I - DEFINIÇÃO

Denominamos *matriz real* do tipo $m \times n$ (leia: *m* por *n*) a toda tabela formada por *m.n* números reais dispostos em *m* linhas e *n* colunas.

Exemplos: $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ é uma matriz real 2×3.

$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 8 \end{bmatrix}$ é uma matriz real 3×3.

II - MATRIZ QUADRADA.

Quando o número de linhas, e igual ao número de colunas dizemos que a matriz é quadrada de ordem *n*.

Exemplo: $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 8 \end{bmatrix}$ é uma matriz real quadrada de ordem *3*.

III - REPRESENTAÇÃO GENÉRICA

Para representar uma matriz genérica $M = (a_{ij})_{mxn}$, usamos:

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

IV - IGUALDADE DE MATRIZES

A igualdade entre duas matrizes só existe, se forem matrizes de mesma ordem, e se os elementos correspondentes forem iguais.

Se $A = (a_{ij})_{mxn}$ e $B = (b_{ij})_{mxn}$ temos : $A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}$, $\forall i$ e $\forall j$.

V - MATRIZ TRANSPOSTA

Dada a matriz *A* do tipo *m x n*, denominamos *matriz transposta* de *A* à matriz do tipo *n x m* cujas colunas coincidem ordenadamente com as linhas de *A*. Indicamos a matriz transposta por A^t. De um modo geral temos:

Se $A = (a_{ij})_{mxn}$, então $B = (b_{ij})_{nxm}$, onde $b_{ij} = a_{ji}$, $\forall i$ e $\forall j$.

VI - ADIÇÃO DE MATRIZES

Dadas duas matrizes *A* e *B* do tipo $m \times n$, a soma $A + B$ é a matriz $m \times n$ que obtemos somando os elementos de mesmo índice das matrizes dadas. De maneira análoga determinamos a diferença $A - B$. Portanto temos:

Se $A = (a_{ij})_{mxn}$ e $B = (b_{ij})_{mxn}$ temos $A + B = C = (c_{ij})_{mxn}$ onde $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Se $A = (a_{ij})_{mxn}$ e $B = (b_{ij})_{mxn}$ temos $A - B = D = (d_{ij})_{mxn}$ onde $d_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$.

VII - PRODUTO DE MATRIZES

Para calcular o produto *AB* de duas matrizes *A* e *B* iremos efetuar as multiplicações de cada linha de *A* por todas as colunas de *B*. Assim, o produto *AB* só vai existir se numa linha de *A* e numa coluna de *B* houver a mesma quantidade de elementos. Isto ocorre quando o número de colunas de *A* é igual ao número de linhas de *B*.

Considere a matriz $A = (a_{ij})$ de tipo $m \times n$ e a matriz $B = (b_{jk})$ de tipo $n \times p$. O produto *AB* (também indicado por *AB*) é a matriz $C = (c_{ik})$ do tipo $m \times p$, cujo termo geral é dado por:

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + \ \ldots \ + a_{in} \cdot b_{nk}, \ \forall i \text{ e } \forall j.$$

VIII – RESUMINDO AS PROPRIEDADES

$AB \neq BA$.

$(AB) \cdot C = A \cdot (BC)$.

$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$, $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$.

$(k \cdot A) \cdot B = A \cdot (k \cdot B) = k \cdot (A \cdot B)$.

$(A^t)^t = A$.

$(AB)^t = B^t . A^t$.

$(A + B)^t = A^t + B^t$.

$(kA)^t = kA^t$.

OBSERVAÇÃO:Não é válida a lei do cancelamento, isto é , sendo AB=AC, com $A \neq O$***, não podemos concluir que B=C.***

TESTANDO SEUS CONHECIMENTOS

Problema 1.

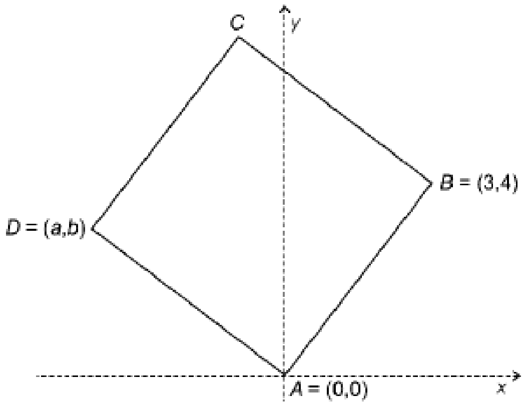
(OMSP – ADAPTADA) Dadas as matrizes A = $\begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{bmatrix}$ e $A^k = \begin{bmatrix} 2^{111} & 2^{111} \\ 2^{111} & 2^{111} \end{bmatrix}$. Então, o valor de k é igual a:

a) 26 b) 27 c) 28 d) 29 e) 30

resp.: C

Problema 2.

(UFMG – 2003)Nesta figura, está representado um quadrado de vértices *ABCD*:



Sabe-se que as coordenadas cartesianas dos pontos *A* e *B* são *A* = (0, 0) e *B* = (3, 4). Então, é CORRETO afirmar que o resultado da soma das coordenadas do vértice *D* é

$a)-2$ $b)-1$ $c)-\frac{1}{2}$ $d)-\frac{3}{2}$ $e)-3$

RESP.: B

Problema 3.

Um batalhão de Exército resolveu codificar suas mensagens através da multiplicação de matrizes. Primeiramente, associa as letras do alfabeto aos números, segundo a correspondência abaixo numerada:

A	1		O	14
B	2		P	15
C	3		Q	16
D	4		R	17
E	5		S	18
F	6		T	19
G	7		U	20
H	8		V	21
I	9		W	22
J	10		X	23
L	11		Y	24
M	12		Z	25
N	13			

Dessa forma, supondo-se que o batalhão em questão deseja enviar a mensagem "PAZ", pode-se tomar uma matriz 2 x 2, da forma: $\begin{bmatrix} P & A \\ Z & - \end{bmatrix}$, a qual, usando-se a tabela acima, será dada por: $M = \begin{bmatrix} 15 & 1 \\ 25 & 0 \end{bmatrix}$. Tomando-se a matriz-chave C para o código, isto é: $C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, transmite-se a mensagem "PAZ" através da multiplicação das matrizes M e C, ou seja: $M.C = \begin{bmatrix} 15 & 1 \\ 25 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31 & 47 \\ 50 & 75 \end{bmatrix}$ ou através de números 31 47 50 75 . Dessa forma,

utilizando-se a mesma matriz-chave C, a decodificação de mensagem 51 81 9 14 será compreendida pelo batalhão como sendo a transmissão da palavra:
a)LUTE b)FOFO c)AMOR d)VIDA e)FUGA
RESP.: D

Problema 4.
Considere a matriz mostrada na figura a seguir

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

Determine A^{1998}.
RESP.:
$$A^{1998} = \begin{pmatrix} 2^{1998} & 0 \\ 0 & 2^{1998} \end{pmatrix}$$

Problema 5.
(UFRJ)Considere as matrizes:

$A = \begin{bmatrix} 19941994 & 19941994 \\ 19941994 & 19941995 \end{bmatrix}$ $e\ B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Seja $A^2 = A.A$ e $B^2 = B.B$
Determine a matriz $C = A^2 - B^2 - (A + B)(A - B)$

Problema 6.

(UFC)A matriz quadrada M, de ordem n > 1, satisfaz a equação $M^2 = M - I$, onde I é a matriz identidade de ordem n > 1. Determine, em termos de M e I , a matriz M^{2003}

Problema 7.
(UFC)Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ $e\ P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$, determine os seguintes produtos matriciais:

a) $P.A.P^{-1}$ b) $P.A^6.P^{-1}$

Problema 8.
Suponha que $B = P^{-1}.A.P$. Mostre $B^m = P^{-1}.A^m.P$, para m Є N^*.

Problema 9.
Se $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ prove a identidade $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -sen\alpha \\ sen\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^5 = \begin{pmatrix} \cos 5\alpha & -sen5\alpha \\ sen5\alpha & \cos 5\alpha \end{pmatrix}$

Problema 10.

(FEI-SP)Dados s número k natural, múltiplo de 4, e a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, podemos afirmar que $A^{k+3} - A$ é:

Problema 11.

(UFRS)Uma matriz A = (a_{ij}), quadrada de ordem n, tal que $a_{ij} = 0$ sempre que i.j > (i + j). Caso contrário, $a_{ij} = 1$. A soma de todos os elementos da matriz é:

a) 2n b) 2n – 1 c) 2n + 1 d) n + 1 e) n

Problema 12.

Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Determine a matriz $A^{1993} + 2.A^{1990}$

Problema 13.

(OMSP) É dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 \end{pmatrix}$. Calcular $A + A^2 + A^3 + \dots\dots + A^{50}$

Problema 14.

Uma matriz A quadrada é dita *involutiva* quando $A^2 = I$. Uma matriz diagonal de ordem 2 é involutiva. Determine-a

Problema 15.

(UERJ – 2002) Considere as matrizes A e B:

A = (a_{ij}) é quadrada de ordem n em que $a_{ij} = \begin{cases} 1, se\ i\ \ for\ \ par \\ -1, se\ i\ \ for\ \ impar \end{cases}$

B = (b_{ij}) é de ordem n x p em que $b_{ij} = j^i$.

a) Calcule a soma dos elementos da diagonal principal da matriz A.

b) O elemento da quarta linha e da segunda coluna da matriz produto A.B é igual a 4094. Calcule o número de linhas da matriz B.

Problema 16.

(UFRJ – 97) Observe a sucessão de matrizes a seguir, constituída com os números ímpares positivos:

$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9 & 11 \\ 13 & 15 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 17 & 19 \\ 21 & 23 \end{bmatrix}, ...$

a) Determine o maior número escrito ao se completar a 37a matriz.
b) O número 661 aparece na N-ésima matriz. Determine N.

RESP.: a) 295 b) 83

Problema 17.
Considere as matrizes:
$A = (a_{ij})_{3\times4}$, definida por $a_{ij} = i - j$:
$B = (b_{ij})_{4\times3}$, definida por $b_{ij} = 2^{i-j}$:
$C = (c_{ij}),\ C = A \cdot B$.
Calcule o elemento c_{32}.
Resp.: 2

Problema 18.
(UFSC). Seja $A = (a_{ij})_{4\times3}$ e $B = (b_{ij})_{3\times4}$, duas matrizes definidas por $a_{ij} = i + j$ e $b_{ij} = 2i + j$, respectivamente. Se $A \cdot B = C$, determine o elemento c_{32} da matriz *C*.
Resp.: 94

Problema 19.
(MACK). Sejam as matrizes a seguir:
$A = (a_{ij})_{4\times3}$, definida por $a_{ij} = i^j$ e $B = (b_{ij})_{3\times4}$, definida por $b_{ij} = j^i$. Se $C = AB$, então o elemento c_{11}, vale:
a) 3 b) 14 c) 39 d) 84 e) 256
Resp.: item d

Problema 20.
(UFRJ). Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
a) Determine A^3.
Resp.: $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) Se A^n denota o produto de *A* por *A* *n* vezes, determine o valor do número natural *k* tal que $A^{k^2} - A^{5k} + A^6 = I$, em que I é a matriz identidade.
Resp.: 2 ou 3

Problema 21.

(UFPB). Sabendo-se que uma matriz de rotação de ângulo x é dada por $\begin{pmatrix} \cos x & -\text{sen } x \\ \text{sen } x & \cos x \end{pmatrix}$, então o produto de uma matriz de rotação de ângulo x por outra de ângulo y resulta em uma matriz de rotação de ângulo:

a) xy b) $x+y$ c) $x-y$ d) $y-x$ e) x^2+y^2

Resp.: item b

Problema 22.

(FGV-SP). Seja A uma matriz quadrada de ordem n e I a matriz identidade de ordem n. Se $A^2 = I$, podemos afirmar que:

a) $A^3 = A$ b) $A^{10} = A$ c) $A^{15} = I$ d) $A^{85} = I$

e) a matriz A não admite matriz inversa.

Resp.: item a

Problema 23.

(MACK-SP). Com relação a matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, a alternativa correta é:

a) $A^{19} = I_3$ b) $A^{20} = A$ c) $A^{21} = A^2$ d) $A^{22} = A^2$ e) $A^{18} = I_3$

Resp.: item e

Problema 24.

(SANTA CASA–SP). Se A é uma matriz quadrada, define-se traço de A como a soma dos elementos da diagonal principal de A. Nestas condições, o traço da matriz $A = (a_{ij})_{3\times3}$, onde $a_{ij} = 2\cdot i - 3\cdot j$, é igual a:

a) 6 b) 4 c) – 2 d) – 4 e) – 6

Resp.: item e

Problema 25.

(SANTA CASA–SP). São dadas as matrizes A e B, quadradas, de ordem n e invertíveis. A solução da equação $A\cdot X^{-1}\cdot B^{-1} = I_n$, onde I_n é a matriz identidade de ordem n, é a matriz X tal que:

a) $X = A^{-1}\cdot B$ b) $X = B\cdot A^{-1}$ c) $X = B^{-1}\cdot A$

d) $X = A\cdot B^{-1}$ e) $X = B^{-1}\cdot A^{-1}$

Resp.: item c

Problema 26.

Se $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, prove que vale a igualdade $(A.B)^t = B^t.A^t$.

Problema 27.

Se A e B são matrizes reais de ordem 2 que comutam com a matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, mostre que $AB = BA$.

Resp.: As matrizes que comutam com $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ são do tipo $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$. Assim, podemos considerar $A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ -x_2 & x_1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} x_3 & x_4 \\ -x_4 & x_3 \end{pmatrix}$, e assim mostrar que $AB = BA$.

Problema 28.

Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2008 & 2008 \\ 2008 & 2009 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Seja $A^2 = A.A$ e $B^2 = B.B$. Determine a matriz $C = A^2 - B^2 - (A+B)(A-B)$.

Resp.: $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Problema 29.

Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$. Determine A^{2006}.

Resp.: Veja que $A^3 = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} = -8 \cdot I_2$, e portanto, $A^{2006} = A^2 \cdot A^{2004}$

$$A^{2006} = \begin{pmatrix} -2 & -2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2^{2004} & 0 \\ 0 & 2^{2004} \end{pmatrix} = 2^{2004} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & -2 \end{pmatrix}$$

Problema 30.

Considere a matriz real $A = (a_{ij})_{2\times 2}$, definida por $a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } i = j \\ 5^{j-i}, & \text{se } i \neq j \end{cases}$. Determine:

a) A matriz $M = A + A^2 + A^3$.
b) a matriz $P = A + A^2 + A^3 + A^4 + ... + A^{20}$.

Resp.:a) $M = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 2/5 & 1 \end{pmatrix}$; b) $P = \begin{pmatrix} 10 & 50 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$

IX - MATRIZ DIAGONAL

Numa matriz quadrada A de tipo $n \times n$, os elementos a_{ij} com $i = j$ formam a diagonal principal. Quando são nulos os elementos que não pertencem à diagonal principal, dizemos que A é uma *matriz diagonal.*

X - MATRIZ SIMÉTRICA

Uma matriz quadrada A de tipo $n \times n$, é chamada matriz simétrica quando é igual à sua transposta.

XI - MATRIZ ANTI-SIMÉTRICA.

Uma matriz quadrada A do tipo $n \times n$ é chamada matriz anti-simétrica quando é igual à oposta da sua matriz transposta.

XII - MATRIZ IDENTIDADE

Chamamos matriz identidade (ou matriz unidade) de ordem n à matriz quadrada $n \times n$ em que os elementos da diagonal principal são iguais a 1 e os demais elementos são todos iguais a zero.

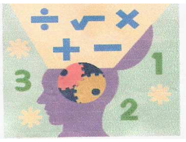
Observação: Qualquer que seja a matriz A do tipo $m \times n$ valem as igualdades:

$A.I_n = A$ e $I_m.A = A$

XIII - MATRIZ INVERSA

Uma matriz quadrada A de ordem n é chamada *matriz inversível (ou matriz invertível)* se existir uma matriz B tal que $AB = BA = I_n$. Quando existe a matriz B, ela é chamada matriz inversa de A e a indicamos por A^{-1}. Assim:

$A.A^{-1} = A^{-1}.A = I_n$



TESTANDO SEUS CONHECIMENTOS

Problema 31.

Seja a matriz quadrada de ordem 3 definida por:

$$a_{ij} = \begin{cases} \log i,\ se\ i < j \\ 2^i,\ se\ i \geq j \end{cases}$$

A soma do elemento da primeira linha e da terceira coluna com o elemento da segunda linha e da primeira coluna é:

a) 2 b) 4 c) 8 + log2 d) 4 + log3 e) 2 + log3

resp.: B

Problema 32.

(FEI – SP)Qual é o valor registrado na 17ª coluna com a 28ª linha do quadrado abaixo descrito parcialmente?

1	2	3	....
2	3	4	....
3	4	5	....
....	....	....	....

a) 44 b) 28 c) 54 d) 45 e) 27
resp.: A

Problema 33.

Se a matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ a & 2 & 0 \\ b & k & 3 \end{pmatrix}$ é simétrica e k = a + b + c, então a expressão $\dfrac{a^3 + b^3 + c^3}{a.b.c}$ é igual a:

a) 4 b) 3 c) 2 d) 1 e) 0
resp.: B

Problema 34.
Sejam f e g funções reais de variáveis reais definidas por
$f(x) = \dfrac{5 - \log x}{4}$ e $g(x) = \dfrac{3 - \log x}{4}$. Se a matriz A = ($a_{ij}$) é tal que a_{ij} = f(i) – g(j); para i Є {1, 2, 3} e j Є {1, 2, 3}, então a soma de todos os elementos da diagonal principal dessa matriz é:

a) ½ b) 2/3 c) 3/2 d) 4/3 e) ¾
resp.: B

Problema 35.
(FUNREI – MG)Uma matriz m x m é chamada de quadrado mágico quando a soma dos elementos de cada linha, de cada coluna, da diagonal principal e da outra diagonal(secundária) são iguais. Se a matriz 4 x 4 dada por $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & a \\ 4 & 5 & 6 & b \\ 7 & 8 & c & d \\ r & s & t & u \end{bmatrix}$ é um quadrado mágico, então $\dfrac{c + d + t + u}{a + b + r + s}$ é igual a:

a) -3/8 b) -7/32 c) 2/3 d) -5/16

Problema 36.
(UFPB – 98)

A inversa da matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 3 & 4\end{pmatrix}$ é a matriz $A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4 & x & -1\\ 0 & 2 & 0\\ -2 & -3 & 1\end{pmatrix}$. Então, o valor de x é

a) -1 **b)** 0 **c)** 1 **d)** 3 **e)** 2

Resp.: C

Problema 37.
Obtenha a matriz inversa, se existir, de:

a) $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix}$ b) $A=\begin{pmatrix}5 & 7\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ c) $A=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 3 & 0\end{pmatrix}$

d) $A=\begin{pmatrix}2 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ e) $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$

Resp.:a) $A^{-1}=\begin{pmatrix}1/4 & 1/4\\ -3/4 & 1/4\end{pmatrix}$; b) $A^{-1}=\begin{pmatrix}3 & -7\\ -2 & 5\end{pmatrix}$; c) $A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1/3\\ 1/2 & 0\end{pmatrix}$; d) não existe a inversa da matriz *A*; e) $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1/2 & 0\\ 0 & 0 & 1/3\end{pmatrix}$;

Problema 38.

Sabe-se que a inversa de uma matriz *A* é $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. Determine o elemento da segunda linha e primeira coluna da matriz *A*.

Resp.: $c_{21}=\frac{1}{\det A}\cdot A_{12}=\frac{1}{1}\cdot(-2)=-2$, onde A_{ij} representa o cofator do elemento a_{ij} da matriz *A*.

Problema 39.
Sendo $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 5\end{pmatrix}$, ache a matriz *B* tal que $B\cdot A=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 3 & 1\end{pmatrix}$.

Resp.: $B=\begin{pmatrix}-5/13 & 12/13\\ 12/13 & 5/13\end{pmatrix}$.

Problema 40.

A matriz inversa de M é a matriz $M^{-1} = \begin{pmatrix} 16 & -1 & -10 \\ 13 & -1 & -8 \\ 11 & -1 & -7 \end{pmatrix}$. Determine a soma dos elementos da segunda linha da matriz M.

Problema 41.
Prove que se A^2 é simétrica quer A seja simétrica quer seja A anti-simétrica.

Resp.:
Se A for simétrica, então $A^T = A \Rightarrow A^T \cdot A^T = A \cdot A \Rightarrow (A \cdot A)^T = A \cdot A \Rightarrow (A^2)^T = A^2$.
Se A for anti-simétrica, então $A^T = -A \Rightarrow A^T \cdot A^T = (-A) \cdot (-A) \Rightarrow (A \cdot A)^T = A \cdot A \Rightarrow (A^2)^T = A^2$.

Problema 42. Prove que se $A \cdot A^T = O$, então $A = O$.
***Solução*:**
Seja $C = A \cdot A^T$. Na diagonal principal de C, temos:
$c_{11} = \sum_{k=1}^{n} a_{1k} b_{k1} = \sum_{k=1}^{n} a_{1k} a_{1k} = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}^2$, onde $b_{k1} = a_{1k}$, pois $B = A^T$.
Assim, temos:
$a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 + ... + a_{1n}^2 = 0 \Rightarrow a_{11}^2 = a_{12}^2 = a_{13}^2 = ... = a_{1n}^2 = 0$. Assim, todos os elementos da primeira linha da matriz A, são nulos. O mesmo acontece com todas as outras linhas da matriz A, pois de modo geral temos:
$c_{mm} = \sum_{k=1}^{n} a_{mk} b_{km} = \sum_{k=1}^{n} a_{mk} a_{mk} = \sum_{k=1}^{n} a_{mk}^2 = 0$, onde $m \in \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ ...\ ,\ n\}$
De onde, temos:
$a_{m1}^2 + a_{m2}^2 + a_{m3}^2 + ... + a_{mn}^2 = 0 \Rightarrow a_{m1}^2 = a_{m2}^2 = a_{m3}^2 = ... = a_{mn}^2 = 0$.
Portanto, se $AA^T = O_n$, então $A = O_n$.

Problema 43.

Considere a matriz complexa $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Sabendo que $i^2 = -1$, onde i é a unidade imaginária, determine:

a) M^4 b) M^{2000} c) M^{2005}

Resp.: a) $M^4 = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$; b) $M^{2000} = \begin{pmatrix} (-4)^{500} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-4)^{500} \end{pmatrix}$;

b) $M^{2005} = M^{2004} \cdot M = \begin{pmatrix} (-4)^{501} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-4)^{501} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$M^{2005} = \begin{pmatrix} (-4)^{501} & 0 & (-4)^{501} \cdot i \\ 0 & 0 & 0 \\ (-4)^{501} \cdot i & 0 & (-4)^{501} \end{pmatrix}$$

Problema 44.
Sejam A e B matrizes quadradas de ordem n inversíveis. Prove que AB é inversível e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Problema 45.
Sejam A e B matrizes quadradas de ordem n. Sobre que condições vale a igualdade $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

Problema 46.
Sob que condição a matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ comutam com sua transposta?
Resp.: $b^2 = c^2$ e $(c-b)\cdot(a-d) = 0$

Problema 47.
Calcular a e b reais de modo que a matriz não nula $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & 0 \end{pmatrix}$ verifique a condição $A^2 = A$.
Resp.: $b = 0$ e $a = 1$

Problema 48.
Determinar as matrizes diagonais de 2ª. ordem que satisfazem à equação $X^2 = X$.
Resp.: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Problema 49.
Seja A uma matriz quadrada de ordem 2, inversível. Prove que A^t é inversível e $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$. (*sugestão*: lembre que $A.A^{-1} = I_n$ e que $(A.B)^t = B^t.A^t$).

Problema 50.
Calcule todas as matrizes quadradas, de ordem 2, tais que $X^2 = I_2$.
Resp.: $\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{1-bc} & b \\ c & \sqrt{1-bc} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sqrt{1-bc} & b \\ c & \sqrt{1-bc} \end{pmatrix}$, onde $c \in R$ e $bc \le 1$.

Problema 51.
Calcule todas as matrizes quadradas, de ordem 2, tais que $X^2 = X$.

Resp.: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \dfrac{1+\sqrt{1-4bc}}{2} & b \\ c & \dfrac{1-\sqrt{1-4bc}}{2} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \dfrac{1-\sqrt{1-4bc}}{2} & b \\ c & \dfrac{1+\sqrt{1-4bc}}{2} \end{pmatrix}$,

onde $b, c \in R$ e $bc \leq \dfrac{1}{4}$.

Problema 52.
Se A e B são matrizes diferentes satisfazendo $A^3 = B^3$ e $A^2B = B^2A$. Verifique se a matriz $C = A^2 + B^2$ possui inversa.
Resp.: A matriz C não possui inversa.

Problema 53.
(Provão – 2001). Se a matriz M satisfaz $M^2 - 2M + I = O$, então M^{-1}:
a) não existe.
b) é igual a I.
c) é igual a M.
d) é igual a $M - 2I$.
e) é igual a $2I - M$.
Resp.: item e

Problema 54.
(IMO–UNIV–2003). Sejam A e B matrizes reais $n \times n$ tais que $AB + A + B = O$. Prove que $AB = BA$.

Problema 55.
Considere a matriz quadrada de ordem n, definida por $a_{ij} = 1$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & & \ldots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

a) Mostre que $A^2 = n \cdot A$ e $A^3 = n^2 \cdot A$
b) Prove por indução sobre p que $A^{p+1} = n^p \cdot A$

Problema 56.
(OBM - 2003). Seja A uma matriz real $n \times n$

$$A = \begin{pmatrix} x+y & x & \dots & x \\ x & x+y & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & \cdots & x+y \end{pmatrix}.$$

a) Determine os valores de *x* e *y*, de modo que a matriz *A* seja inversível.
b) Calcule a matriz A^{-1}.

Problema 57.
(CESESP). Seja *A* uma matriz da forma:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Seja $f : R(3\times 3) \to R$ a função dada por:
I – $R\ (3\times 3)$ é o conjunto das matrizes quadradas de ordem 3.
II – $f(A) = c_1 \cdot c_2 \cdot c_3$, onde $c_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}$, $i = 1,\ 2,\ 3$.
Assinale a alternativa falsa:

a) $f\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}\right) = 0$ b) $f\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = 27$

c) $f\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 5 \\ 7 & 9 & 8 \end{pmatrix}\right)$ d) $f\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}\right)$

e) $f\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 9 \\ 7 & 8 & 6 \end{pmatrix}\right)$.

Resp.: item e

Problema 58.
A matriz quadrada *A* diz-se nilpotente se $A^p = O$, para alguns inteiros positivo *p*. Se *p* for o menor inteiro positivo para o qual $A^p = O$, então *A* diz-se nilpotente de índice *p*. Mostre que $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$ é nilpotente de índice 3.

Problema 59.
Se $A^k = O$, prove que $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \dots + A^{k-1}$.

Problema 60.
Um poliedro de vértices A_1, A_2, A_3, ... , A_8 é tal que cada elemento da matriz $M = (a_{ij})_{8\times 8}$ abaixo, representa a distância entre dois vértices A_i e A_j, ou seja , $a_{ij} = \text{dist}(A_i, A_j)$, com $i, j \in \{1,\ 2,\ 3, \dots, 8\}$.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \sqrt{2} & 1 & 1 & \sqrt{2} & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 1 & 0 & 1 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & 1 & \sqrt{2} & \sqrt{3} \\ \sqrt{2} & 1 & 0 & 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{3} & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{2} & \sqrt{3} & \sqrt{2} & 0 & 1 & \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 1 & \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 & 0 & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & \sqrt{2} & 1 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & 1 & 0 & 1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & \sqrt{2} & 1 & 1 & \sqrt{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Determine o volume desse poliedro.
Resp.: 1

Problema 61.
Uma matriz *A* é congruente com uma matriz *B* com a mesma ordem se existir uma matriz *P* não-singular tal que $A = PBP^T$.
a) Mostre que se *A* é congruente com *B* e *B* é congruente com *C* então *A* é congruente relativamente a *C*.
b) Mostre que se *A* é congruente com *B*, então *B* é congruente com *A*.

Problema 62.
Resolva o sistema de equações matriciais:

$$\begin{cases} MAX + NY = M \\ NAX + PY = N \end{cases}$$

Resp.:

Problema 63.
Nesse problema, encontraremos uma fórmula fechada para o n-ésimo termo da famosa seqüência de Fibonacci.
a) Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ M = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } D = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}.$$

Prove que $A = M \cdot D \cdot M^{-1}$.
b) Sendo F_n o *n-ésimo* termo da seqüência de Fibonacci, definimos:
$F_0 = 0$, $F_1 = 1$ e $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, para $n \geq 0$.
Prove que, para *n* inteiro positivo,

$$A^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$$

c) Observe:

$A^2 = A \cdot A = MDM^{-1} \cdot MDM^{-1} = MD \cdot I \cdot DM^{-1} = MD^2M^{-1}$.

$A^3 = A^2 \cdot A = MD^2M^{-1} \cdot MDM^{-1} = MD^2 \cdot I \cdot DM^{-1} = MD^3M^{-1}$.

$A^4 = A^3 \cdot A = MD^3M^{-1} \cdot MDM^{-1} = MD^3 \cdot I \cdot DM^{-1} = MD^4M^{-1}$.

Calculando A^n de modo análogo aos últimos exemplos, demonstre que:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

Problema 64.

(OBM-2006). Sejam A e B matrizes quadradas de mesma dimensão tais que, para todo inteiro positivo *k*, $(A+B)^k = A^k + B^k$. Prove que se *A* é invertível então *B* é a matriz nula.

Solução:

Temos, de $A^2 + B^2 = (A+B)^2 = (A+B) \cdot (A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$, e assim temos que: $AB + BA = 0$

Agora, temos:

$A^3 + B^3 = (A+B)^2 = (A+B) \cdot (A+B)^2 = (A+B) \cdot (A^2 + B^2) = A^3 + AB^2 + BA^2 + B^3$ e assim temos: $AB^2 + BA^2 = 0$. Como $AB = -BA$, então:

$0 = AB^2 + BA^2 = AB^2 - ABA = A \cdot (B^2 - BA) \Rightarrow \ A \cdot (B^2 - BA) = 0$

Como a matriz A é invertível, podemos multiplicar á esquerda por A^{-1}, de onde obtemos:

$B^2 - BA = 0$.

Temos, também

$A^3 + B^3 = (A+B)^2 = (A+B)^2 \cdot (A+B) = (A^2 + B^2) \cdot (A+B) = A^3 + A^2B + B^2A + B^3$ e assim temos: $A^2B + B^2A = 0$. Como $AB = -BA$, então:

$0 = A^2B + B^2A = -ABA + B^2A = (-AB + B^2)A \Rightarrow \ (-AB + B^2)A = 0$

Como a matriz *A* é invertível, podemos multiplicar á direita por A^{-1}, de onde obtemos:

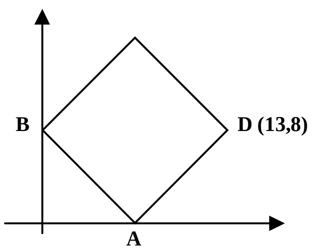
$-AB + B^2 = 0$.

assim obtemos: $AB = BA$.

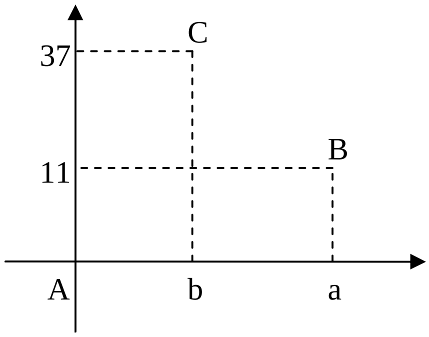
Como $AB + BA = 0$, então podemos escrever: $2AB = 0$, que multiplicando a esquerda por A^{-1}, obtemos $B = 0$

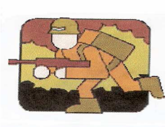
Problema 65.

Determine a área do quadrado abaixo sabendo que D = (13,8).



Problema 66.
(EUA)Calcule a.b sabendo que A(0, 0), B(a, 11), C(b, 37) são vértices de um triângulo eqüilátero como mostra a figura abaixo:





MATRIZES NAS ESCOLAS MILITARES

Nesta secção de escolas militares tem como objetivo principal resolver questões que já foi abordado em vários concursos militares. Mas também aprofundando os seus conhecimentos matemáticos e adquirindo cada vez um raciocínio apurado e uma certa dose de criatividade nas resoluções problemas.

Problema 67.
(AFA-2007). Assinale a alternativa INCORRETA

a) Se $C = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 9 & -6 \end{pmatrix}$, então C^2 é a matriz nula.

b) Se $A = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, então $A^2 = A$.

c) Dada uma matriz quadrada *T* não-nula, a operação $T - T^t$, em que T^t é a matriz transposta de *T*, tem como resultado uma matriz anti-simétrica.

d) A matriz $M = (m_{ij})_{3\times 3}$ tal que $m_{ij} = [i \cdot (j+1)]$, sendo $i \in \{1,\ 2,\ 3\}$ e $j \in \{1,\ 2,\ 3\}$, é uma matriz simétrica.

Problema 68.
(AFA-2006). Assinale as sentenças abaixo:

I. Seja a matriz $A = (a_{ij})_{3\times 3}$, definida por $a_{ij} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 2i \\ j \end{pmatrix} & \text{se } i = j \\ (i+2j) & \text{se } i \neq j \end{cases}$. O elemento da terceira linha e segunda coluna da matriz transposta de A é 8.

II. Seja a matriz $B = A - A^T$ (A^T é a transposta de A), onde A é a matriz quadrada de ordem *n*. Então, a diagonal principal de *B* é nula.

III. A matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & sen\theta \\ sen\theta & 1 \end{pmatrix}$ é inversível se $\theta \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi,\ k \in Z$.

IV. Se a matriz $M = \begin{pmatrix} z & 2^{x+2} & \log(2z-4) \\ 4^x & x & (z+1)! \\ \log y & y! & y \end{pmatrix}$ é simétrica, então o produto dos elementos de sua diagonal principal é igual a 36.

É (são) falsa(s) apenas:

a) I e III b) II e IV c) IV d) I e II

Problema 69.

(AFA-2003). Sejam m e n números reais com $m \neq n$ e as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Para que a matriz $mA + nB$ seja NÃO inversível é necessário que:

a) *m* e *n* sejam positivos. b) *m* e *n* sejam negativos.
c) $n + 7m = 0$. d) $n^2 = 7m^2$.

Problema 70.
(AFA -1998). Se os elementos da matriz $A_{3\times 4}$ são definidos por $a_{ij} = 2i - j$, então, o elemento b_{23} da matriz $B = 2^{-1} A \cdot A^t$ é:

a) 1 b) 7 c) 10 d) 13

Problema 71.
(AFA-2001). As matrizes *A*, *B* e *C* são do tipo $m \times 3$, $n \times p$ e $4 \times r$, respectivamente. Se a matriz transposta de (*ABC*) é do tipo 5×4, então:

a) $m = p$ b) $mp = nr$ c) $n + p = m + r$ d) $r = n$

Problema 72.

(EFOMM-2004). Seja *A*, a matriz inversa da matriz $B = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 1/7 & 1 \end{pmatrix}$. Determine a soma dos elementos da diagonal principal da matriz *A*.

a) 9/4 b) 4 c) 4/9 d) 5/9 e) – 1/9

Problema 73.

(EEAR-2000). Sejam $A = (a_{ij})$ uma matriz real quadrada de ordem 2 e I_2 a matriz identidade também de ordem 2. Se "r_1" e "r_2" são as raízes da equação $det\ (A - r.\ I_2) = n.r$, onde n é um número inteiro positivo, podemos afirmar que

a) $r_1 + r_2 = a_{11} + a_{22}$
b) $r_1 + r_2 = n\,(a_{11} + a_{22})$
c) $r_1\ .\ r_2 = det\ A$
d) $r_1\ .\ r_2 = -n\ .\ det\ A$

Problema 74.
(AFA-1995). Dadas as matrizes: $A = (a_{ij})_{8\times 3}$ e $B = (b_{ij})_{3\times 7}$, onde $a_{ij} = 2i - j$ e $b_{ij} = i \cdot j$, o elemento c_{56} da matriz $C = (c_{ij}) = A \cdot B$ é:
a) 74 b) 162 c) 128 e) 276
Resp.: item c

Problema 75.

(EEAR-2002). O elemento x_{32} da matriz solução da equação matricial $3X + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 4 \\ 2 & 16 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$ é:

a) 0 b) – 2 c) 3 d) 1

Problema 76.

(EEAR-2002). O par (x, y), solução da equação matricial:

$$\begin{pmatrix} x & -4 \\ x^2 & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & 2 \\ y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 2x-4 \\ x^3 + y^2 & 8 \end{pmatrix} \text{ é:}$$

a) $(6, \pm\sqrt{3})$ b) $(\pm\sqrt{5}, -2)$ c) $\left(\pm\sqrt{\frac{1}{2}}, -5\right)$ d) $\left(-\frac{7}{3}, \frac{4}{5}\right)$

Problema 77.
(EEAR-2005). Se $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ x & y \end{bmatrix}$ é a matriz inversa de $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, então $x - y$ é:
a) 2 b) 1 c) – 1 d) 0

Problema 78.
(CPCAR-2006). Sabendo-se que a matriz quadrada *A* de ordem 2 é dada por $a_{ij} = \begin{cases} \dfrac{i+j}{2} \; se \; i = j \\ 2i - j \; se \; i \neq j \end{cases}$ e *B* é a transposta de *A*, determine a matriz *C*, sendo $B \cdot \left(AC^t\right)^{-1} = B^{-1} \cdot A^t$:

a) $\dfrac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 6 & -7 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{3}{2} & \dfrac{1}{2} \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} -\dfrac{7}{2} & \dfrac{3}{2} \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ d) I_2

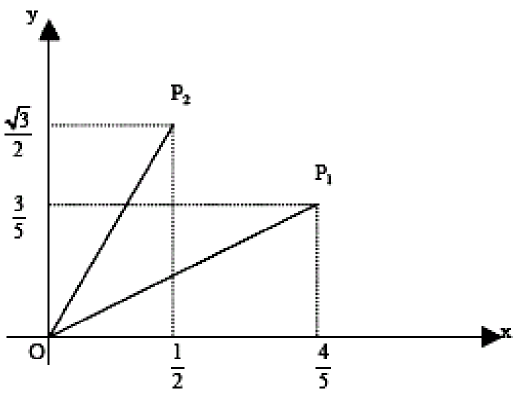
Problema 79.
(CPCAR-2003). Sejam as matrizes inversíveis $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Marque a alternativa que corresponde à matriz solução da equação $BAX = A$.

a) $\begin{bmatrix} \dfrac{1}{2} & -1 \\ -\dfrac{1}{4} & \dfrac{1}{2} \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} \dfrac{1}{2} & 1 \\ -\dfrac{1}{4} & \dfrac{1}{2} \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} -\dfrac{1}{2} & 1 \\ \dfrac{1}{4} & \dfrac{1}{2} \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{4} \\ -1 & \dfrac{1}{2} \end{bmatrix}$

Problema 80.
(CPCAR-2003). Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & K \\ K & 2 \end{pmatrix}$ e *P* a matriz nula de ordem 2. A soma dos valores de *K* para os quais existem uma infinidade de matrizes *M* de ordem 2 tais que $AM = P$ é:

a) – 2 b) – 1 c) 0 d) 1

Problema 81.
(ESPCEX – 2007)Na figura a seguir, são fornecidas as coordenadas cartesianas dos pontos $P_1 \; e \; P_2$. Denomina-se θ o ângulo P_1OP_2



Com base nessas informações pode – se afirmar que o valor de $\cos\theta$ é

$a)\,\dfrac{4\sqrt{3}-3}{10}$ $b)\,\dfrac{13}{10}$ $c)\,\dfrac{3\sqrt{3}-4}{10}$ $d)\,\dfrac{3}{10}$ $e)\,\dfrac{4+3\sqrt{3}}{10}$

RESP.: E

Problema 82.
(IME – RJ)Determine uma matriz não singular P que satisfaça à equação matricial
$P^{-1}A=\begin{bmatrix}6 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$, onde $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 5 & 4\end{bmatrix}$

Problema 83.
(ITA) Considere o quadrado ABCD, de diagonal AC definida pelos pontos (1,1) e (3,4). Determine as coordenadas dos demais vértices do quadrado.

Problema 84.
(RUMO AO ITA)Determine dois possíveis vértices A para o triangulo eqüilátero ABC cujo lado AB é definido pelos vértices: B=(2,3) , C = (-1,0).

Problema 85.
(ITA-80) Sejam A, B e C matrizes reais quadradas de ordem n e O_n a matriz nula, também de ordem n. Considere as seguintes afirmações:
1. AB = BA 2. Se AB = AC, então B = C 3. Se $A^2 = O_n$, então $A = O_n$
4. (AB)C = A(BC)
5. $(A – B)^2 = A^2 – 2AB + B^2$
A respeito destas afirmações, qual das alternativas a seguir é verdadeira?
a)Apenas a afirmação 1 é falsa.
b) Apenas a afirmação 4 é verdadeira.
c) A afirmação 5 é verdadeira.
d) A afirmações 2 e 3 são verdadeiras.
e) As afirmações 3 e 4 são verdadeiras.
RESP.: B

Problema 86.
(ITA-83) Seja a matriz A = $\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$, onde $a=2^{(1+\log_2 5)}$; $b=2^{\log_2 8}$; $c=\log_{\sqrt{3}} 81$ e $d=\log_{\sqrt{3}} 27$.
Uma matriz real quadrada B, de ordem 2, tal que AB é a matriz identidade de ordem 2 é:

a) $\begin{bmatrix}\log_{\sqrt{3}} 27 & 2\\ 2 & \log_{\sqrt{3}} 81\end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix}2 & -\dfrac{3}{2}\\ -\dfrac{3}{2} & \log_2 5\end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix}-\dfrac{3}{2} & 2\\ \sqrt{3} & -5\end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix}\log_2 5 & 3\log_{\sqrt{3}} 81\\ 5 & -2^{\log_2 81}\end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 2 \\ 2 & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$

RESP.: C

Problema 87.

(AFA – 1986)Uma figura geométrica tem 4 vértices: A_1, A_2, A_3, A_4. Forma-se a matriz A = (a_{ij}), onde $a_{ij} = \text{dist}(A_iA_j)$, $1 \leq i, j \leq 4$ e obtém-se:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Podemos afirmar, então, que tal figura é um:

a) quadrado b) losango c) trapézio d) tetraedro

RESP.: D

Problema 88.

(ITA-SP)Sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix}$. Calcule o elemento da terceira linha com a primeira coluna da matriz inversa.

Problema 89.

(IME)Considere uma matriz A, n x n, de coeficientes reais, e k um número real diferente de 1. Sabendo-se que $A^3 = k.A$. Prove que a matriz A + I é inversível, onde I é a matriz identidade n x n.

Problema 90.

(ITA-94) Seja A uma matriz real quadrada de ordem n e B = I – A, onde I denota a matriz identidade de ordem n. Supondo que A é inversível e idempotente (isto é $A^2 = A$) considere as afirmações:

1. B é idempotente 2. AB = BA 3. B é inversível
4. $A^2 + B^2 = I$ 5. AB é simétrica

Com respeito a estas afirmações temos:

a) Todas são verdadeiras
b) Apenas uma é verdadeira
c) Apenas duas são verdadeiras
d) Apenas três são verdadeiras
e) Apenas quatro são verdadeiras

Problema 91.

(ITA-94) Sejam A e P matrizes reais quadradas de ordem n tais que A é simétrica (isto é $A = A^t$) e P é ortogonal (isto é, $P.P^t = I = P^t.P$), P diferente da matriz identidade. Se $B = P^tAP$ então:
a) AB é simétrica b) BA é simétrica c) det A = det B
d) BA = AB e) B é ortogonal

Problema 92.
(ITA-95) Dizemos que duas matrizes nxn A e B são semelhantes se existe uma matriz nxn inversível P tal que $B = P^{-1}.A.P$. Se A e B são matrizes semelhantes quaisquer, então
a) B é sempre inversível
b) se A é simétrica, então B também é simétrica
c) B^2 é semelhante a A
d) se C é semelhante a A, então BC é semelhante a A^2
e) $\det(\lambda I - B) = \det(\lambda I - A)$, onde λ é um real qualquer

Problema 93.
(ITA-95) Sejam A e B matrizes reais 3 x 3. Se $tr(A)$ denota a soma dos elementos da diagonal principal de A, considere as afirmações:
[(I)] $tr(A^t) = tr(A)$.
[(II)] Se A é inversível, então $tr(A) \neq 0$.
[(III)] $tr(A + \lambda B) = tr(A) + \lambda tr(B)$, para todo $\lambda \in \Re$.
Temos que
a) todas as afirmações são verdadeiras.
b) todas as afirmações são falsas.
c) apenas a afirmação (I) é verdadeira.
d) apenas a afirmação (II) é falsa.
e) apenas a afirmação (III) é falsa.

Problema 94.
(ITA-77) Seja $X = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ uma matriz quadrada 2x2 onde m é um número inteiro qualquer.
Se $P = (a_{ij})$ é uma matriz definida por $P = X^n + X^{n-1} + X^{n-2} + \dots + X$, onde n é um número inteiro positivo ($n \geq 1$), então podemos afirmar que:
a) um elemento a_{ij} da matriz P é igual a $m.n.(n + 1)/2$
b) um elemento a_{ij} da matriz P é igual a $m.n.(n - 1)/2$
c) um elemento a_{ij} da matriz P é igual a $n.m.(m - 1)/2$
d) P é uma matriz cujos elementos são todos inteiros, se, e somente se, m é par.
e) nenhuma das respostas anteriores

Problema 95.
(IME – RJ)Determine uma matriz não singular P que satisfaça à equação matricial
$P^{-1}A = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, onde $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$

Problema 96.
(ITA-96) Seja $a \in \Re$, $a > 0$ e $a \neq 1$ e considere a matriz

$$A = \begin{vmatrix} \log_a(3a) & \log_{10}(3a)^2 \\ \log_a\left(\frac{1}{a}\right) & -\log_a(a) \\ \log_a 1 & \log_{10} 1 \end{vmatrix}$$

Para que a característica de A seja máxima, o valor de a deve ser tal que:
a) $a \neq 10$ e $a \neq 1/3$ b) $a \neq \sqrt{10}$ e $a \neq 1/3$
c) $a \neq 5$ e $a \neq 10$ d) $a \neq 2$ e $a \neq \sqrt{3}$
e) $a \neq 2$ e $a \neq \sqrt{10}$

Problema 97.

(ITA-96) Considere A e B matrizes reais 2x2, arbitrárias. Das afirmações abaixo assinale a verdadeira. No seu caderno de respostas, justifique a afirmação verdadeira e dê exemplo para mostrar que cada uma das demais é falsa.

a) Se A é não nula então A possui inversa
b) $(AB)^t = A^tB^t$
c) det (AB) = det (BA)
d) det A^2 = 2det A
e) $(A + B)(A – B) = A^2 – B^2$

Problema 98.
(ITA-96) Seja $a \in \Re$ e considere as matrizes reais 2x2, $A = \begin{bmatrix} 3^a & -1 \\ -1 & 3^a \end{bmatrix}$ e

$$B = \begin{bmatrix} 7^{a-1} & 8^{a-3} \\ 7 & 2^{-3} \end{bmatrix}.$$

O produto AB será inversível se e somente se:
a) $a^2 – 5a + 6 \neq 0$ b) $a^2 – 5a \neq 0$ c) $a^2 – 3a \neq 0$
d) $a^2 – 2a + 1 \neq 0$ e) $a^2 – 2a \neq 0$

Problema 99.
(ITA-97) Considere as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sejam λ_0, λ_1 e λ_2 as raízes da equação det $(A – \lambda I_3) = 0$ com $\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2$. Considere as afirmações

(I) $B = A - \lambda_0 I_3$
(II) $B = (A - \lambda_1 I_3)A$
(III) $B = A(A - \lambda_2 I_3)$

Então
a) todas as afirmações são falsas.

b) todas as afirmações são verdadeiras.
c) apenas (I) é falsa.
d) apenas (II) é falsa.
e) apenas (III) é verdadeira.

Problema 100.
(ITA-98) Sejam as matrizes reais de ordem 2,

$$A = \begin{bmatrix} 2+a & a \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a & 2+a \end{bmatrix}$$

Então a soma dos elementos da diagonal principal de $(AB)^{-1}$ é igual a:
a) $a + 1$ b) $4(a + 1)$ c) $(5 + 2a + a^2)/4$
d) $(1 + 2a + a^2)/4$ e) $(5 + 2a + a^2)/2$

Problema 101.
(ITA-99) Sejam x, y e z números reais com $y \neq 0$. Considere a matriz inversível

$$A = \begin{bmatrix} x & 1 & 1 \\ y & 0 & 0 \\ z & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Então:

a) A soma dos termos da primeira linha de A^{-1} é igual a $x + 1$
b) A soma dos termos da primeira linha de A^{-1} é igual a 0
c) A soma dos termos da primeira coluna de A^{-1} é igual a 1
d) O produto dos termos da segunda linha de A^{-1} é igual a y
e) O produto dos termos da terceira coluna de A^{-1} é igual a 1

Problema 102.
(Escola Naval). Considere as matrizes:
$A = (a_{ij})_{3\times 4}$, definida por $a_{ij} = i - j$.
$B = (b_{ij})_{4\times 4}$, definida por $b_{ij} = 2^{i-j}$
$C = (c_{ij})$, tal que $C = AB$.
Qual o elemento c_{32}?
a) – 1 b) 0 c) 3 d) – 2 e) 2
Resp.: item d

Problema 103.

(ITA – 87) Considere P a matriz inversa da matriz M, onde $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{7} & 1 \end{pmatrix}$ A soma dos elementos da diagonal principal da matriz P é:

a) $\frac{9}{4}$ b) $\frac{4}{9}$ c) 4 d) $\frac{5}{9}$ e)5

resp.: C

Problema 104.

(ITA – 93)Sendo:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ Então o elemento da terceira linha e primeira coluna, de sua inversa, será igual a:

a)5/8 b)9/11 c)6/11 d)–2/13 e)1/13

resp.: B

Problema 105.

(ITA – 93) Seja A a matriz 3 x 3 dada por $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Sabendo – se que B é a inversa de A, então a soma dos elementos de B vale:

a)1 b)2 c)5 d)0 e)– 2

resp.: B

Problema 106.

(ITA) Sejam M e B matrizes quadradas de ordem n tais que $M - M^{-1} = B$. Sabendo que $M^t = M^{-1}$ podemos afirmar que:

a) B^2 é a matriz nula. b) $B^2 = -2I$. c) B é simétrica.

d) B é anti-simétrica e) n.d.a.

resp.: D

Problema 107.

(ITA) Sejam m e n números reais com $m \neq n$ e as matrizes:

A = $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$, B = $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Para que a matriz $mA + nB$ seja não inversível é necessário que:

a) m e n sejam positivos

b) m e n sejam negativos

c) m e n tenham sinais contrários

d) $n^2 = 7m^2$

e) n.d.a

resp.: C

Problema 108.

(ITA). Uma matriz A $n \times n$ é nilpotente se $A^n = O$ para algum inteiro positivo *n*. Dê exemplo de uma matriz não-nula 2×2 nilpotente.

Resp.: $A = \begin{pmatrix} 0 & 2007 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Problema 109.

(ITA). Uma matriz real $n \times n$ A que satisfaz as relações $AA^T = A^T A = I$ é chamada ortogonal.

a) Dê exemplo de uma matriz ortogonal 2×2, distinta da matriz identidade.

b) Encontre a matriz ortogonal geral 2×2.

c) Mostre que o produto de duas matrizes ortogonais é uma matriz ortogonal.

d) Mostre que a inversa de uma matriz ortogonal é uma matriz ortogonal

Problema 110.

(ITA). Construa matrizes *A* e *B*, 2×2, sem coeficientes nulos, e tais que $AB = O$.

Resp.: $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} d & e \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$**,** observe que $A \cdot B = O_2$

Problema 111.

(IME-86). Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Encontre todas as matrizes *B*, 2×2, que comutam com *A*.

b) Calcule A^{-1}.

c) Mostre que $A^2 = 2A - I$, onde $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

d) Encontre a formula para A^n em função de *A* e *I*, e calcule A^{100}.

Resp.:

a) $B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix}$; b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; c) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ e assim, $A^2 = 2A - I$; d) $A^n = n \cdot A - (n-1) \cdot I$.

Assim, temos: $A^{100} = 100 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - 99 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -100 & 1 \end{pmatrix}$.

Problema 112.

(IME-81). Determine a matriz H tal que $HA = B$ onde $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Resp.: $H = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Problema 113.
(ITA). Mostre que se a terceira linha de uma matriz $m \times n$ A é quatro vezes a primeira linha, então a terceira linha de AB é também igual a quatro vezes a primeira linha, sendo B uma matriz $n \times p$.

Problema 114.
(EFOMM). Seja $f : R \to M_2$ (M_2: conjunto das matrizes quadradas de ordem 2) definida por:

$$f : t \to \begin{pmatrix} t^2 - 1 & t \\ 1 & 2t \end{pmatrix}$$

Então:
a) $f(t) = f(t-1)$ para todo $t \in R$.
b) $f(m \cdot t) = m \cdot f(t)$ para $m \in R$ e $t \in R$.
c) $f(t)$ nunca é a matriz nula.
d) $f(t+s) = f(t) + f(s)$, com $t \in R$ e $s \in R$.
e) existe $t \in R$ tal que $f(t)$ é a matriz identidade.

Resp.: item c

Problema 115.
(AFA). Define-se distância entre duas matrizes $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ quadradas e de mesma ordem n pela formula:
$d(A, B) = \max \left| a_{ij} - b_{ij} \right|$, onde $i, j = 1, 2, 3, ..., n$.
Assim, a distância entre as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 13 & 8 \end{pmatrix}$ é:

a) – 5 b) – 3 c) 0 d) 3 e) 5

Resp.: item e