**100**
a	b	d	b	b	a	a	a	b	e	b	a	a	a	a	c	b	d	e	b
101	**102**	**103**	**104**	**105**	**106**	**107**	**108**	**109**	**110**	**111**	**112**	**113**	**114**	**115**	**116**	**117**	**118**	**119**	**120**
a	a	e	d	a	a	c	e	a	01	*	*	*	*	*	*	*	–	*	*
121	**122**																		
*	c																		

***2. Resp.:** $\frac{4}{25}-\frac{3}{25}.i \quad , \quad -\frac{4}{25}+\frac{3}{25}.i$

***9. Resp.:** $z=\frac{3\pm(1+2i)}{2}$

***10. Demonstração**

***12. Demonstração**

*13. **Resp.:** $\frac{(n+2)-n\cdot i}{2}$

***14. Resp.:** $|z_{máx}|=\frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}$ e $|z_{mín}|=\frac{-a+\sqrt{a^2+4}}{2}$

***15. Resp.:** $z=\frac{-5\pm\sqrt{33}}{24}$ e $z=\frac{-5\pm i\cdot\sqrt{23}}{24}$

***24. Demonstração**

***28. Resp.:** We find $z \to \frac{(z+i)}{(z-i)} \to i\frac{(z+1)}{(z-1)} \to z$. So $z_0 = z_3 = ... = z_{2001}$. Hence $z_{2002} = (1/137 + 2i)/(1/137) = 1 + 274i$.

***32 Resp.:** $\sqrt{4+2\sqrt{2}}$

***37. Resp.:** $z=1+i$

***38. Resp.:** $r=\left(\frac{n}{n^2-2n+2}\right)$ e $s=\left(\frac{n-2}{n^2-2n+2}\right)$

***39. uma reta**

AN – 14/03/13 – Rev.: TM
OSG.: 69251/13


FARIAS BRITO
O 1º DO BRASIL NO ITA E NO IME*
63 APROVAÇÕES
COMPARATIVO ENTRE AS ESCOLAS CEARENSES
ESCOLA | ITA | IME | TOTAL
FARIAS BRITO | 20 | 43 | 63
ESCOLA B | 09 | 27 | 36
ESCOLA C | 09 | 23 | 32
ESCOLA D | 01 | 09 | 10
ESCOLA E | 03 | 04 | 07
ESCOLA F | 01 | 04 | 05
ESCOLA G | 00 | 04 | 04
QUANDO VOCÊ ESCOLHE UMA ESCOLA DE EXCELÊNCIA, O MUNDO ESCOLHE VOCÊ.
*Comparativo entre todas as escolas de todas as capitais do Brasil.
FARIAS BRITO
O MELHOR EM OLIMPÍADAS
E ESCOLAS MILITARES É TAMBÉM
O MELHOR NO ITA E NO IME.
ESCOLAS CONVENIADAS
ORGANIZAÇÃO EDUCACIONAL
FARIAS BRITO
Lições para toda a vida.
www.fariasbrito.com.br