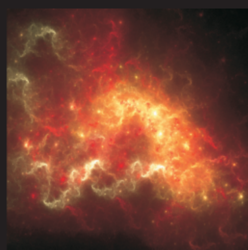
Coleção **olimpo**

IME ITA







G 01

Potenciação
Potência de Expoente Inteiro

01. Se $\frac{m}{n}$ é a fração irredutível equivalente à soma:

$S=(-4)^{-2}+(-5)^{-3}+(-2)^{-1}+(-1)^{-4}+(-5^{-2})$

O valor de $m+n$ é igual a:

a) 3021 b) 3023 c) 3025
d) 3027 e) 3029

02. O valor da expressão:

$$\frac{1}{a^{-n}+1}+\frac{1}{a^{-n+1}+1}+\cdots+\frac{1}{a^{-1}+1}+\frac{1}{a^{0}+1}+\frac{1}{a^{1}+1}+\cdots+\frac{1}{a^{n-1}+1}+\frac{1}{a^{n}+1}$$

Para $a=2005$ e $n=2006$ é igual a:

a) 2005^{2006} b) 2007 c) 2005
d) 2006 e) $2007\frac{1}{2}$

03. Definamos $a\otimes b$ como a^b. O valor de $\frac{2\otimes(2\otimes(2\otimes 2))}{((2\otimes 2)\otimes 2)\otimes 2}$ é igual a:

a) $\frac{1}{256}$ b) $\frac{1}{4}$ c) 1
d) 4 e) 256

04. Seja $\underline{\otimes}$ uma operação associativa definida por $m\otimes n=(-1)^n\cdot m+(-1)^m\cdot n$. O valor de $26\otimes 1\otimes 17\otimes 88$ é igual a:

a) 93 b) 94 c) 95
d) 96 e) 97

05. Um inteiro é chamado formidável se ele pode ser escrito como uma soma de potências distintas de 4 e é dito bem sucedido se ele pode ser escrito como uma soma de duas potências distintas de 6. O número de maneiras de escrevemos 2005 como a soma de um número formidável com um número bem sucedido é:

a) 0 b) 1 c) 2
d) 3 e) mais de 3

06. Para os inteiros a e b definimos $a*b=a^b+b^a$. Se $2*x=100$, a soma dos algarismos de $(4x)^4$ é igual a:

a) 20 b) 25 c) 30
d) 35 e) 40

Leis do Expoente

07. Sabe-se que o penúltimo algarismo da representação decimal de n^2, onde n é um inteiro positivo, é 7. O seu último algarismo é:

a) 1 b) 4 c) 5
d) 6 e) 9

08. Se $2^{2008}-2^{2007}-2^{2006}+2^{2005}=k\cdot 2^{2005}$, o valor de k é igual a:

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

09. O 73º *algarismo* da representação decimal do número $(\underbrace{111...111}_{112\,\text{uns}})^2$ é igual a:

a) 0 b) 1 c) 2
d) 7 e) 8

10. A seqüência $(1,4,9,16,25,36,...)$ é a seqüência dos quadrados perfeitos, isto é, a seqüência dos números inteiros que são quadrados de números inteiros, a saber, $(1^2,2^2,3^2,4^2,5^2,6^2,...)$. Com base nisto, qual dos números abaixo é um quadrado perveito?

a) $4^4\cdot 5^5\cdot 6^6$ b) $4^4\cdot 5^6\cdot 6^5$ c) $4^5\cdot 5^4\cdot 6^6$
d) $4^6\cdot 5^4\cdot 6^5$ e) $4^6\cdot 5^5\cdot 6^4$

11. Sabendo que um Gugol é o numero de 1 seguido de 100 zeros, podemos afirmar que um Gugol elevado a um Gugol consiste do número 1 seguido de um número de zeros igual a:

a) 100 Gugois b) 102 Gugois c) Um Gugois
d) 110 Gugois e) Um Gugol ao quadrado

12. O número de cubos perfeito compreendidos entre 9^6 e 6^9 é igual a:

a) 134 b) 135 c) 136
d) 137 e) 138

13. O resto da divisão da soma dos algarismos de $100^{19} - 10019$ por 83 é igual a:
a) 0 b) 1 c) 2
d) 3 e) 4

14. Ao multiplicarmos os números $123\,456\,789$ e $999\,999\,999$, o número de algarismos iguais a 9 no resultado final é igual a:
a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 17

15. A soma dos algarismos do número $\underbrace{999...99}_{98\text{noves}} \times \underbrace{888...88}_{98\text{oitos}}$ é igual a:
a) 828 b) 882 c) 822 d) 888 e) 282

16. Seja $m = 777\cdots777$ o número que consiste de 99 algarismos igual a 7 e $n = 999\cdots999$ o número que consiste de 77 algarismos iguais a 9. O número de dígitos distintos que aparecem no produto $m \cdot n$ é igual a:
a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

17. Seja o produto do número $3.659.893.456.789.325.678$ pelo número $342.973.489.379.256$. O número de algarismos de p é igual a:
a) 36 b) 35 c) 34 d) 33 e) 32

18. Se $a = 3.643.712.546.890.623.517$ e $b = 179.563.128$, o número de algarismos do produto ab será:
a) 24 b) 25 c) 26 d) 27 e) 28

19. A representação decimal do inteiro positivo X possui 11 algarismos e o inteiro positivo Y possui k algarismos. Sabendo que o produto XY é um número com 24 algarismos, o valor máximo possível de k é igual a:
a) 10 b) 12 c) 14 d) 16 e) 18

20. A fração $F = \dfrac{1+5^{k+1}\cdot 2^k}{1+5^k \cdot 2^{k+1}}$ pode ser simplificada por:
a) 2 b) 3 c) 5 d) 7 e) 11

21. Simplificando-se a expressão $\dfrac{(6\times 12\times 18\times\cdots\times 300)}{(2\times 6\times 10\times 14\times\cdots\times 98)\times(4\times 8\times 12\times 16\times\cdots\times 100)}$

obtém-se:

a) 3^{50} b) $\dfrac{3}{2}$ c) $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{25}$ d) $\dfrac{3}{4}$ e) 2^{25}

22. Sejam a e b respectivamente a soma dos algarismos da representação decimal dos números $M = 2^{2005} \cdot 5^{2007}$ e $N = 2^{2001} \cdot 5^{2005}$. O valor de $a+b$ é igual a:

a) 20 b) 22 c) 24 d) 26 e) 28

23. Qual dos números abaixo é o maior?

a) 2^{514} b) 4^{258} c) 8^{171}
d) 16^{128} e) 32^{103}

24. Colocando os números $a = 3^{60}$, $b = 4^{48}$, $c = 7^{36}$, $d = 18^{24}$ e $e = 300^{12}$ em ordem crescente obtemos:

a) $a < b < c < d < e$ b) $a < b < e < d < c$
c) $b < a < e < c < d$ d) $a < b < d < e < c$
e) $b < a < e < d < c$

25. O número 31^{31} é um inteiro que quando escrito na notação decimal possui 47 algarismos. Se a soma destes 47 algarismos é S e a soma dos algarismos de S é T então a soma dos algarismos de T é igual a:

a) 4 b) 5 c) 6
d) 7 e) 8

26. Seja $Q(n)$ a soma dos algarismos da representação decimal do número n. O valor de $Q\left(Q\left(Q\left(2005^{2005}\right)\right)\right)$ é igual a:

a) 4 b) 5 c) 6
d) 7 e) 8

27. Seja $(a_1, a_2, ..., a_{100})$ uma seqüência tal que $a_{100} = 100$ e $a_n = n^{a_{n+1}}$ para $2 \le n \le 99s$. O algarismo das unidades de a_2 é igual a:

a) 1 b) 2 c) 4 d) 6 e) 8

28. A seqüência de inteiros positivos $(1, 5, 6, 25, 26, 30, 31, ...)$ é formada por potências de 5 ou somas de potências de 5 (com expoentes naturais distintos) escritas em ordem crescente. Se N é o elemento desta seqüência escrito na 2005^{a}-ésima posição então $\left\lfloor \frac{N}{1000} \right\rfloor$, onde como usual $\lfloor x \rfloor$ é o maior inteiro que não supera x, é igual a:

a) 770 b) 772 c) 774
d) 776 e) 778

29. No início do mês de Agosto uma loja apresenta 10 produtos distintos à venda com o mesmo preço P. A cada dia subseqüente, o preço de cada produto é duplicado ou triplicado. Se no início de Setembro, do mesmo ano, todos os preços estiverem diferentes, o valor mínimo da razão entre os valores máximo e mínimo de P é igual a:
a) 24 b) 25 c) 26
d) 27 e) 28

30. Na seqüência (a_n) de inteiros ímpares $(1,3,3,3,5,5,5,5,5,...)$ cada inteiro positivo ímpar k aparece k vezes. Sabendo que existem inteiros b, c e d tais que para todos os inteiros positivos n, $a_n = b\left\lfloor \sqrt{n+c} \right\rfloor + d$ onde $\lfloor x \rfloor$ é o maior inteiro que não supera x, a soma $b+c+d$ é igual a:
a) 0 b) 1 c) 2
d) 3 e) 4

31. O maior valor possível de k para o qual 3^{11} pode ser expresso como a soma de k inteiros positivos consecutivos é igual a:
a) 480 b) 482 c) 484 d) 486 e) 488

32. Sabendo que 2^{2004} é um número com 604 algarismos cujo primeiro algarismo, da esquerda para a direita, é igual a 1, quantos números do conjunto $S = \{2^0, 2^1, 2^2, ..., 2^{2003}\}$, possuem 4 como seu primeiro algarismo?
a) 194 b) 195 c) 196 d) 197 e) 198

33. O número de potências de 2, menores ou iguais a 2005^{2005} que possuem primeiro algarismo igual a 1 é igual a:
a) 6610 b) 6620 c) 6630
d) 6640 e) 6650

34. O número de potências de 2 que terminam com 2002 é igual a:
a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) infinitas

35. Um subconjunto de inteiros é chamado livre de duplos se não existe um inteiro x para os quais tanto x como $2x$ pertencem a tal subconjunto. O maior tamanho (isto é, o número de elementos) de um subconjunto. O maior tamanho (isto é, o número de elementos) de um subconjunto livre de duplos do conjunto dos primeiros 2005 inteiros positivos é igual a:
a) 1330 b) 1332 c) 1334
d) 1336 e) 1338

36. Uma máquina do tempo é controlada por um conjunto de chaves do tipo "liga-desliga" numeradas de 1 a 10 (da esquerda para a direita) e dispostas lado a lado. A n-ésima chave posicionada em "liga" viaja 2^{n-1} anos para o futuro se n é ímpar e 2^{n-1} anos para o passado se n é par e se uma chave está na posição "desliga" ela não produz nenhum efeito. Sabendo que o efeito provocado por várias chaves posicionadas em "liga" é igual à soma dos seus efeitos individuais, se convencionarmos liga=1 e desliga=0 então a disposição que as 10 chaves devem apresentar para viajarmos 200 anos para o passado é:

a) 0001001011 b) 0001001000 c) 0010001100
d) 0001100010 e) 0010001011

37. O número de valores distintos da seqüência $\left\lfloor \frac{k^2}{2004} \right\rfloor$, $k = 1, 2, \ldots, 2003$ onde, como usual, $\lfloor x \rfloor$ é o maior inteiro que não supera x é igual a:

a) 1500 b) 1501 c) 1502
d) 1503 e) 1504

38. Sabendo que a soma $\left\lfloor \frac{1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2^2}{3} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{2^{1000}}{3} \right\rfloor$ onde, como usual, $\lfloor x \rfloor$ é o maior inteiro que não supera x, pode ser colocada sob a forma $\frac{2^a - b}{3}$, o valor de $a + b$ é igual a:

a) 2501 b) 2503 c) 2505
d) 2507 e) 2509

39. O número de inteiros positivos a para os quais existem inteiros não negativos $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{2001}$ satisfazendo a $a^{x_0} = \sum_{k=1}^{2001} a^{x_k}$ é igual a:

a) 0 b) 1 c) 12
d) 16 e) 20

40. O conjunto $\{1, 2, 4, 5, 7, 9, 10, 12, 14, 16, \ldots\}$ foi formado da seguinte maneira: colocamos o primeiro número ímpar, a saber, 1 a seguir colocamos os dois números pares seguintes, isto é 2 e 4 depois foram colocados os três números seguintes ao último número par colocado 5, 7 e 9 a seguir, os quatro números pares seguintes ao último número ímpar colocado e assim sucessivamente. O 2005^{o} número par pertencente a este conjunto é igual a:

a) 7966 b) 7968 c) 7970
d) 7972 e) 7974

41. Numa sala, 2005 cadeiras numeradas consecutivamente de 1 a 2005 estão dispostas em círculo. Em cada cadeira está sentado um estudante. Estes resolvem então começar o seguinte jogo: o estudante sentado na cadeira de número 1 diz "sim" e permanece no jogo. O estudante de número 2 diz "não" e deixa o jogo, e assim sucessivamente, isto é, cada estudante contradizendo o anterior. Aquele que diz "sim" permanece no jogo e aquele que diz "não" sai do jogo. O jogo termine quando resta apenas um estudante. O número da cadeira na qual este estudante está sentado é:
a) 1961 b) 1963 c) 1965
d) 1967 e) 1969

42. O número máximo de elementos de um subconjunto S de $\{0,1,2,3,...,2005\}$ de modo que não exista um par de elementos de S que difiram de um quadrado perfeito é igual a:
a) 400 b) 401 c) 802
d) 1200 e) 1203

Radiciação - Leis das Raízes

43. A raiz nona de $9^{\left(9^9\right)}$ é igual a:
a) 9^9 b) $9^{\left(9^9-1\right)}$ c) 9^{8^9}
d) $9^{\left(9^8\right)}$ e) 3^9

44. Assinale o menor dos números:
a) $\sqrt[30]{30}$ b) $\sqrt[6]{2}$ c) $\sqrt[10]{3}$
d) $\sqrt[12]{4}$ e) $\sqrt[15]{5}$

Potência de Expoente Racional

45. Assinale dentre os números abaixo aquele que NÃO é racional:
a) -2005 b) $8^{2/3}$ c) $\sqrt{0,49}$
d) $100^{0,5}$ e) $1000^{0,1}$

46. Se $\sum_{k=1}^{8}\left(\sqrt{a_k}-\sqrt{a_k-1}\right)=2$ então a_k é igual a:
a) k^2 b) $k^2\cdot(k+1)^2$ c) $4\left(k^2+k\right)$
d) $4k^2$ e) $(2k+1)^2$

47. Qual o valor da expressão : $\left(\dfrac{1+2+3+...+50}{5+10+15+...+250}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\sqrt[3]{2\sqrt{1,25}}\right)^{-1}$

a) 1 b) $\sqrt{5}$ c) $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

d) $\dfrac{\sqrt[3]{5}}{5}$ e) $\sqrt[3]{5}$

48. A notação $\lfloor x \rfloor$ significa o maior inteiro não superior a X. Por exemplo, $\lfloor 3,5 \rfloor = 3$ e $\lfloor 5 \rfloor = 5$. O número de inteiros positivos X para os quais $\left\lfloor x^{\frac{1}{2}} \right\rfloor + \left\lfloor x^{\frac{1}{3}} \right\rfloor = 10$ é igual a:

a) 11 b) 12 c) 13
d) 14 e) 15

49. A notação $\lfloor x \rfloor$ significa o maior inteiro não superior a x. Por exemplo, $\lfloor 3,5 \rfloor = 3$ e $\lfloor 5 \rfloor = 5$. O número de inteiros positivos x compreendidos entre 0 e 500 para os quais $x - \left\lfloor x^{\frac{1}{2}} \right\rfloor^2 = 10$ é igual a:

a) 17 b) 18 c) 19
d) 20 e) 21

50. Quantos zeros consecutivos aparecem após a vírgula e antes do primeiro algarismo não nulo da expansão decimal de $\sqrt{2^{2004}+1}$:

a) 301 b) 302 c) 303
d) 304 e) 305

51. O maior inteiro que não excede a $\sqrt{n^2 - 10n + 29}$ para $n = 20062006$ é igual a:

a) 20062001
b) 20062002
c) 20062003
d) 20062004
e) 20062005

G 02

Produtos Notáveis

01. Considere as afirmativas:

1. $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=2\left(a^2+b^2+c^2\right)-2(ab+bc+ac)$.
2. $(a+b+c)^3-\left(a^3+b^3+c^3\right)=3(a+b)(b+c)(c+a)$.
3. $\frac{1}{2}(a+b+c)\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]=a^3+b^3+c^3-3abc$

a) Se somente as afirmativas (1) e (2) forem verdadeiras.
b) Se somente as afirmativas (1) e (3) forem verdadeiras.
c) Se somente as afirmativas (2) e (3) forem verdadeiras.
d) Se todas as afirmativas forem verdadeiras.
e) Se todas as afirmativas forem falsas.

02. A expressão $(a+b+c)^5-(a+b-c)^5-(b+c-a)^5-(c+a-b)^5$ é igual a:

a) $320abc\left(a^2+b^2+c^2\right)$.
b) $160abc\left(a^2+b^2+c^2\right)$.
c) $80abc\left(a^2+b^2+c^2\right)$.
d) $40abc\left(a^2+b^2+c^2\right)$.
e) $20abc\left(a^2+b^2+c^2\right)$.

03. A raiz quadrada de $\left(10^{20}+1\right)^2-10^{40}$ é igual a:

a) 1. b) 2. c) $1+10^{10}\sqrt{2}$.
d) $\left(10^{10}+1\right)\sqrt{2}$. e) $\sqrt{2\cdot 10^{20}+1}$.

04. Se $a^2=a+2$ então, a^3 é igual a:

a) $a+4$. b) $2a+8$. c) $3a+2$.
d) $4a+8$. e) $27a+8$.

05. Se $x^2-x-1=0$ então x^3-2x+1 é igual a:

a) $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. b) 0. c) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
d) 2. e) 3.

06. Se $p+q=n$ e $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=m$, onde p e q são ambos positivos então $(p-q)^2$ é igual a:

a) n^2. b) n^2-m. c) $\frac{n^2-m}{n}$.

d) $\frac{mn^2-4n}{m}$. e) n^2-4mn.

07. A expressão $\frac{\left(x^3+y^3+z^3\right)^2-\left(x^3-y^3-z^3\right)^2}{y^3+z^3}$, equivalente a:

a) $4x^3$ b) $4yx^3$ c) $4zx^3$

d) $4yzx^3$ e) $4xyz$

08. O valor de $(1999998)\cdot(1999998)-(1999996)\cdot(2000000)$ é igual a:

a) 104. b) 24. c) 14.
d) 10. e) 4.

09. Se $a=\underbrace{100...001}_{111\text{ zeros}}$ o número de zeros na representação decimal de a^2 é:

a) 111. b) 112. c) 22.
d) 222. e) 12321.

10. Se x é um número real positivo e $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=7$ então $x^3+\frac{1}{x^3}$ é igual a:

a) $4\sqrt{7}$. b) $7\sqrt{7}$. c) $5\sqrt{7}$.
d) $6\sqrt{7}$. e) $10\sqrt{7}$.

11. Sabendo que $\left(r+\frac{1}{r}\right)^2=10$, o valor de $r^4+\frac{1}{r^4}$ é igual a:

a) 40. b) 42. c) 60.
d) 62. e) 100.

12. Os valores reais de a e b para os quais $\left(2+\sqrt{3}\right)^3+\left(2-\sqrt{3}\right)^3=a+b\sqrt{3}$ são tais que $a+b$ é igual a:

a) 50. b) 52. c) 54.
d) 56. e) 58.

13. O valor de $1+2(1+2(1+2(1+2(1+2(1+2(1+2(1+2(1+2(1+2(1+2)))...))$.

a) $2^{10}+1$. b) $2^{11}-1$. c) $2^{11}+1$.
d) $2^{12}-1$. e) $2^{12}+1$.

14. Se $a_k=\left(2k+1\right)^2$, para $k=1,2,...8$ o valor de $\sum_{k=1}^{8}\left(\sqrt{a_k}-\sqrt{a_k-1}\right)$ é:

a) $2-\sqrt{2}$. b) $2\sqrt{2}$. c) 2 .
d) $2\sqrt{2}-1$. e) 1 .

15. Dados dois números reais tais que sua *soma* seja *menor* que o seu *produto*, o valor inteiro *mínimo* da soma destes números é igual a:

a) 3 . b) 4 . c) 5 .
d) 6 . e) 8 .

16. Simplificando $\sqrt{1+\left(x\sqrt{1+y^2}+y\sqrt{1+x^2}\right)^2}-\sqrt{1+\left(x\sqrt{1+y^2}-y\sqrt{1+x^2}\right)^2}$ obtemos:

a) xy . b) $2xy$.
c) x^2y^2 . d) x^2+y^2 . e) $1+x^2+y^2$.

17. A parte inteira de um número é o maior inteiro que não excede este número enquanto que a parte fracionária de um número é a diferença entre este e a sua parte fracionária. Por exemplo, a parte inteira de $\frac{5}{3}$ é 1 e a sua parte fracionária é $\frac{2}{3}$. Supondo que o produto das partes inteiras de dois números racionais positivos sua 5 e o produto de suas partes fracionárias seja $\frac{1}{4}$ seu produto pode ser:

a) $\frac{5}{4}$. b) $\frac{21}{4}$. c) $\frac{13}{2}$.
d) $\frac{33}{4}$. e) $\frac{23}{3}$.

18. Sejam $a=\underbrace{333...333}_{2005\,\text{algarismos}}$ e $b=\underbrace{666...666}_{2005\,\text{algarismos}}$. O 2006 - ésimo algarismo, contado da direita para a esquerda, do produto ab é:

a) 0 . b) 1 . c) 2 .
d) 7 . e) 8 .

19. Sendo $N = \underbrace{999...999}_{k9\text{`}s}$ o número de algarismos de N^3 que são distintos de 9 é igual a:

a) 0.
b) 2.
c) 3.
d) k.
e) $k+1$.

20. A *Identidade de Lagrange*:

$$\left(a^2+\lambda b^2+\mu c^2+\lambda\mu d^2\right)\left(p^2+\lambda r^2+\mu s^2+\lambda\mu q^2\right) \equiv$$
$$\equiv \left(-ap+\mu cs+\lambda\mu dq+\lambda br\right)^2+\mu\left(\lambda dr-\lambda bq+as+cp\right)^2+$$
$$+\lambda\mu\left(bs+dp-cr+aq\right)^2+\lambda\left(\mu cq+ar+bp-\mu ds\right)^2$$

A qual para $\lambda = \mu = 1$, transforma-se na fórmula de *Euler* que é generalização da fórmula de Fibonacci que afirma:

$$\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)\left(p^2+r^2+s^2+q^2\right) \equiv$$
$$\equiv \left(-ap+cs+dq+br\right)^2+\left(dr-bq+as+cp\right)^2+$$
$$+\left(bs+dp-cr+aq\right)^2+\left(cq+ar+bp-ds\right)^2$$

Demonstre a *Identidade de Lagrange* e a seguir, deduza que o número máximo de identidades distintas q.ue podem ser obtidas a partir da fórmula de *Euler* é igual a:

a) 12.
b) 16.
c) 24.
d) 36.
e) 48.

21. Dados os números:

$$a = r\,,$$
$$b = s\left(rs+2\right),$$
$$c = \left(s+1\right)\left(rs+r+2\right),$$

Podemos afirmar que:

a) Seus produtos dois a dois, são quadrados perfeitos.
b) Seus produtos dois a dois, aumentados de uma unidade, são quadrados perfeitos.
c) Seus produtos dois a dois, aumentados de duas unidades, são quadrados perfeitos.
d) Seus produtos dois a dois, aumentados de três unidades, são quadrados perfeitos.
e) Seus produtos dois a dois, aumentados de quatro unidades, são quadrados perfeitos.

22. Seja N um inteiro positivo com $2n$ algarismos tais que os seus $n-1$ primeiros algarismos da esquerda sejam $1`s$, os $n$ algarismos seguintes sejam $2`s$ e o último algarismo da direita seja um 4. Nestas condições, N é igual a:

a) $22...22\times 66...62$. b) $11.11\times 22...24$.
c) $33...33\times 44...42$. d) $33...34\times 33...36$.
e) $33...33\times 33...38$.

23. Seja N um inteiro positivo cujo quadrado consiste de 100 algarismos iguais a 1 seguidos de 100 algarismos iguais a 2 e dois outros algarismos desconhecidos, isto é, $N^2=\underbrace{111...111}_{100\,1's}\underbrace{222...222}_{100\,2's}AB$. A soma dos algarismos de N é igual a:

a) 300 b) 302 c) 304.
d) 306 e) 308.

24. No sistema de numeração decimal, o inteiro a consiste de 2005 *oitos* e o número b consiste de 2005 *cincos*. A soma dos dígitos de $9ab$ é igual a:

a) 18005 b) 18015 c) 18025
d) 18035 e) 18045.

25. No sistema de numeração decimal, o inteiro A se escreve com 666 *três* enquanto que o inteiro B se escreve com 666 *seis*. A *soma dos algarismo* do número $AB+1$ é igual a:

a) 5987. b) 5989. c) 5991.
d) 5993. e) 5995.

26. Entre os dígitos 4 e 9 são inseridos vários *quatros* e após eles o mesmo número de *oitos* são também inseridos. Sobre o número resultante podemos afirmar que:

a) pode ser um número primo;
b) algumas vezes é um quadrado perfeito outras vezes não;
c) é sempre um quadrado perfeito;
d) não pode ser um cubo perfeito;
e) depende da quantidade de $4's$ e $8's$

27. Se x, y e z são números reais positivos tais que $xyz(x+y+z)=1$, o *menor* valor da expressão $(x+y)(y+z)$ é igual a:

a) $\frac{1}{2}$. b) $\frac{3}{2}$. c) $\frac{4}{3}$.
d) $\frac{3}{2}$. e) 2.

28. Para todo natural n, a expressão:

$$\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}\right)^2+...+\left(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{1}{n}\right)^2$$

é igual a:

a) $2n-\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}\right)$.

b) $n\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}\right)$.

c) $2n\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}\right)$.

d) $4n-\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}\right)$.

e) $n-\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}\right)$.

29. Os 2004 números x_1, x_2, ..., x_{2003}, x_{2004} são todos iguais a $\sqrt{2}-1$ ou a $\sqrt{2}+1$. O número de valores inteiros distintos da expressão $\sum_{k=1}^{1002} x_{2k-1}x_{2k}$ é:

a) 500.
b) 501.
c) 502.
d) 503.
e) 504.

Fatoração

30. Dentre as expressões x^2+4, x^3+8, x^4+16 e x^5+32 o número daquelas que podem ser fatoradas com um produto de duas expressões reais de graus estritamente menor é igual:

a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

31. O símbolo R_k representa um número inteiro cuja representação decimal consiste de k $un's$. Por exemplo, $R_3=111$, $R_5=11111$, etc. Quando dividimos R_{24} por R_4, o quociente $C=\frac{R_{24}}{R_4}$ é um número inteiro cuja representação decimal consiste de apenas um's e zeros. O número de zeros em C é igual a:

a) 10
b) 11
c) 12
d) 13
e) 15

32. Um cubo é cortado em 99 cubos menores, dos quais exatamente 98 são unitários. O volume do cubo original é igual a:

a) 729
b) 512
c) 343
d) 216
e) 125

33. A soma dos algarismos da raiz quadrada dos números da forma $\underbrace{444444...44}_{2n\ algarismos\ 4's} - \underbrace{888...8}_{n\ algarismos\ 8's}$ igual a:

a) $n+4$ b) $n+5$ c) $n+8$
d) $2n+4$ e) $6n$

34. Qual o polinômios abaixo *NÃO* é um fator de $(x-1)^2(x^3+x)$?

a) x^3-x^2+x-1 b) x^2-2x+1
c) x^2-x d) x^3-x
e) $x^4-2x^2(x-1)-2x+1$

35. Considere as afirmativas:

1) A soma dos algarismos do número $777\,777^2-222\,223^2$ é 29.

2) O valor de $\left(90\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(91\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}}$ é igual a 16.

3) O valor numérico de $\dfrac{49+40^2-9^2}{98}$ é igual a 16.

4) A soma dos algarismos do número que se deve acrescentar a 20052004^2 para obtermos 20052005^2 é 18.

O número de afirmativas *VERDADEIRAS* é:

a) 0 b) 1 c) 2
d) 3 e) 4

36. A soma dos algarismos de $(9\cdot10^m)\cdot\underbrace{111...111}_{n\ vezes}{}^2+(2\cdot10^m)\cdot\underbrace{111...111}_{n\ vezes}+\underbrace{111...111}_{n\ vezes}$ é igual a:

a) $m+n$ b) $2m+n$ c) $2n+m$
c) $2(m+n)$ e) $10n+9m$

37. Mostre que a afirmativa:
"O produto de quatro inteiros consecutivos, aumentado de uma unidade, é um quadrado perfeito" é *VERDADEIRO* e, a seguir utilize-a para determinar que a soma dos algarismos de $\sqrt{2006\cdot2005\cdot2004\cdot2003+1}$ é igual a:

a) 21 b) 23 c) 25
d) 27 e) 29

38. A *soma* dos algarismos da raiz quadrada de $(\underbrace{111\cdots111}_{2006\ un's})\cdot(1\underbrace{000\cdots000}_{2005\ zero's}5)+1$ é igual a:

a) 6018 b) 6019 c) 6020
d) 6021 e) 6022

39. O número de pares ordenados (a,b) de inteiros positivos tais que ambos sejam menores do que 100 e tais que $a\sqrt{2a+b}=b\sqrt{b-a}$ é igual a:

a) 41 b) 43 c) 45
d) 47 e) 49

40. O valor *mínimo* de $\dfrac{\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^6-\left(x^6+\dfrac{1}{x^6}\right)-2}{\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3+\left(x^3+\dfrac{1}{x^3}\right)}$, para $x>0$ é igual a:

a) 1 b) 3 c) 4
d) 6 e) 9

41. Para cada inteiro $n\geq 4$, seja a_n o número $0,\overline{133}_n$ expresso no sistema de numeração de base n. Sabendo que o produto $a_4a_5\cdots a_{99}$ pode ser expresso sob a forma $\dfrac{m}{n!}$ onde m e n são inteiros positivos sendo n o menor possível, o valor de m é igual a:

a) 98 b) 101 c) 132
d) 798 e) 962

42. Considere as afirmativas:

1) Se $x^2+y^2=4xy$ e $x>y>0$, o valor da razão $\dfrac{x+y}{x-y}$ é igual a $\sqrt{3}$.

2) O valor da fração $\dfrac{a+b}{a-b}$ se $2a^2+2b^2=5ab$ e $a>b>0$ é igual a 3.

3) Se a e b são números reais tais que $0<a<b$ e $a^2+b^2=6ab$ então o valor de $\dfrac{a+b}{a-b}$ é igual a $\sqrt{2}$.

Assinale se forem *VERDADEIRAS:*

a) Somente (1) e (2) b) Somente (1) e (3)
c) Somente (2) e (3) d) Todas
e) Somente (1)

43. A expressão $x^6 + 27y^6$ quando fatorada completamente apresenta um número de fatores iguais a:
a) 2 b) 3 c) 4
d) 5 d) 6

44. Considere a seqüência $(1,4,13,...)$ definida recursivamente por $s_1 = 1$ e $s_{n+1} = 3s_n + 1$ para todos os inteiros positivos n. O elemento $s_{18} = 193710244$ termina com dois algarismos idênticos. Quantos elementos consecutivos desta seqüência terminam com o mesmo número de algarismos idênticos?
a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) *mais de* 4

45. Considere as afirmativas:
1. Sabendo que $zy = a$, $xz = b$ e $yz = c$, e se nenhuma dessas quantidades é igual a zero então $x^2 + y^2 + z^2$ é igual a $\dfrac{(ab)^2 + (ac)^2 + (bc)^2}{abc}$.
2. Simplificando a expressão $\dfrac{(a^2 - b^2 - c^2 - 2bc)\cdot(a+b-c)}{(a+b+c)\cdot(a^2 + c^2 - 2ac - b^2)}$ para os valores de a, b, c que não anulam o denominador, obtêm-se 1.
3. Simplificando $\dfrac{a^4 - b^4}{(a^2 + b^2 + 2ab)(a^2 + b^2 - 2ab)} - \dfrac{2ab}{a^2 - b^2}$ para $b \neq \pm a$ obtém-se $\dfrac{a-b}{a+b}$.

Assinale se forem *FALSAS*:
a) Somente (1) e (2) b) Somente (1) e (3)
c) Somente (2) e (3) d) Todas
e) Nenhuma.

46. Considere as afirmativas:
1. Uma expressão equivalente a $2 + \sqrt{\dfrac{a^2}{b^2} + \dfrac{b^2}{a^2} + 2}$ para a, $b > 0$ é $\dfrac{(a+b)^2}{ab}$.
2. Se a, b, c são números reais tais que $a^2 + 2b = 7$, $b^2 + 4c = -7$ e $c^2 + 6a = -14$, o valor de $a^2 + b^2 + c^2$ é igual a 14.
3. Sejam a e b números reais distintos tais que $\dfrac{a}{b} + \dfrac{a+10b}{b+10a} = 2$. O valor de $\dfrac{a}{b}$ é igual a $0{,}8$.

4. Se $m+n+p=6$, $mnp=2$ e $mn+mp+np=11$, o valor da expressão $\frac{m}{np}+\frac{n}{mp}+\frac{p}{mn}$ é igual a 7.

Assinale se forem *VERDADEIRAS*:

a) Somente (1), (2) e (3)
b) Somente (2), (3) e (4)
c) Somente (2) e (4)
d) Todas
e) Somente (4)

47. Sejam a e b números reais tais que $a^b+b^2=6ab$. Se $\frac{a^3-b^3}{a^3+b^3}=\frac{p}{q}\sqrt{2}$ onde p e q são primos entre si, o valor de $p+q$ é igual a:

a) 11
b) 13
c) 15
d) 17
e) 19

48. A soma de todos os inteiros positivos N para os quais $2005 \le N \le 2500$ e $x^4-y^4=N$ para alguns inteiros x e y é igual a:

a) 14110
b) 14112
c) 14114
d) 14116
e) 14118

49. Considere as afirmações:

1. Se $2x-3y-z=0$ e $x+3y-14z=0$ com $z \ne 0$, a expressão $\frac{x^2+3xy}{y^2+z^2}$ quando simplificada se torna igual a 7.
2. Sabendo que $3x-y-10z=0$ e que $x+2y-z=0$, o valor simplificado de $\frac{x^3+x^2y}{xy^2-z^3}$ sendo $z \ne 0$, é 6.
3. Se $1-y$ for usado como aproximação de $\frac{1}{1+y}$ com $|y|<1$, a razão do erro cometido para o valor exato é igual a $\frac{y}{1+y}$.
4. A melhor aproximação de $\sqrt{1-b}$ para $0<b<10^{-6}$ é $1-\frac{b}{2}$.

Assinale:

a) Se somente as afirmações 1 e 2 forem verdadeiras.
b) Se somente as afirmações 2 e 3 forem verdadeiras.
c) Se somente as afirmações 1 e 3 forem verdadeiras.
d) Se somente as afirmações 1 e 4 forem verdadeiras.
e) Somente as afirmações 2 e 4 forem verdadeiras.

50. Considere as afirmativas:

1. A soma $\frac{y^2z^2}{b^2c^2}+\frac{\left(y^2-b^2\right)\left(z^2-b^2\right)}{b^2\left(b^2-c^2\right)}+\frac{\left(y^2-c^2\right)\left(z^2-c^2\right)}{c^2\left(c^2-b^2\right)}$ é igual a 1.
2. $\frac{1}{(a-b)(a-c)(x+a)}+\frac{1}{(b-a)(b-c)(x+b)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)(x+c)}$ é igual a $\frac{1}{(x+a)(x+b)(x+c)}$.
3. O valor de $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1-a}+\frac{2a}{1-a^2}$ é $\frac{2}{1-a}$
4. O valor de $\frac{(a-x)(a-y)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(b-x)(b-y)}{(b-a)(b-c)}+\frac{(c-x)(c-y)}{(c-a)(c-b)}$ é 1.
5. A soma $\frac{(b+c)\left(x^2+a^2\right)}{(c-a)(a-c)}+\frac{(c+a)\left(x^2+b^2\right)}{(a-b)(b-c)}+\frac{(a+b)\left(x^2+c^2\right)}{(b-c)(c-a)}$ é *nula*.

O número de afirmativas *VERDADEIRAS* é:

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

51. Considere as afirmativas:

1. Simplificando $\frac{a^2-b^2}{a^2+2ab+b^2}\div\frac{4\left(a^2-ab\right)}{a^2+ab}$ obtemos $\frac{1}{4}$.
2. Simplificando $\frac{a^2-(b-c)^2}{(a+b)^2-z^2}\times\frac{(a+b+c)^2}{a^2-(b+c)^2}$ obtemos $\frac{a-b+c}{a-b-c}$.
3. Simplificando $\frac{(a+b)^2-(c+d)^2}{(a+c)^2-(b+d)^2}\times\frac{(a-b)^2-(d-c)^2}{(a-c)^2-(d-b)^2}$ obtemos 1.
4. Simplificando $\frac{(a-b)^2-c^2}{(a-c)^2-b^2}\times\frac{a^2-(c-b)^2}{a^2-(b-c)^2}$ obtemos $\frac{a-b+c}{a-b-c}$.
5. Simplificando $\frac{1}{(a+b)^2}\cdot\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^2}\right)+\frac{2}{(a+b)^3}\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$ obtemos $\frac{1}{a^2b^2}$.

O número daquelas que não são *VERDADEIRAS* é:

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

52. Dentre as identidades:

1. $$\frac{bc}{(a-c)(a-b)}+\frac{ca}{(b-c)(b-a)}+\frac{ab}{(c-a)(c-b)}\equiv 1$$

2. $$\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)^2+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^2\equiv 4+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)$$

3. $$\frac{a^2b^2}{(a-c)(b-c)}+\frac{a^2c^2}{(a-b)(c-b)}+\frac{b^2c^2}{(b-a)(c-a)}\equiv ab+ac+bc$$

4. $$\frac{bc}{a\left(a^2-b^2\right)\left(a^2-c^2\right)}+\frac{ac}{b\left(b^2-a^2\right)\left(b^2-c^2\right)}+\frac{ab}{c\left(c^2-b^2\right)\left(c^2-a^2\right)}\equiv\frac{1}{abc}$$

O número daquelas que são *VERDADEIRAS* é igual a:

a) 0 b) 1
c) 2 d) 3
e) 4

53. Considere as afirmativas:

1. A soma $\dfrac{a^2+b+c}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^2+c+a}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^2+a+b}{(c-a)(c-b)}$ é igual a 1.

2. A soma $\dfrac{a+x}{x(x-y)(x-z)}+\dfrac{a+y}{y(y-x)(y-z)}+\dfrac{a+z}{z(z-x)(z-y)}$ é igual a $\dfrac{a}{xyz}$.

3. A soma $a^2\dfrac{(d-b)(d-c)}{(a-b)(a-c)}+b^2\dfrac{(d-c)(d-a)}{(b-c)(b-a)}+c^2\dfrac{(d-a)(d-b)}{(c-a)(c-b)}$ é igual a d^2.

4. A soma $\dfrac{a-b}{a+b}+\dfrac{b-c}{b+c}+\dfrac{c-a}{c+a}+\dfrac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$ é igual a *zero*.

O número de afirmativas *FALSAS* é:

a) 0 b) 1
c) 2 d) 3
e) 4

54. Sejam a, b, c, P *quatro* números reais dados tais que a, b e c não sejam simultaneamente iguais e $a+\dfrac{1}{b}=b+\dfrac{1}{c}=c+\dfrac{1}{a}=p$ então $abc+p$ é igual a:

a) p b) $2p$
c) p^2 d) p^3+p
e) 0

G 03

01. Se a, b e c são reais tais que $\left(bc-a^2\right)^{-1}+\left(ca-b^2\right)^{-1}+\left(ab-c^2\right)^{-1}=0$ então $a\left(bc-a^2\right)^{-2}+b\left(ca-b^2\right)^{-2}+c\left(ab-c^2\right)^{-2}$ é igual a:

a) 0 b) -1 c) 0
d) 1 e) 2

02. Sejam a, b e c números reais distintos dois e não nulos tais $a+b+c=0$. O valor de $\left(\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}+\frac{a-b}{c}\right)\cdot\left(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right)$ é igual a:

a) 0 b) 1 c) 3
d) 9 e) 27

03. Sejam x e y dois números reais não nulos tais que $a=x+\frac{1}{x}$, $b=y+\frac{1}{y}$ e $c=xy+\frac{1}{xy}$ então podemos afirmar que:

a) $a^2+b^2+c^2=abc+4$ b) $a^2-b^2+c^2=abc+4$
c) $a^2+b^2-c^2=abc+4$ d) $a^2-b^2-c^2=abc+4$
e) $a^2-b^2-c^2=abc-4$

04. O número de maneiras distintas segundo as quais podemos escrever $2^{2^{1999}}+1$ como uma soma de dois números primos é igual a:

a) 0 b) 1 c) 2
d) 3 e) mais de 3

05. Se x, y e z são números reais positivos tais que $xyz=1$, o valor de $\frac{x+1}{xy+x+1}+\frac{y+1}{yz+y+1}+\frac{z+1}{zx+z+1}$ é igual a:

a) 1 b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{2}{3}$
d) 2 e) 3

06. Para $x\neq 1$, $y\neq 1$ e $x\neq 1$ sabe-se que $\frac{yz-x^2}{1-x}=\frac{xz-y^2}{1-y}=k$. O valor de k é igual a:

a) $x-y-z$ b) $x-y+y$ c) $x+y-z$
d) $x+y+z$ e) $xy-yz-xz$

07. Se a, b e c são três racionais distintos então

$$\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}$$

a) É sempre o quadrado de um racional.

b) É igual a $\frac{1}{a^2+b^2+c^2}$

c) É igual a $\frac{1}{(a+b+c)^2}$

d) É igual a $(a+b+c)^2$

e) É sempre igual a 0

08. Sejam A, L e S inteiros não negativos tais que $A+L+S=12$. O valor máximo de $A\cdot L\cdot S+A\cdot L+L\cdot S+S\cdot A$ é igual a:

a) 62 b) 72 c) 92
d) 102 e) 112

09. Se x, y e z são números reais distintos tais que $\frac{x}{y-z}+\frac{y}{z-x}+\frac{z}{x-y}=0$ com $x\neq y$, $x\neq z$ e $y\neq z$ então, $\frac{x}{(y-z)^2}+\frac{y}{(z-x)^2}+\frac{z}{(x-y)^2}$ é igual a:

a) 0 b) 1 c) 2
d) 3 e) 4

10. Sabendo que $\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}=\frac{1}{11}$, o valor de $\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}$ é igual a:

a) $\frac{1}{11}$ b) $\frac{2}{11}$ c) $\frac{4}{11}$
d) $\frac{8}{11}$ e) $\frac{16}{11}$

11. A soma $S=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+...+\frac{1}{2005\cdot 2006\cdot 2007}$ é igual a:

a) $\frac{2\cdot 1996}{3\cdot 2005\cdot 2007}$ b) $\frac{1}{3}-\frac{1}{3\cdot 2007}$
c) $\frac{1}{4}-\frac{1}{2006^2}$ d) $\frac{1}{3}-\frac{1}{3\cdot 2006\cdot 2007}$
e) $\frac{1}{4}-\frac{1}{2\cdot 2006\cdot 2007}$

12. Sabendo-se que a seguinte identidade $\frac{a \cdot x + b \cdot y}{x \cdot y} = \frac{a}{y} + \frac{b}{x}$ é verdadeira para quaisquer números reais a, b, $x \neq 0$ e $y \neq 0$, o valor de $\frac{13}{2 \cdot 4} + \frac{13}{4 \cdot 6} + \frac{13}{6 \cdot 8} + \cdots + \frac{13}{50 \cdot 52}$ é igual a:

a) $\frac{25}{16}$ b) $\frac{25}{12}$ c) $\frac{25}{8}$
d) $\frac{25}{4}$ e) $\frac{25}{2}$

13. Considere as afirmativas:

I) O valor de $\frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{28+10\sqrt{3}}}{15}$ é igual a $-\frac{1}{3}$.

II) Se $x + x^{-1} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ então $x^3 + x^{-3}$ é igual a $\frac{9\sqrt{2}}{4}$.

III) Se $\sqrt{10+2\sqrt{6}-2\sqrt{10}-2\sqrt{15}} = \sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c}$, o valor de $a+b+c$ é 10.

IV) Se $P = 3^{2005} + 3^{-2005}$ e $Q = 3^{2005} - 3^{-2005}$ o valor de $P^2 - Q^2$ é 4.

O número de afirmativas FALSAS é:

a) 0 b) 1
c) 2 d) 3
e) 4

14. Considere as afirmativas:

I) O valor de $\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+4\sqrt{3}}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{3}}$ é igual a 1.

II) O número $N = 1 + \sqrt{3+\sqrt{8}} + \sqrt{7-\sqrt{40}} - \sqrt{6+\sqrt{20}}$ a 1.

III) O inteiro mais próximo de $N = \frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{3}}{\sqrt[3]{6\sqrt{3}-10}}$ é 2.

IV) O valor de $N = \sqrt{13+30\sqrt{3+2\sqrt{2}}} - \frac{5}{6}$ é 2.

O número de afirmativas VERDADEIRAS é:

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

15. A soma dos algarismos do maior valor de x para o qual $4^{27}+4^{1000}+4^{x}$ é um quadrado perfeito é igual a:
a) 11 b) 13 c) 15
d) 17 e) 19

16. Os inteiros a, b, c, d e A são tais que $a^2+A=b^2$ e $c^2+A=d^2$ sobre o número $2(a+b)(c+d)(ac+bd-A)$ podemos afirmar que:
a) É um quadrado perfeito
b) É um cubo perfeito
c) É a quarta potência de um natural
d) Depende de A
e) Depende de a, b, c e d

17. Sejam x_1, x_2, x_3, x_4 números tais que $-1 \le x_k \le 1$. O menor valor possível da expressão $x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4$ é:
a) -5 b) -4 c) -3
d) -2 e) -1

18. Se 10^k é a maior potência de 10 que divide $11^{10}-1$ então k e igual a:
a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

19. Considere que $xy=p$, $x+y=s$, $x^{2004}+y^{2004}=t$ e $x^{2005}+y^{2005}=u$ o valor de $x^{2006}+y^{2006}$ é dado por:
a) $su-pt$ b) $st-pu$ c) $su+pt$
d) $st+pu$ e) $ps+tu$

20. Se k é um número inteiro com $|k|>2$ tal que $x+x^{-1}=k$, então a quantidade de números reais x tais que x^n+x^{-n} é inteiro para todo n é:
a) 0 b) 1 c) 2
d) 3 e) infinito

21. O valor numérico de $\dfrac{25^3+26^3+\cdots+48^3}{1^3+2^3+\cdots+24^3}$ é aproximadamente:
a) 65 b) 64 c) 63
d) 16 e) 15

22. Qual o valor máximo de n para o qual existe um conjunto de inteiros positivos distintos $k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 .....k_n$ para os quais $k_1^2 + k_2^2 + \cdots + k_n^2 = 2002$?

a) 14 b) 15 c) 16
d) 17 e) 18

23. Sabendo que $x^2 + 4x + 3$ é um fator de $E = \left(4x^2 + 17x + 14\right)^k - 1$ para todo inteiro k par. Outro fator de E pode ser dado por:

a) $16x^2 - 72x - 65$ b) $16x^2 + 72x + 65$
c) $16x^2 - 72x + 65$ d) $76x^2 + 72x - 65$
e) $16x^2 - 65x + 72$

24. O valor de $\sqrt[3]{1 - 27\sqrt[3]{26} + 9\sqrt[3]{26^2}} + \sqrt[3]{26}$ é:

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

25. Para quantos valores de n o número $\sqrt[n]{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \sqrt[n]{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$ é irracional?

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) infinitos

26. O valor de $\dfrac{2a\sqrt{1+x^2}}{x + \sqrt{1+x^2}}$ para $x = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}} - \sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)$ onde a e b são números reais positivos é:

a) $2(a+b)$ b) $2a+b$ c) $a+2b$
d) $a+b$ e) $a-b$

27. Sabendo que $\alpha^3 - \alpha - 1 = 0$, o valor de $\sqrt[3]{3\alpha^2 - 4\alpha} + \alpha\sqrt[4]{2\alpha^2 + 3a + 2}$ é igual a:

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

28. O número $x = \sqrt[3]{3 + \sqrt{9 + \dfrac{125}{27}}} - \sqrt[3]{-3 + \sqrt{9\dfrac{125}{27}}}$ é:

a) inteiro positivo
b) inteiro negativo
c) complexo
d) racional decimal limitado
e) racional infinito aperiódico

29. Utilizando o valor de $\sqrt[3]{38+17\sqrt{5}}+\sqrt[3]{38-17\sqrt{5}}$ podemos concluir que o valor do número $N=\sqrt[9]{38+17\sqrt{5}}+\sqrt[9]{38-17\sqrt{5}}$ é igual a:

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

30. Seja x um número real tal que $y=\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^{1/3}+\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)^{1/3}$ seja inteiro então:

a) x é inteiro se, e somente se, y for par.
b) x é inteiro se, e somente se, y for ímpar.
c) x é sempre inteiro.
d) x nunca é inteiro.
e) x é sempre irracional.

31. Se $x_n=\sqrt{\dfrac{1}{1^2\cdot 3}-\dfrac{1}{1\cdot 3^2}}+\sqrt{\dfrac{1}{2^2\cdot 4}-\dfrac{1}{2\cdot 4^2}}+\cdots+\sqrt{\dfrac{1}{n^2(n+2)}-\dfrac{1}{n(n+2)^2}}$ o valor de $\left\lfloor x_n\sqrt{2}\right\rfloor$ para todo $n\in\mathbb{N}^*$ e $n\geq 3$ é igual a:

a) 0 b) 1 c) 2
d) 3 e) 4

32. Se $A=\sqrt[4]{97+32\sqrt[4]{9}+4\sqrt[4]{729}}-\sqrt[4]{9}$ e $B=\sqrt[4]{68+32\sqrt[4]{4}+8\sqrt[4]{69}}-\sqrt[4]{4}$ então $A-B$ pertence ao intervalo:

a) $]-\infty,0[$ b) $]0,1[$ c) $]1,2[$
d) $]2,3[$ e) $]2,4[$

33. Expressão $\sqrt{a^2\sqrt[3]{a^4b^2}}+\sqrt{b^2+\sqrt[3]{a^2b^4}}$ é igual a:

a) $\left(a^{1/3}+b^{1/3}\right)^{3/2}$ b) $\left(a^{3/2}+b^{3/2}\right)^{2/3}$ c) $\left(a^{2/3}+b^{2/3}\right)^{3/2}$
d) $(a+b)^{3/2}$ e) $\left(a^{3/2}+b^{3/2}\right)^{3/2}$

34. O coeficiente de x^{2005} em
$(x+1)^7(x^2+1)^4(x^4+1)^5(x^8+1)(x^{16}+1)(x^{32}+1)(x^{64}+1)(x^{128}+1)(x^{256}+1)(x^{512}+1)(x^{1024}+1)$

a) 1024 b) 2048 c) 4096
d) 8192 e) 16384

35. Sejam a, b e c números inteiros positivos tais que $abc+ab+bc+ca+a+b+c=2000$ então, o valor de $a+b+c$ é igual a:

a) 50 b) 52 c) 54
d) 56 e) 58

36. Se $S=\left(1+2^{-1/32}\right)\left(1+2^{-1/16}\right)\left(1+2^{-1/8}\right)\left(1+2^{-1/4}\right)\left(1+2^{-1/2}\right)$ então S é igual a:

a) $\frac{1}{2}\left(1-2^{-1/32}\right)^{-1}$ b) $\frac{1}{2}\left(1-2^{-1/32}\right)$
c) $\left(1-2^{-1/32}\right)^{-1}$ d) $\frac{1}{2}$
e) $\left(1-2^{-1/32}\right)$

37. O coeficiente de $x^{2000999}$ no desenvolvimento de

$$(x+1)(x-2)^2(x+3)^3(x-4)^4\cdots\left(x+1999^{1999}\right)(x-2000)^{2000}$$

é igual a:

a) -2001000 b) -2000999
c) 1 d) 2001000
e) 2000999

38. Sejam a, b e c números reais dois a dois desiguais. Então a expressão: $\left(\frac{a}{b-c}+\frac{a}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right)\left(\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}+\frac{1}{a-b}\right)$ é igual a:

a) $\frac{a}{(b-c)^2}+\frac{b}{(c-a)^2}+\frac{c}{(a-b)^2}$

b) $\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}+\frac{1}{(a-b)^2}$

c) $\frac{a}{(b-c)}+\frac{b}{(c-a)}+\frac{c}{(a-b)}$

d) $\frac{a^2}{(b-c)^2}+\frac{b^2}{(c-a)^2}+\frac{c^2}{(a-b)^2}$

e) $\frac{2}{(b-c)^2}+\frac{2}{(c-a)^2}+\frac{2}{(a-b)^2}$

39. Simplificando a expressão:

$$\frac{4a^2-1}{(a-b)(a-c)}+\frac{4b^2-1}{(b-a)(b-c)}+\frac{4c^2-1}{(c-a)(c-b)}$$,obtemos:

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 7

40. Sejam a, b e c números reais tais que $a+b+c=0$ então, a expressão $a^5\left(b^2+c^2\right)+b^5\left(a^2+c^2\right)+c^5\left(b^2+a^2\right)$ é igual a:

a) $\frac{1}{2}(a+b+c)\left(a^6+b^6+c^6\right)$
b) $\frac{1}{2}\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(a^5+b^5+c^5\right)$
c) $\frac{1}{2}\left(a^3+b^3+c^3\right)\left(a^4+b^4+c^4\right)$
d) $2(a+b+c)\left(a^6+b^6+c^6\right)$
e) $2\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(a^5+b^5+c^5\right)$

41. Seja (a,b,c) um terno de inteiros positivos tais que $a^2+b-c=100$ e $a+b^2-c=124$. A soma dos algarismos de $a+b+c$ é igual a:
a) 80
b) 82
c) 84
d) 86
e) 88

42. Sendo A e B números reais dados por:
$A=\left(19+3\sqrt{33}\right)^{1/3}+\left(19-3\sqrt{33}\right)^{1/3}+1$ e $B=\left(17+3\sqrt{33}\right)^{1/3}+\left(17-3\sqrt{33}\right)^{1/3}-1$
O valor do produto AB é igual a:
a) 9 b) 17 c) 19
d) 33 e) 49

43. Sejam b e b números reais tais que $a^2+b^2=1$. O valor de a^3b-ba^3 é igual a:

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{8}$

d) $\frac{1}{16}$ e) $\frac{1}{32}$

44. O maior inteiro positivo n para o qual n^3+100 é divisível por $n+10$ é tal que a soma dos seus algarismos é igual a:
a) 17 b) 18 c) 20
d) 21 e) 24

45. Fatore as expressões:
1. $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$
2. $(a-b)c^3-(a-c)b^3+(b-c)a^3$
3. $(a-b)^3+(b-c)^3-(a-c)^3$
4. $(a^2+b^2)^3-(b^2+c^2)^3-(a^2-c^2)^3$
5. $8a^3(b+c)-b^3(2a+c)-c^3(2a-b)$

A seguir numere a coluna abaixo de acordo com as fatorações obtidas:
( ) $3(a+b)(a+c)(b+c)$
( ) $(a-b)(b-c)(a-c)(a+b+c)$
( ) $3(a-b)(b-c)(c-a)$
( ) $3(a+c)(a-c)(a^2+b^2)(b^2+c^2)$
( ) $(b+c)(2a-b)(2a+c)(2a+b-c)$

A ordem obtida de cima para baixo é:
a) $1,2,3,4,5$ b) $1,2,4,3,5$ c) $1,3,2,4,5$
d) $1,2,5,4,3$ e) $1,2,5,3,4$

46. Dentre as diferenças da forma 36^m-5^n onde m e n são naturais não nulos, a de menor valor absoluto é igual a:
a) 1 b) 9 c) 11
d) 19 e) 21

47. Os cinco primeiros termos de uma seqüência são $(1,2,3,4,5,...)$. A partir do sexto, cada termo é inferior em uma unidade ao produto dos seus precedentes. Sobre o produto dos 70 primeiros termos desta seqüência podemos afirmar que é igual a:
a) soma dos seus quadrados
b) soma dos seus cubos
c) soma de suas quartas potências
d) soma de suas quintas potências
e) soma de suas sextas potências

48. O número de pares de inteiros positivos (a,b) para os quais os números $a^3+6ab+1$ e $b^3+6ab+1$ são cubos de inteiros positivos é igual a:

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) mais de 4

49. Se a e b são números reais não nulos que satisfazem à equação $a^2b^2\left(a^2b^2+4\right)=2\left(a^6+b^6\right)$ podemos afirmar que:

a) pelo menos um deles não é racional
b) os dois são racionais
c) os dois são racionais inteiros
d) pelo menos um deles é racional inteiro
e) ambos são positivos

50. Sendo $p=6q\pm1$ então $4p^2+1$ é igual a:

a) $(8q\pm2)^2+(8q\pm1)^2+(4q)^2$
b) $(6q\pm2)^2+(6q\pm1)^2+(2q)^2$
c) $(8q\pm2)^2+(8q\mp1)^2+(4q)^2$
d) $(6q\pm2)^2+(6q\mp1)^2+(2q)^2$
e) $(4q\pm2)^2+(4q\pm1)^2+q^2$

51. Se $a+b+c=0$ considere então as afirmativas:

1. $\dfrac{a^5+b^5+c^5}{5}=(abc)\cdot\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2}$
2. $\dfrac{a^5+b^5+c^5}{5}=\dfrac{a^3+b^3+c^3}{3}\cdot\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2}$
3. $\dfrac{a^7+b^7+c^7}{7}=\dfrac{a^5+b^5+c^5}{5}\cdot\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2}$

Assinale:

a) Se somente as afirmativas 1 e 2 forem verdadeiras.
b) Se somente as afirmativas 1 e 3 forem verdadeiras.
c) Se somente as afirmativas 2 e 3 forem verdadeiras.
d) Se todas as afirmativas forem verdadeiras.
e) Se todas as afirmativas forem falsas.

52. Sendo $X=x^3-y^3+3xy(2x+y)$ e $Y=y^3-x^3+3yx(2y+x)$ então X^3+Y^3 é igual a:

a) $27xy(x+y)\left(x^2+xy+y^2\right)^3$
b) $xy(x+y)\left(x^2+xy+y^2\right)^3$
c) $x^3y^3(x+y)^3\left(x^2+xy+y^2\right)^3$
d) $27xy(x+y)^3\left(x^2+xy+y^2\right)^3$
e) $x^3y^3(x+y)\left(x^2+xy+y^2\right)^3$

53. Um dos fatores da expressão $ab\left(c^2+d^2\right)+cd\left(a^2+b^2\right)$ é:

a) ab b) c^2+d^2 c) $ab+cd$
d) $ac+bd$ e) $ad+bc$

54. A expressão $a^5+3a^4b-5a^3b^2-15a^2b^3+4ab^4+12b^5$ quando fatorada completamente apresenta um número de fatores com coeficiente inteiros igual a:

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

55. A expressão $(a-b)^2\left(a^2-b^2\right)+8(a+b)^2\,ab\left(a^2+b^2\right)$ quando fatorada completamente, apresenta número de fatores com coeficientes inteiros igual a:

a) 2 b) 3 c) 4
d) 5 e) 6

56. O número de fatores obtidos ao fatorarmos a expressão

$$30\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)+68ab-75ac-156ad-61bc-100bd+87cd$$

em um produto de fatores com coeficiente inteiros é igual a:

a) 0 b) 1 c) 2
d) 3 e) 4

57. A expressão $x^{10}+x^5+1$ quando fatorada completamente em polinômios e monômios com coeficiente inteiros apresenta um número de fatores igual a:

a) 2 b) 3 c) 4
d) 5 e) mais de 5

58. A expressão $(x+y)^7-x^7-y^7$ quando fatorada completamente em polinômios e monômios com coeficiente inteiros apresenta um número de fatores igual a:

a) 7 b) 6 c) 5
d) 4 e) 3

59. Se a, b e c são inteiros positivos tais que $a=b+c$ então podemos afirmar que $a^4+b^4+c^4$ é igual a:

a) um quadrado perfeito b) uma quarta potência
c) um cubo perfeito d) b^8+c^8
e) $2b^4+2c^4$

60. Se n é um inteiro maior que 1, o número de fatores distintos segundo os quais podemos escrever $n^{12}+64$ como produto de inteiros positivos maiores que 1 é:

a) 2 b) 3 c) 4
d) 6 e) 12

61. Sendo $x+x^{-1}=a$, ao escrevermos $x^{13}+x^{-13}$ como um polinômio em a verificamos que a soma dos coeficientes deste polinômio é igual a:
a) 0 b) 1 c) 13
d) 91 e) 99

62. O polinômio do 6° grau com coeficientes inteiros que é um fator da expressão $x^{15}+1$ é:
a) $x^6+2x^5-3x^4+3x^3-3x^2+2x-1$
b) $x^6+2x^5+3x^4+3x^3-3x^2-2x+1$
c) $x^6-2x^5-3x^4-3x^3-3x^2+2x-1$
d) $x^6-2x^5+3x^4+3x^3+3x^2-2x-1$
e) $x^6-2x^5+3x^4-3x^3+3x^2-2x+1$

63. O valor de $\frac{1995}{2}-\frac{1994}{3}+\frac{1993}{4}-\cdots-\frac{2}{1995}+\frac{1}{1996}$ é igual a:
a) $\frac{1}{999}+\frac{3}{1000}+\cdots+\frac{1995}{1996}$
b) $\frac{1}{999}+\frac{2}{1000}+\cdots+\frac{1995}{1996}$
c) $\frac{1}{1000}+\frac{2}{1001}+\cdots+\frac{1995}{1996}$
d) $\frac{1}{1000}+\frac{3}{1001}+\cdots+\frac{1995}{1996}$
e) $\frac{2}{999}+\frac{3}{1000}+\cdots+\frac{1995}{1996}$

64. Sobre os números $(B-C)\cdot\left(BC-A^2\right)$, $(C-A)\cdot\left(CA-B^2\right)$ e $(A-B)\cdot\left(AB-C^2\right)$ podemos afirmar que:
a) Não podem ser todos positivos
b) Dois são positivos e um é negativo
c) Dois são negativos e um é positivo
d) São todos positivos
e) São todos negativos

65. Se $F_n=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ para todos os inteiros $n\geq 0$, então, para todos $n\geq 1$, tem-se que F_{n+1} é igual a:
a) F_n+F_{n-1} b) F_n+2F_{n-1}
c) F_n+3F_{n-1} d) F_n+4F_{n-1}
e) F_n-F_{n-1}

66. Desenvolvendo-se $\left(3-2\sqrt{2}\right)^n$ onde $n=0,1,2,3,...$ de modo a obtermos uma expressão da forma $A_n+B_n\sqrt{2}$, onde A_n e B_n são inteiros. Nestas condições podemos afirmar que $A_n^{\ 2}-2B_n^{\ 2}$ é igual a:

a) 0 b) 1 c) 2
d) 3 e) 4

67. Se $a+b+c+d=3$ e $a^2+b^2+c^2+d^2=45$ o valor de:

$$\frac{a^5}{(a-b)(a-c)(a-d)}+\frac{b^5}{(b-a)(b-c)(b-d)}+$$
$$+\frac{c^5}{(c-a)(c-b)(c-d)}+\frac{d^5}{(d-a)(d-a)(d-c)}$$ é igual a:

a) 42. b) 39. c) 36.
d) 27. e) 18.

68. O valor de $\prod_{n=2}^{\infty}\frac{n^3-1}{n^3+1}$ é igual a:

a) $\frac{1}{2}$. b) $\frac{2}{3}$. c) $\frac{3}{4}$.
d) $\frac{4}{5}$. e) $\frac{5}{6}$.

69. Se $\frac{p}{q}$ é a fração irredutível equivalente à soma $\sum_{k=1}^{2005}\frac{k^2-\frac{1}{2}}{k^4+\frac{1}{4}}$ seu denominador excede o numerador de:

a) 2005. b) 2006. c) 4010.
d) 4011. e) 4012.

70. Colocando-se o número $\frac{\left(1^4+\frac{1}{4}\right)\left(3^4+\frac{1}{4}\right)\left(5^4+\frac{1}{4}\right)...\left(11^4+\frac{1}{4}\right)}{\left(2^4+\frac{1}{4}\right)\left(4^4+\frac{1}{4}\right)\left(6^4+\frac{1}{4}\right)...\left(12^4+\frac{1}{4}\right)}$ sob a forma da fração irredutível $\frac{p}{q}$, o valor de $p+q$ é igual a:

a) 312. b) 314. c) 316.
d) 318. e) 320.

71. Se x e y são números racionais tais que $\sqrt{\left(2\sqrt{3}-3\right)} = x^{1/4} - y^{1/4}$ o valor de $x+y$ é igual a:

a) $\frac{11}{2}$. b) $\frac{13}{2}$. c) $\frac{15}{22}$.

d) $\frac{17}{2}$. e) $\frac{17}{2}$.

72. Se m, n e r são inteiros positivos tais que $1+m+n\sqrt{3} = \left(2+\sqrt{3}\right)^{2r-1}$ então sobre m podemos afirmar que:

a) Algumas vezes é racional, outras vezes não.
b) É sempre irracional.
c) É sempre um quadrado perfeito.
d) É sempre um inteiro ímpar.
e) É sempre um inteiro par.

73. Para todo número natural n o produto: $\left(4-\frac{2}{1}\right)\left(4-\frac{2}{2}\right)\left(4-\frac{2}{3}\right)...\left(4-\frac{2}{n}\right)$

a) É sempre um inteiro par.
b) Algumas vezes é um inteiro ímpar, outras vezes não.
c) Algumas vezes é racional, outras vezes não.
d) É sempre um inteiro ímpar.
e) É sempre irracional.

Racionalização

74. Considere as afirmativas:

1. $\frac{\sqrt{8}+\sqrt{6}}{\sqrt{6}} - \frac{4-\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{6-2\sqrt{3}}{3}$.

2. $\frac{5}{5+\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{9}{5-\sqrt{5}} = 3$.

3. $\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt[3]{2}$

4. $\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}} = 0$

O número de afirmativas verdadeiras é igual a:

a) 0. b) 1. c) 2.

d) 3. e) 4.

75. Racionalize os denominadores das expressões:

1. $\dfrac{5\sqrt{2}-4\sqrt{3}}{5-2\sqrt{6}}$ 2. $\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}}+\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}$

3. $\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$ 4. $\dfrac{2\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)}{3\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

A seguir numere a coluna abaixo de acordo com os denominadores das racionalizações obtidas:

( ) $\sqrt{2}$.
( ) 0 .
( ) 4 .
( ) $\dfrac{4}{3}$.

A ordem obtida de cima para baixo é:

a) 1, 3, 4, 2 . b) 1, 3, 2, 4 . c) 3, 2, 4, 1 .
d) 3, 1, 4, 2 . e) 3, 1, 2, 4 .

76. Racionalize os denominadores das expressões

1. $\dfrac{7\sqrt{3}}{18+9\sqrt{3}-6\sqrt{2}-3\sqrt{6}}$.
2. $\dfrac{3+\sqrt{6}}{5\sqrt{3}-2\sqrt{12}-\sqrt{32}+\sqrt{50}}$.
3. $\dfrac{6}{\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}}$.
4. $\dfrac{2+\sqrt{6}}{2\sqrt{2}+2\sqrt{3}-\sqrt{6}-2}$.
5. $\dfrac{1}{\sqrt{14}+\sqrt{21}+\sqrt{15}+\sqrt{10}}$.

A seguir numere a coluna abaixo de acordo com os denominadores das racionalizações obtidas:

( ) 2 .
( ) 3 .
( ) $\sqrt{3}$.
( ) 12 .
( ) 5 .

a) 5, 1, 3, 4, 2 . b) 3, 1, 2, 4, 5 . c) 3, 2, 5, 4, 1 .
d) 3, 1, 5, 4, 2 . e) 3, 1, 5, 2, 4 .

77. O número de pares ordenados (m, n) de inteiros tais que $1000 \geq m \geq n$ que satisfazem à equação $\sqrt{mn}+1=\frac{n}{\sqrt{m}}+\frac{m}{\sqrt{n}}$

é igual a:

a) 30 .
b) 31 .
c) 32 .
d) 33 .
e) 34 .

78. O valor da soma $S=\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{100\sqrt{99}+99\sqrt{100}}$

é igual a:

a) $\frac{1}{10}$.
b) $\frac{9}{10}$.
c) $\frac{1}{9}$.
d) $\frac{10}{9}$.
e) $\frac{11}{10}$.

79. O valor numérico de $E=\frac{1+a}{1+\sqrt{1+a}}+\frac{1-a}{1-\sqrt{1-a}}$ para $a=\frac{\sqrt{3}}{2}$ é igual a:

a) 1 .
b) $\frac{1}{2}$.
c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
e) 0 .

80. O número de zeros que aparecem após a vírgula e antes do primeiro algarismo não nulo da expressão decimal de $\sqrt{2^{2004}+1}$ é:

a) 300 .
b) 301 .
c) 302 .
d) 303 .
e) 304 .

81. A expressão $\frac{\sqrt[3]{\sqrt{3}-\sqrt{5}}\cdot\sqrt[6]{8+2\sqrt{15}}-\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{\sqrt{20}+\sqrt{12}}\cdot\sqrt[6]{8-2\sqrt{15}}-2\sqrt[3]{2a}+\sqrt[3]{a^2}}$ é igual a:

a) $\frac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{2a}+\sqrt[3]{4}}{2-a}$.
b) $\frac{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{2a}+\sqrt[3]{4}}{2-a}$.
c) $\frac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{2a}-\sqrt[3]{4}}{2-a}$.
d) $\frac{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{2a}-\sqrt[3]{4}}{2-a}$.
e) $\frac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{2a}+\sqrt[3]{4}}{2+a}$.

82. Assinale a desigualdade verdadeira;

a) $2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{m}\right)<\frac{1}{\sqrt{m}}+\frac{1}{\sqrt{m+1}}+...+\frac{1}{\sqrt{n-1}}+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\left(\sqrt{n}-\sqrt{m-1}\right)$.

b) $2\left(\sqrt{n}-\sqrt{m-1}\right)<\frac{1}{\sqrt{m}}+\frac{1}{\sqrt{m+1}}+...+\frac{1}{\sqrt{n-1}}+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\left(\sqrt{n}-\sqrt{m+1}\right)$.

c) $2\left(\sqrt{n}-\sqrt{m}\right)<\frac{1}{\sqrt{m}}+\frac{1}{\sqrt{m+1}}+...+\frac{1}{\sqrt{n-1}}+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{m+1}\right)$.

d) $2\left(\sqrt{n-1}-\sqrt{m-1}\right)<\frac{1}{\sqrt{m}}+\frac{1}{\sqrt{m+1}}+...+\frac{1}{\sqrt{n-1}}+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\left(\sqrt{n}-\sqrt{m-1}\right)$.

e) $2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{m}\right)<\frac{1}{\sqrt{m}}+\frac{1}{\sqrt{m+1}}+...+\frac{1}{\sqrt{n-1}}+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\left(\sqrt{n}-\sqrt{m+1}\right)$.

83. Seja $f(n)$ o inteiro mais próximo de $\sqrt[4]{n}$. Então o valor de $\sum_{i=1}^{1995}\frac{1}{f(i)}$ é igual a:

a) 375.
b) 400.
c) 425.
d) 450.
e) 500.

84. A soma $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}}$

a) menor que 2;
b) está entre 2 e 3;
c) está entre 3 e 4;
d) está entre 4 e 5;
e) é maior que 5.

85. O valor da expressão $E=(1-ax)(1+ax)^{-1}(1+bx)^{1/2}(1-bx)^{-1/2}$ para $x=a^{-1}\left(2\cdot\frac{a}{b}-1\right)^{1/2}$ onde $0<a<b<2a$ é igual a:

a) 1.
b) 2.
c) 3.
d) 4.
e) 5.

86. Simplificando $\dfrac{\sqrt[3]{x^4}-\sqrt[3]{x^3y}+\sqrt[3]{xy^3}-\sqrt[3]{y^4}}{\sqrt[3]{x^4}-\sqrt[3]{x^3y}-\sqrt[3]{xy^3}+\sqrt[3]{y^4}}$ obtemos:

a) $\frac{x-y}{x+y}$.
b) $\frac{x+y}{x-y}$.
c) $\frac{xy}{x+y}$.
d) $\frac{xy}{x-y}$.
e) $x+y$.

87. Simplificando $\dfrac{\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}+1}}}{\sqrt{\sqrt[4]{8}+\sqrt{\sqrt{2}-1}--\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}-1}}}}$ obtemos:

a) $\sqrt{2}$.
b) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
c) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.
d) $\dfrac{\sqrt{2}}{8}$.
e) $\dfrac{\sqrt{2}}{16}$.

88. A expressão $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt[4]{\dfrac{\sqrt{5}+2}{4}}+1}-\sqrt{\sqrt[4]{\dfrac{\sqrt{5}+2}{4}}-1}}$ equivale a:

a) $\sqrt[8]{1+2\sqrt{\sqrt{5}-2}}$.
b) $\sqrt[8]{1-2\sqrt{\sqrt{5}-2}}$.
c) $\sqrt[8]{1+2\sqrt{\sqrt{5}+2}}$.
d) $\sqrt[8]{1+2\sqrt{\sqrt{5}-1}}$.
e) $\sqrt[8]{1+2\sqrt{\sqrt{5}-4}}$.

89. Se a e b são números reais positivos, o valor da expressão $\dfrac{\sqrt{\dfrac{ab}{2}+\sqrt{8}}}{\sqrt{\dfrac{ab+16}{8}+\sqrt{ab}}}$ é:

a) 1.
b) 2.
c) 3.
d) 4.
e) 5.

90. O valor numérico de $\displaystyle\sum_{n=1}^{24}\frac{1}{\sqrt{2n}+\sqrt{2(n+1)}}$ é igual a:

a) $\dfrac{1}{2}\sqrt{2}$.
b) $\sqrt{2}$.
c) $\dfrac{1}{3}\sqrt{2}$.
d) $3\sqrt{2}$.
e) $2\sqrt{2}$.

91. A expressão

$$\frac{\left(\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)^2-\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)^2\right)^2-(16a+4b)}{4a-b}+\frac{10\sqrt{a}-3\sqrt{b}}{2\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

é equivalente a:

a) $a-b$.
b) $a+b$.
c) $\frac{\sqrt{b}}{a}$.
d) $\frac{\sqrt{a}}{b}$.
e) 1.

92. O determinador racionalizado da fração $\left(\frac{\sqrt[4]{b}\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)+2\sqrt[4]{ab}}{\left(\sqrt[4]{b}+\sqrt[4]{a}\right)^2}-\left(\sqrt[4]{\frac{b}{a}}+1\right)^{-1}+1\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt[8]{ab}$

quando simplificada, se torna:

a) ab.
b) $a+b$.
c) a^2+b^2.
d) a^4+b^4.
e) a^4-b^4.

93. Simplificando a expressão $L=\frac{2}{\sqrt{4-3\sqrt[4]{5}+2\sqrt{5}-\sqrt[4]{125}}}$ obtemos:

a) $1+\sqrt[4]{5}$.
b) $2+\sqrt[4]{5}$.
c) $3+\sqrt[4]{5}$.
d) $4+\sqrt[4]{5}$.
e) $5+\sqrt[4]{5}$.

94. O denominador racional da fração $\frac{c}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{a+b}}$ é igual a:

a) $3a^2b^2(a+b)$
b) $3ab(a+b)^2$.
c) $3a^2b^2\left(a^2+b^2\right)$.
d) $3ab(a+b)$.
e) $ab(a+b)$.

95. Se $\sqrt[3]{2} = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \dots}}}$ onde $a, b, c, d, \dots$ são inteiros positivos, o valor de b é:

a) 1.
b) 2.
c) 3.
d) 4.
e) 5.

96. O valor de $E = 2a\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}$ para $x = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}} - \sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)$ é dado por:

a) $\dfrac{a}{b}$.
b) $\dfrac{b}{a}$.
c) a.
d) b.
e) 0.

97. O valor da expressão: $E = \dfrac{1}{\left(\sqrt{1}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt[4]{1}+\sqrt[4]{2}\right)} + \dots \dfrac{1}{\left(\sqrt{255}+\sqrt{256}\right)\left(\sqrt[4]{255}+\sqrt[4]{256}\right)}$

sabendo que existem 255 parcelas na qual a k- ésima parcela é da forma $\dfrac{1}{\left(\sqrt{k}+\sqrt{k+1}\right)\left(\sqrt[4]{k}+\sqrt[4]{k+1}\right)}$ é igual a:

a) 1.
b) 2.
c) 3.
d) 4.
e) 5.

98. Racionalizando-se o denominador de $\dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}}}$ obtemos:

a) $-\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}}\left(\sqrt{2}-\sqrt[3]{3}\right)\left(4+2\sqrt[3]{9}+3\sqrt[3]{3}\right)$.

b) $-\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}}\left(\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}\right)\left(4+2\sqrt[3]{9}+3\sqrt[3]{3}\right)$.

c) $-\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}}\left(\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}\right)\left(4-2\sqrt[3]{9}+3\sqrt[3]{3}\right)$.

d) $-\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}}\left(\sqrt{2}-\sqrt[3]{3}\right)\left(4-2\sqrt[3]{9}+3\sqrt[3]{3}\right)$.

e) $-\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}}\left(\sqrt{2}-\sqrt[3]{3}\right)\left(4-2\sqrt[3]{9}-3\sqrt[3]{3}\right)$.

99. Considere as seguintes afirmativas:

1. O denominador racionalizado de $\dfrac{1}{6\sqrt{50-5\sqrt{75}}-\sqrt{128-16\sqrt{48}}}$ é 33.
2. O denominador racionalizado de $\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{2}+2\cdot\sqrt[3]{4}}$ é 23.
3. O denominador racionalizado de $\dfrac{1}{1-\sqrt[4]{2}+2\cdot\sqrt{2}+\sqrt[4]{8}}$ é 167.

Assinale:

a) Se somente as afirmativas 1 e 2 forem verdadeiras.
b) Se somente as afirmativas 1 e 3 forem verdadeiras.
c) Se somente as afirmativas 2 e 3 forem verdadeiras.
d) Se todas as afirmativas forem verdadeiras.
e) Se todas as afirmativas forem falsas.

100. Simplificando $\left(\dfrac{4b^2+2ab}{\sqrt{4a^2b^2-8ab^3}}-\dfrac{16^{\frac{3}{4}}b^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{4a^2b-8ab^2}}\right)\left(\dfrac{1}{2ab}-a^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}}\sqrt{\dfrac{2a}{b}}$ obtemos:

a) a.
b) $2a$.
c) $4a$.
d) $8a$.
e) $16a$.

G 04

Problemas do Primeiro Grau

01. Uma fita de vídeo foi programada para gravar 6 horas. Quanto tempo já se gravou se o que resta para terminar a fita é $\frac{1}{3}$ do que já passou?

a) $5h$. b) $4,5h$. c) $4h$.
d) $3,5h$. e) $3h$.

02. Às cinco horas da tarde da última sexta-feira, *uma em cada três* das salas de aula da Universidade estava vazia. Se em 68 salas havia aulas, o total de salas de aulas da Universidade é:

a) 100 . b) 101 . c) 102 .
d) 103 . e) 104 .

03. Comprei duas caixas de morangos. Na primeira caixa, um quarto dos morangos estavam estragados. Na segunda caixa, que continha um morango a mais do que a primeira, somente um quinto dos morangos estavam estragados. Se no total 69 morangos estavam bons, o total de morangos estragados era:

a) 89 . b) 69 .
c) 45 . d) 44 .
e) 20 .

04. Nos quadrados abaixo, serão escritos os quatorze dígitos de um cartão de crédito. Se a soma de quaisquer três dígitos adjacentes é 20, o valor de x é:

				9				x				7	

a) 3 . b) 4 .
c) 5 . d) 7 .
e) 9 .

05. Diofanto foi uma criança feliz durante $1/6$ de sua vida. Após mais $1/12$ começou a cultivar uma barba. Permaneceu somente mais $1/7$ antes de casar e somente no quinto ano após o seu casamento nasceu-lhe um filho que morreu quatro anos que o pai e que viveu apenas a metade do que viveu o pai. A idade que Diofanto alcançou foi:

a) 44 anos. b) 54 anos.
c) 64 anos. d) 74 anos.
e) 84 anos.

06. Dois quintos do salário de Theobaldo são reservados para o aluguel e a metade do que sobra, para alimentação. Descontados o dinheiro do aluguel e o da alimentação, ele coloca um terço do que sobra na poupança restando então $R\$300,00$ para gastos diversos. O salário do Theobaldo é igual a:

a) $R\$1000,00$.
b) $R\$1200,00$.
c) $R\$1500,00$.
d) $R\$1600,00$.
e) $R\$2000,00$.

07. Renata corre uma certa distância em 5 minutos menos que Fernanda. Sabendo que a velocidade de Renata é de 6 metros e dois terços por segundo enquanto a velocidade de Fernando é de 5 metros e cinco nonos por segundo. A distância, em quilômetros, percorrida é igual a:

a) 10.
b) 9.
c) 8.
d) 6.
e) 3.

08. Um agricultor, trabalhando sozinho, capina um certo terreno em 10 horas. Sua esposa, trabalhando sozinha capina o mesmo terreno em 12 horas. Após o agricultor e sua esposa capinarem o terreno juntos durante 1 hora, recebem a ajuda de sua filha e então os três terminam de capinar o terreno em 3 horas. O número h de horas necessárias para que a filha sozinha capine o terreno é igual a:

a) $13\frac{1}{2}$.
b) $11\frac{1}{4}$.
c) $10\frac{1}{2}$.
d) 10.
e) $9\frac{1}{2}$.

09. .João, Pedro e Maria se encontraram para bater papo em um bar. João e Pedro trouxeram $R\$50,00$ cada um, enquanto que Maria chegou com menos dinheiro. Pedro, muito generoso, deu parte do que tinha para Maria, de forma que os dois ficaram com a mesma quantia. A seguir, João resolveu também repartir o que tinha com Maria, de modo que ambos ficassem com a mesma quantia. No final, Pedro acabou com $R\$4,00$ a menos do que os outros dois. Quanto Maria possuía quando chegou ao encontro?

a) $R\$30,00$.
b) $R\$32,00$.
c) $R\$34,00$.
d) $R\$36,00$.
e) $R\$38,00$.

10. Numa corrida de 1760 metros, A vence B por 330 metros e A vence C por 460 metros. Por quantos metros B vence C?

a) 120 .
b) 130 .
c) 140 .
d) 150 .
e) 160 .

11. Um pintor encontra-se em um degrau de uma escada e observa que abaixo do degrau em que está existe o dobro do número de degraus acima deste. Após descer 8 degraus ele observa que o número de degraus acima do que está é igual ao número de degraus abaixo. O número de degraus da escada é igual a:

a) 27 .
b) 31 .
c) 32 .
d) 48 .
e) 49 .

12. Uma prova é tal que se respondermos corretamente 9 das 10 primeiras questões e $\frac{3}{10}$ das questões restantes, obteremos 50% de aproveitamento. O número de questões da prova é igual a:

a) 60 .
b) 40 .
c) 20 .
d) 50 .
e) 30

13. Um pedreiro precisa de 1000 tijolos para completar uma obra. Ele sabe por experiência que no máximo 7% da encomenda quebra na entrega. Se tijolos são vendidos em centos, qual o número mínimo de tijolos que ele deve encomendar para ter certeza de completar a obra?

a) 10900 .
b) 10600 .
c) 10500 .
d) 10700 .
e) 10500 .

14. Um feirante pegou uma caixa de tangerinas, agrupou-as em dúzias e verificou que sobraram 8 tangerinas. Juntou-as e agrupou-as em dezenas, verificando que sobraram duas e que havia agora mais três grupos do que antes. A soma dos algarismos do número de tangerinas é:

a) 8 .
b) 12 .
c) 15 .
d) 18 .
e) 24 .

15. Gustavo e Antonio correram 10 quilômetros. Começaram do mesmo ponto, correram 5 quilômetros montanha acima e retornaram ao ponto de partida pelo mesmo caminho. Sabendo que Gustavo partiu 10 minutos antes de Antônio com velocidades de $15 \text{km}/\text{h}$ montanha acima e $20 \text{km}/\text{h}$ montanha abaixo e que Antonio corre a $16 \text{km}/\text{h}$ e $22 \text{km}/\text{h}$ montanha acima e abaixo respectivamente, a que distância do topo da montanha eles se cruzam?

a) $\frac{5}{4}\text{km}$.
b) $\frac{35}{27}\text{km}$.
c) $\frac{27}{20}\text{km}$.
d) $\frac{7}{3}\text{km}$.
e) $\frac{28}{9}\text{km}$.

16. Sete amigos fizeram um acordo no qual segundo eles jogariam sete partidas e aquele que perdesse em cada uma delas teria de dobrar o dinheiro dos outros seis. Ao final das sete partidas, cada um deles tinha perdido uma partida e estava com $\text{R\$}128,00$. A diferença entre as quantias, em reais, com que começaram o primeiro jogador a perder e do último jogador a perder é igual a:

a) 440 .
b) 441 .
c) 442 .
d) 443 .
e) 444 .

17. Supondo que dois pilotos de Fórmula 1 largaram juntos num determinado circuito e completam, respectivamente, cada volta em 72 e 75 segundo. Depois de quantas voltas do mais rápido, contadas a partir da largada, ele estará uma volta na frente do outro?

a) 22 .
b) 23 .
c) 24 .
d) 25 .
e) 26 .

18. Um industrial produz uma máquina que endereça 500 envelopes em 8 minutos. Ele deseja construir uma máquina de tal forma que ambas, operando juntas, endereçarão 500 envelopes em 2 minutos. O tempo, em minutos, que a segunda máquina demorará para endereçar 500 envelopes sozinha é igual a:

a) 1 .
b) $1\frac{1}{3}$.
c) $1\frac{2}{3}$.
d) 2 .
e) $2\frac{2}{3}$.

19. Trabalhando sozinho, João leva 12 horas a menos do que Pedro leva para fazer o mesmo trabalho. João cobra $R\$120,00$ por hora e Pedro cobra $R\$96,00$ por hora de trabalho. Sabendo que para o cliente o custo é o mesmo se João fizer um quarto do trabalho e Pedro fizer os outros três quartos ou se João fizer dois terços do trabalho e Pedro fizer o terço remanescente, quantas horas João levaria para fazer o trabalho sozinho?

a) 42.
b) 46.
c) 48.
d) 50.
e) 52.

20. Duas velas do mesmo tamanho são acesas simultaneamente. A primeira dura 4 horas e a segunda 3 horas. Em que instante, a partir das 12 horas, as duas velas devem ser acesas, de modo que às 16 horas, o comprimento de uma seja o dobro do comprimento da outra?

a) $13:24$.
b) $13:28$.
c) $13:36$.
d) $13:40$.
e) $13:48$.

21. No quadrado da figura abaixo com 3 linhas e 3 colunas, sabe-se que a soma dos elementos em cada linha e em cada coluna são iguais. O valor de $X+Y-Z$ é igual a:

1	Y	9
9	X	Z
		8

a) 11.
b) 13.
c) 15.
d) 17.
e) 19.

22. Um quadrado mágico de ordem n é um quadrado com n linhas e n colunas, no qual a soma dos elementos em cada linha e em cada coluna é constante e igual a soma dos elementos de cada uma das duas diagonais. O valor de x no quadrado mágico é igual a:

x	19	96
1		

a) 200.
b) 210.
c) 220.
d) 230.
e) 240.

23. Gustavo escolheu alguns pontos sobre uma reta e os pintou de amarelo. A seguir, escolheu outros pontos sobre a mesma reta e os pintou de azul de modo que entre dois pontos amarelos consecutivos houvesse exatamente um ponto azul. Finalmente, escolheu outros pontos sobre a mesma reta, os quais pintou de verde de modo que entre um ponto amarelo e um ponto azul haja exatamente um ponto verde. Se o total de pontos amarelos, azuis e verdes é 505, o número de pontos amarelos é igual a:

a) 121 b) 123 c) 125
d) 127 e) 129.

24. O Sr Santos chega todo dia à estação do metrô às cinco horas. Neste exato instante, seu motorista o apanha e o leva para casa. Num belo dia, o Sr Santos chegou à estação às quatro horas e ao invés de esperar pelo seu motorista até às cinco horas resolve ir andando para casa. No caminho, ele encontra com o seu motorista que o apanha e o leva de carro para a casa e chegam em casa vinte minutos mais cedo do que de costume. Algumas semanas mais tarde, noutro belo dia, o Sr Santos chegou à estação do metrô às quarto horas e trinta minutos e, novamente ao invés de esperar pelo seu motorista ele resolve ir andando para casa e encontra seu motorista no caminho. Este prontamente o apanha e o leva para casa de carro. Desta vez, quantos minutos o Sr Santos chegou em casa mais cedo?

a) 15. b) 10. c) 5.
d) 4. e) 3.

25. Na finalíssima do Campeonato Carioca de Futebol de 2001 o quadro das apostas era a seguinte:

- Para o Flamengo: cada R\$175,00 apostado dava ao apostador R\$100,00.
- Para o Vasco: cada R\$100,00 apostado dava ao apostador R\$155,00.

Assim, por exemplo, se o Flamengo fosse o vencedor do jogo (como realmente o foi) uma pessoa que tivesse apostado R\$175,00 no Flamengo teria de volta seu R\$175,00 e ainda ganharia R\$100,00, enquanto que uma pessoa que tivesse apostando R\$100,00 no Vasco perderia seus R\$100,00.

Supondo que uma casa de apostas tenha aceito 51 apostas a R\$175,00 no Flamengo, o número de apostas a R\$100,00 que ela deve aceitar para que o seu lucro seja o mesmo independentemente de quem ganhe o jogo é igual a:

a) 55. b) 60. c) 65.
d) 70. e) 75.

Coleção **olimpo**

IME ITA

opirus
EDITORA