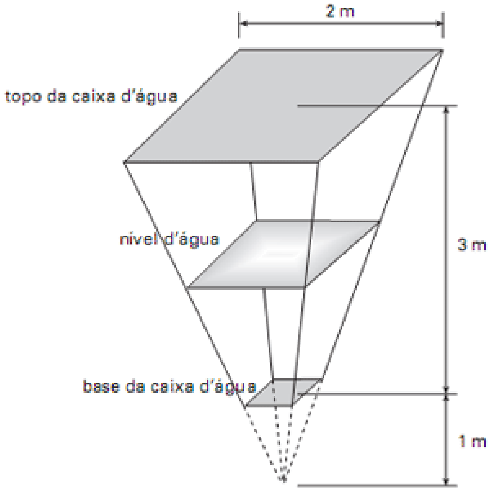
Exercícios de Matemática
Geometria Espacial

1) (FUVEST-2010) Dois planos π_1 e π_2 se interceptam ao longo de uma reta r, de maneira que o ângulo entre eles meça α radianos, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Um triângulo equilátero ABC, de lado ℓ, está contido em π_2, de modo que $\overline{AB}$ esteja em r. Seja D a projeção ortogonal de C sobre o plano π_1, e suponha que a medida θ, em radianos, do ângulo CÂD, satisfaça

$sen\theta = \frac{\sqrt{6}}{4}$.

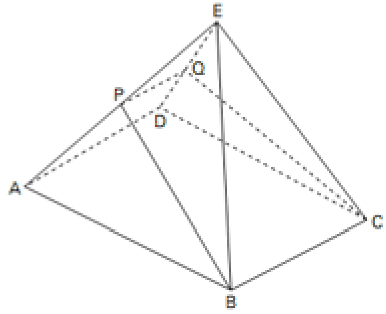
Nessas condições, determine, em função de ℓ,
a) o valor de α.
b) a área do triângulo ABD.
c) o volume do tetraedro ABCD.

2) (UNICAMP-2009) Uma caixa d'água tem o formato de um tronco de pirâmide de bases quadradas e paralelas, como mostra a figura abaixo, na qual são apresentadas as medidas referentes ao interior da caixa.



a) Qual o volume total da caixa d'água?
b) Se a caixa contém (13/6) m^3 de água, a que altura de sua base está o nível d'água?

3) (FUVEST-2009) A figura representa uma pirâmide ABCDE, cuja base é o retângulo ABCD. Sabe-se que



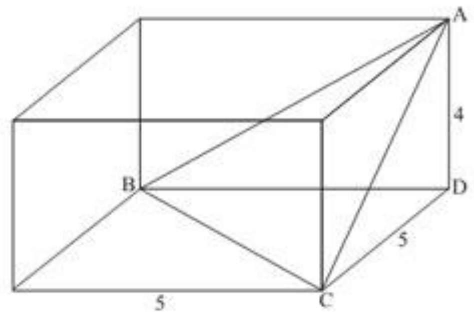
$AB = CD = \frac{\sqrt{3}}{2}$

AD = BC = AE = BE = CE = DE = 1

$AP = DQ = \frac{1}{2}$

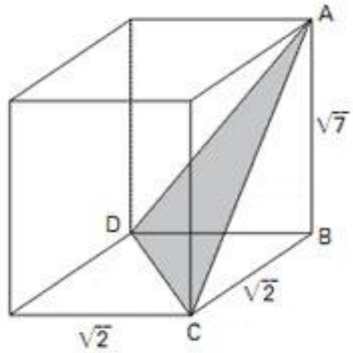
Nessas condições, determine:
a) A medida de BP.
b) A área do trapézio BCQP.
c) O volume da pirâmide BPQCE.

4) (UFSCar-2009) A figura indica um paralelepípedo reto-retângulo de dimensões 5x5x4, em centímetros, sendo A, B, C e D quatro dos seus vértices.



a) Calcule a área do triângulo ABC.
b) Calcule a distância entre o vértice D e o plano que contém o triângulo ABC.

5) (UFSCar-2008) A figura indica um paralelepípedo reto-retângulo de dimensões $\sqrt{2}$ x $\sqrt{2}$ x $\sqrt{7}$, sendo A, B, C e D quatro de seus vértices.



A distância de B até o plano que contém A, D e C é igual a

a) $\dfrac{\sqrt{11}}{4}$

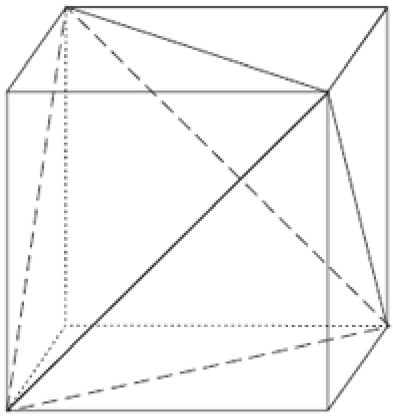
b) $\dfrac{\sqrt{14}}{4}$

c) $\dfrac{\sqrt{11}}{2}$

d) $\dfrac{\sqrt{13}}{2}$

e) $\dfrac{3\sqrt{7}}{2}$

6) (UNIFESP-2007) Quatro dos oito vértices de um cubo de aresta unitária são vértices de um tetraedro regular. As arestas do tetraedro são diagonais das faces do cubo, conforme mostra a figura.

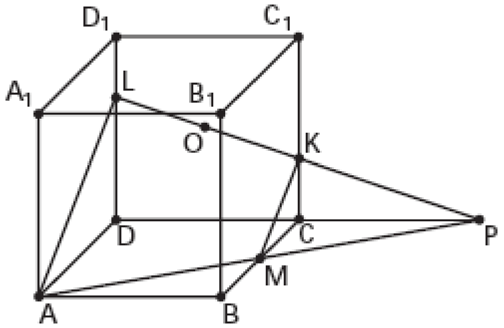


a) Obtenha a altura do tetraedro e verifique que ela é igual a dois terços da diagonal do cubo.
b) Obtenha a razão entre o volume do cubo e o volume do tetraedro.

7) (UFC-2007) $ABCDA_1B_1C_1D_1$ é um paralelepípedo reto-retângulo de bases ABCD e $A_1B_1C_1D_1$, com arestas laterais AA_1, BB_1, CC_1 e DD_1. Calcule a razão entre os volumes do tetraedro A_1BC_1D e do paralelepípedo $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

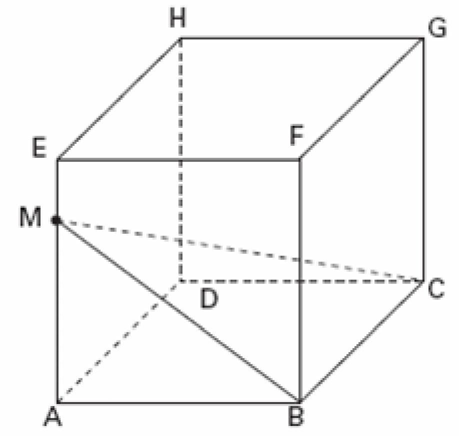
8) (UFC-2007) Os centros de três esferas não são colineares. Assinale a opção que corresponde ao maior número possível de planos tangentes a todas elas.
a) 2
b) 4
c) 6
d) 8
e) 10

9) (UNICAMP-2007) Seja $ABCDA_1B_1C_1D_1$ um cubo com aresta de comprimento 6cm e sejam M o ponto médio de BC e O o centro da face CDD_1C_1, conforme mostrado na figura ao lado.



a) Se a reta AM intercepta a reta CD no ponto P e a reta PO intercepta CC_1 e DD_1 em K e L, respectivamente, calcule os comprimentos dos segmentos CK e DL.
b) Calcule o volume do sólido com vértices A, D, L, K, C e M.

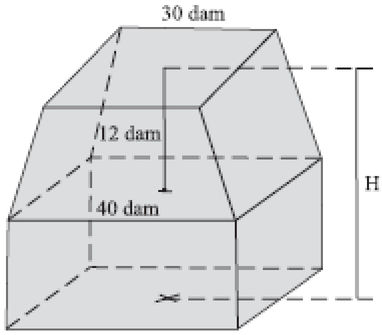
10) (FUVEST-2007) O cubo ABCDEFGH possui arestas de comprimento a.
O ponto M está na aresta AE e AM = 3 . ME.



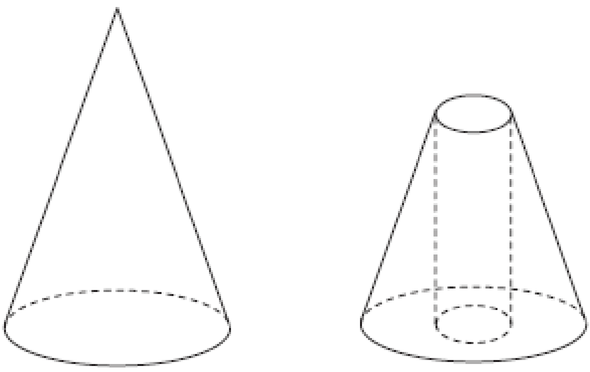
Calcule:
a) O volume do tetraedro BCGM.
b) A área do triângulo BCM.
c) A distância do ponto B à reta suporte do segmento ? CM.

11) (VUNESP-2007) Para calcularmos o volume aproximado de um iceberg, podemos compará-lo com sólidos geométricos conhecidos. O sólido da figura, formado por um tronco de pirâmide regular de base quadrada e um paralelepípedo reto-retângulo, justapostos pela base, representa aproximadamente um iceberg no momento em que se desprendeu da calota polar da Terra.
As arestas das bases maior e menor do tronco de pirâmide medem, respectivamente, 40dam e 30dam, e a altura mede 12dam.

Passado algum tempo do desprendimento do iceberg, o seu volume era de 23100dam³, o que correspondia a 3/4 do volume inicial. Determine a altura H, em dam, do sólido que representa o iceberg no momento em que se desprendeu.



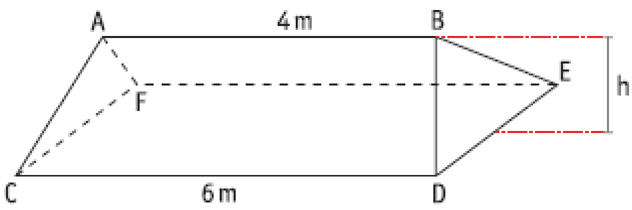
12) (FUVEST-2006) Um torneiro mecânico dispõe de uma peça de metal maciça na forma de um cone circular reto de 15cm de altura e cuja base B tem raio 8cm (Figura 1). Ele deverá furar o cone, a partir de sua base, usando uma broca, cujo eixo central coincide com o eixo do cone. A broca perfurará a peça até atravessá-la completamente, abrindo uma cavidade cilíndrica, de modo a obter-se o sólido da Figura 2. Se a área da base deste novo sólido é $\frac{2}{3}$ da área de B, determine seu volume.



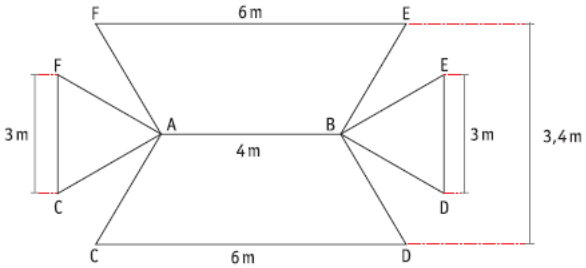
Antes
Figura 1

Depois
Figura 2

13) (UERJ-2006) Observe as figuras a seguir:



(I)



(II)

A figura I mostra a forma do toldo de uma barraca, e a figura II, sua respectiva planificação, composta por dois trapézios isósceles congruentes e dois triângulos.

Calcule:

a) a distância h da aresta AB ao plano CDEF;

b) o volume do sólido de vértices A, B, C, D, E e D, mostrado na figura I, em função de h.

14) (UFBA-2006) Com relação a um prisma reto de base quadrada, é correto afirmar:

01. Cada diagonal de uma face divide-a em dois triângulos congruentes.

02. Existem exatamente 8 segmentos que ligam pares de vértices não pertencentes a uma mesma face.

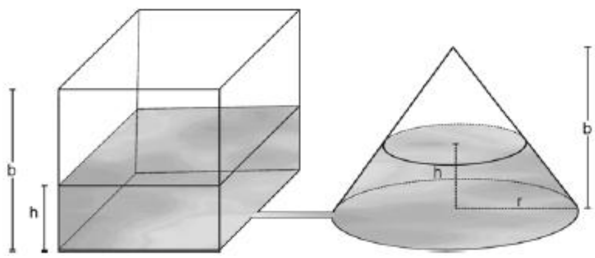
04. Dadas duas faces não adjacentes e quatro vértices, dois em cada uma dessas faces, existe um plano que contém esses quatro vértices.

08. Dados dois vértices consecutivos, para cada n $\in \{1,3,5,7\}$ existe um caminho poligonal que liga esses vértices e é formado por n arestas, cada uma percorrida uma única vez.

16. Se a medida do lado da base e a altura do prisma são números inteiros consecutivos, e o volume é um número primo p, então p é único.

32. Existem exatamente 24 pirâmides distintas cujas bases são faces do prisma e cujos vértices são também vértices do prisma.

15) (UFBA-2005)



A figura representa dois tanques: um deles com a forma de um cubo de aresta b, e o outro com a forma de um cone circular reto, de altura também b e raio da base medindo r. Os tanques têm a mesma capacidade, estão com suas bases sobre um terreno horizontal plano e são ligados por um tubo, de modo que o nível de água, representado por h, seja o mesmo. Considere $V_1(h)$ e $V_2(h)$ os volumes de água no primeiro e no segundo tanque, respectivamente. Com base nessas informações e desprezando a espessura das paredes dos tanques,

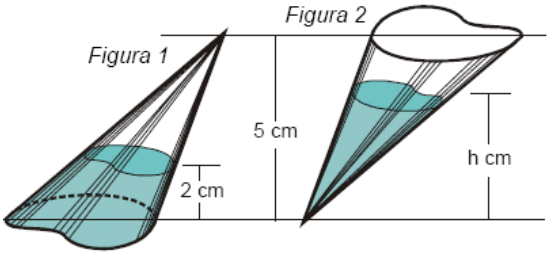
determine o valor de $\frac{h}{b}$, de modo que $V_2(h) = 3V_1(h)$, com $h \neq 0$.

16) (FATEC-2005) Um cilindro circular reto tem volume igual a 250π cm^3. Um plano, paralelo ao eixo desse cilindro, à distância de x cm desse eixo, determina uma seção retangular de área igual a 60 cm^2. Se a medida da altura do cilindro é igual ao dobro da medida do raio da base, então x é igual a

a) $\frac{9}{2}$
b) 4
c) $2\sqrt{3}$
d) $\frac{13}{4}$
e) $\sqrt{10}$

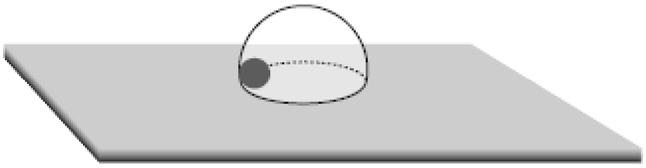
17) (UFV-2005) O interior de uma jarra é um cilindro circular reto e contém V litros de água. Se fosse retirado 1 litro desta água, o raio, o diâmetro e a altura da água, nesta ordem, formariam uma progressão aritmética. Se, ao contrário, fosse adicionado 1 litro de água na jarra, essas grandezas, na mesma ordem, formariam uma progressão geométrica. O valor de V é:
a) 6
b) 4
c) 9
d) 7
e) 5

18) (UFRJ-2005) Uma ampola de vidro tem o formato de um cone cuja altura mede 5 cm. Quando a ampola é posta sobre uma superfície horizontal, a altura do líquido em seu interior é de 2 cm (Figura 1).



Determine a altura h do líquido quando a ampola é virada de cabeça para baixo (Figura 2).
Lembrete : volume do cone = $\frac{(\text{área da base}) \times (\text{altura})}{3}$

19) (UERJ-2005) Uma cuba de superfície semi-esférica, com diâmetro de 8 cm, está fixada sobre uma mesa plana. Uma bola de gude de forma esférica, com raio igual a 1 cm, encontra-se sob essa cuba.



Desprezando a espessura do material usado para fabricar a cuba, determine:
a) a maior área, em cm^2, pela qual a bola de gude poderá se deslocar na superfície da mesa;
b) o volume, em cm^3, da maior esfera que poderia ser colocada embaixo dessa cuba.

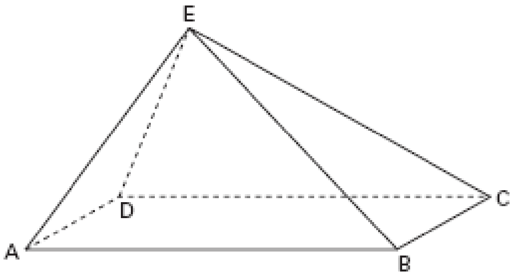
20) (UFC-2005) Num tetraedro ABCD vale a igualdade $\overline{DA} = \overline{DB} = \overline{DC}$ = a e o triângulo ABC é eqüilátero com $\overline{AB}$ = b. O comprimento da altura do tetraedro baixada do vértice A é igual a:

a) $\frac{a+b}{2}$
b) $\sqrt{ab}$
c) $\frac{b\sqrt{3a^2 - b^2}}{a}$
d) $b.\frac{\sqrt{3a^2 - b^2}}{\sqrt{4a^2 - b^2}}$
e) $a.\frac{\sqrt{4a^2 - b^2}}{\sqrt{a+b}}$

21) (FMTM-2005) Sejam V_1 e V_2 volumes de dois cilindros retos de altura 1 metro e raios da base, em metros, respectivamente iguais a R e 2R-1. Sendo $V_1 > V_2$, o maior valor possível de $V_1 - V_2$, em m³, é

a) $\frac{3\pi}{4}$
b) $\frac{2\pi}{4}$
c) $\frac{2\pi}{4}$
d) $\frac{\pi}{3}$
e) $\frac{\pi}{6}$

22) (Fuvest-2005) A base ABCD da pirâmide ABCDE é um retângulo de lados AB = 4 e BC = 3. As áreas dos triângulos ABE e CDE são, respectivamente, $4\sqrt{10}$ e $2\sqrt{37}$. Calcule o volume da pirâmide.



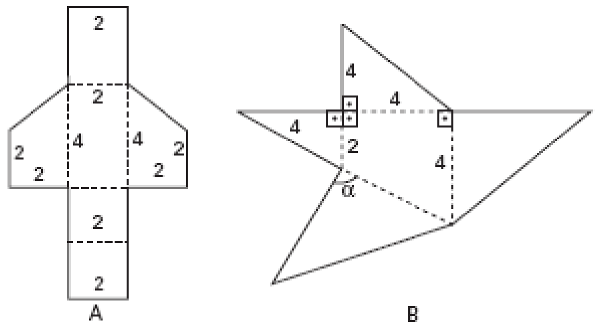
23) (ITA-2005) Um dos catetos de um triângulo retângulo mede $\sqrt[3]{2}$ cm. O volume do sólido gerado pela rotação deste triângulo em torno da hipotenusa é π cm^3. Determine os ângulos deste triângulo.

24) (ITA-2005) Em relação a um sistema de eixos cartesiano ortogonal no plano, três vértices de um tetraedro regular são dados por A = (0, 0), B = (2, 2) e C =$(1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3})$. O volume do tetraedro é

a) $\frac{8}{3}$
b) 3
c) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$
d) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$
e) 8

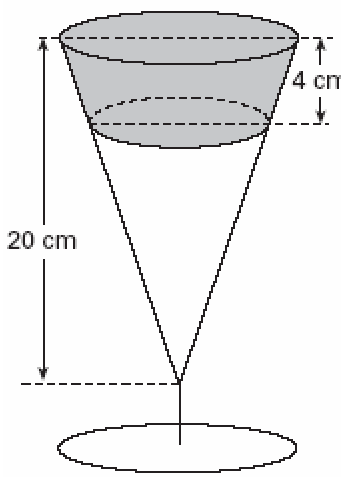
25) (ITA-2005) Uma esfera de raio r é seccionada por n planos meridianos. Os volumes das respectivas cunhas esféricas contidas em uma semi-esfera formam uma progressão aritmética de razão $\frac{\pi r^2}{45}$. Se o volume da menor cunha for igual a $\frac{\pi r^3}{18}$, então n é igual a
a) 4.
b) 3.
c) 6.
d) 5.
e) 7.

26) (FGV-2005) O ângulo α indicado na figura B, é igual a



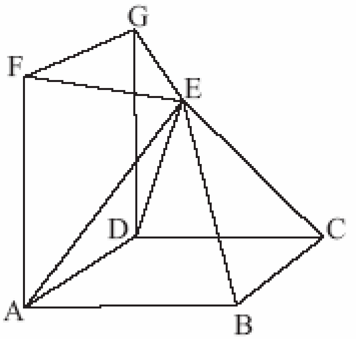
a) arccos $-\frac{1}{5}$
b) arccos $\frac{1}{5}$
c) arccos $-\frac{24}{25}$
d) arcsen $\frac{24}{25}$
e) arcsen 1

27) (Mack-2005) Uma mistura de leite batido com sorvete é servida em um copo, como na figura. Se na parte superior do copo há uma camada de espuma de 4cm de altura, então a porcentagem do volume do copo ocupada pela espuma está melhor aproximada na alternativa:



a) 65%
b) 60%
c) 50%
d) 45%
e) 70%

28) (UFSCar-2005) As bases ABCD e ADGF das pirâmides ABCDE e ADGFE são retângulos e estão em planos perpendiculares. Sabe-se também que ABCDE é uma pirâmide regular de altura 3 cm e apótema lateral 5 cm, e que ADE é face lateral comum às duas pirâmides.

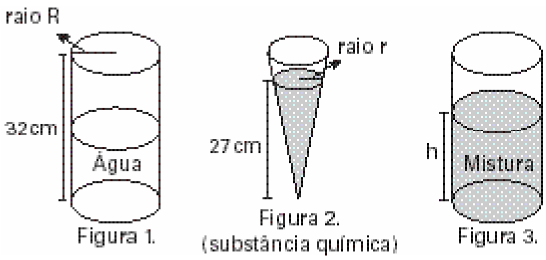


Se a aresta AF é 5% maior que a aresta AD, então o volume da pirâmide ADGFE, em cm^3, é
a) 67,2.
b) 80.
c) 89,6.
d) 92,8.
e) 96.

29) (ITA-2005) A circunferência inscrita num triângulo equilátero com lados de 6cm de comprimento é a interseção de uma esfera de raio igual a 4cm com o plano do triângulo. Então, a distância do centro da esfera aos vértices do triângulo é (em cm)
a) $3\sqrt{3}$
b) 6.
c) 5.
d) 4.
e) $2\sqrt{5}$

30) (IBMEC-2005) Considere um cone circular reto de altura 24 e raio da base 10. Suponha que o segmento AB seja uma corda da circunferência da base que diste 5 do seu centro C. Então, sendo V o vértice do cone, o volume do tetraedro ABCV é igual a
a) $200\sqrt{3}$
b) $400\sqrt{3}$
c) $600\sqrt{3}$
d) $800\sqrt{3}$
e) $1000\sqrt{3}$

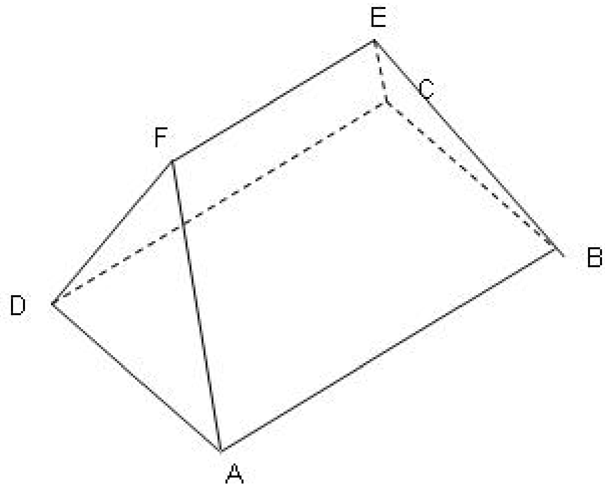
31) (Vunesp-2004) Um recipiente, na forma de um cilindro circular reto de raio R e altura 32cm, está até à metade com água (figura 1). Outro recipiente, na forma de um cone circular reto, contém uma substância química que forma um cone de altura 27cm e raio r (figura 2).



a) Sabendo que R = (3/2)r, determine o volume da água no cilindro e o volume da substância química no cone, em função de r. (Para facilitar os cálculos, use a aproximação $\pi = 3$.)
b) A substância química do cone é despejada no cilindro, formando uma mistura homogênea (figura 3). Determine a concentração (porcentagem) da substância química na mistura e a altura h atingida pela mistura no cilindro.

32) (Unicamp-2004) O quadrilátero convexo ABCD, cujos lados medem, consecutivamente, 1, 3, 4 e 6cm, está inscrito em uma circunferência de centro O e raio R.
a) Calcule o raio R da circunferência.
b) Calcule o volume do cone reto cuja base é o círculo de raio R e cuja altura mede 5cm.

33) (Fuvest-2004)

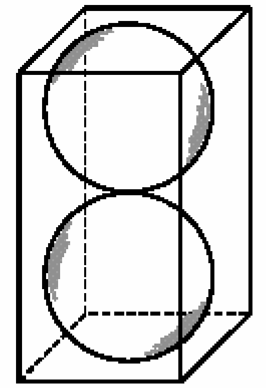


No sólido S representado na figura a cima, a base ABCD é um retângulo de lados AB = 2x e AD = x; as faces ABEF e DCEF são trapézios; as faces ADF e BCE são triângulos equiláteros e o segmento EF tem comprimento x.
Determinar, em função de x, o volume de S.

34) (Fuvest-2004) A pirâmide de base retangular ABCD e vértice E representada na figura tem volume 4. Se M é o ponto médio da aresta AB e V é o ponto médio da aresta EC , então o volume da pirâmide de base AMCD e vértice V é:

a) 1
b) 1,5
c) 2
d) 2,5
e) 3

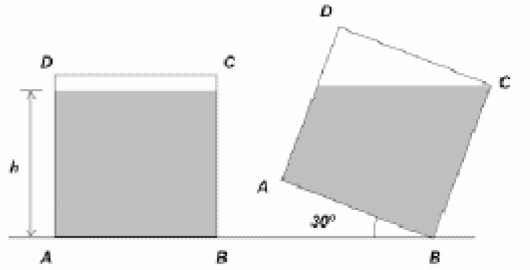
35) (Fatec-2003) Duas esferas maciças iguais e tangentes entre si estão inscritas em um paralelepípedo reto-retângulo oco, como mostra a figura abaixo. Observe que cada esfera tangencia as quatro faces laterais e uma das bases do paralelepípedo.



O espaço entre as esferas e o paralelepípedo está preenchido com um líquido. Se a aresta da base do paralelepípedo mede 6 cm, o volume do líquido nele contido, em litros, é aproximadamente igual a
a) 0,144
b) 0,206
c) 1,44
d) 2,06
e) 20,6

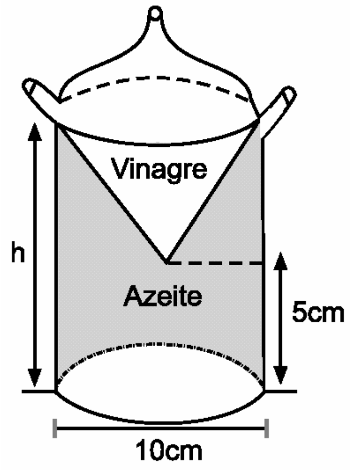
36) (UFMG-2003) Considere um tetraedro regular de vértices A, B, C e D, cujas arestas medem r. Considere, ainda, que M e N são pontos médios das arestas BD e CD, respectivamente.
CALCULE a área do triângulo AMN.

37) (UFMG-2003) Um recipiente cúbico, sem tampa, com arestas medindo 12 cm, está apoiado em um plano horizontal e contém água até um nível de h cm. Ao se inclinar esse recipiente sobre uma de suas arestas, de maneira que a face inferior faça um ângulo de 30^o com o plano horizontal, são derramados 300 cm^3 de água, conforme mostrado nestas figuras.



DETERMINE o valor de h.

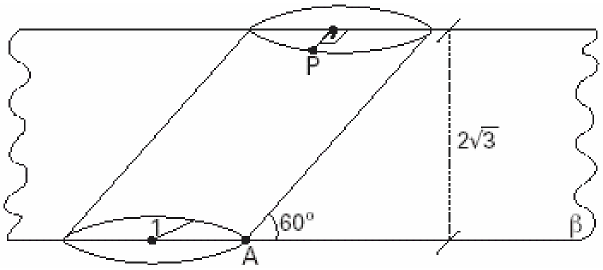
38) (UFSCar-2003) A figura representa um galheteiro para a colocação de azeite e vinagre em compartimentos diferentes, sendo um cone no interior de um cilindro.



Considerando h como a altura máxima de líquido que o galheteiro comporta e a razão entre a capacidade total de azeite e vinagre igual a 5, o valor de h é
a) 7 cm
b) 8 cm
c) 10 cm
d) 12 cm
e) 15 cm

39) (Unicamp-2003) Considere um cubo cuja aresta mede 10cm. O sólido cujos vértices são os centros das faces do cubo é um octaedro regular, cujas faces são triângulos eqüiláteros congruentes.
a) Calcule o comprimento da aresta desse octaedro regular.
b) Calcule o volume do mesmo octaedro.

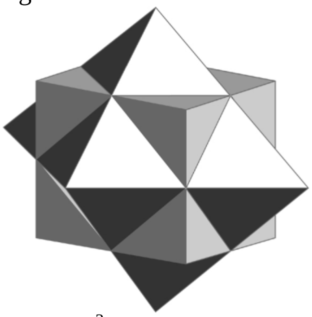
40) (Fuvest-2003) Um cilindro oblíquo tem raio das bases igual a 1, altura $2\sqrt{3}$ e está inclinado de um ângulo de 60° (ver figura). O plano β é perpendicular às bases do cilindro, passando por seus centros. Se P e A são os pontos representados na figura, calcule PA.



41) (Fatec-2002) Divide-se a altura de um cone circular reto de volume V em três partes de medidas iguais. Pelos pontos de divisão são traçados planos paralelos à base. O volume do tronco de cone compreendido entre esses planos é igual a

a) $\frac{1}{27}$ V
b) $\frac{5}{27}$ V
c) $\frac{7}{27}$ V
d) $\frac{8}{27}$ V
e) V

42) (UEL-2002) As superfícies de um cubo e de um octaedro regular interpenetram-se, dando origem à figura **F** mostrada abaixo. Sobre cada face do cubo elevam-se pirâmides que têm a base quadrada e as faces em forma de triângulos eqüiláteros. Os vértices das bases das pirâmides estão localizados nos pontos médios das arestas do cubo e do octaedro. A aresta do cubo mede 2 cm. Qual o volume do sólido limitado pela figura **F** ?



a) 12 cm^3
b) 14 cm^3
c) 16 cm^3
d) 18 cm^3
e) 20 cm^3

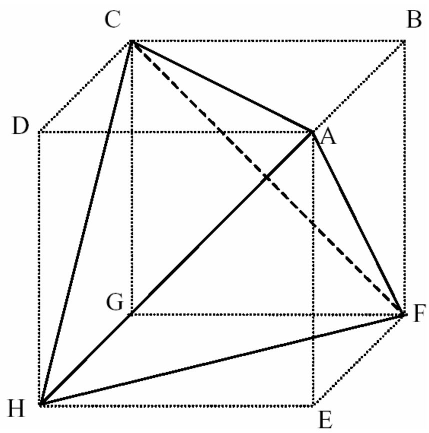
43) (OMU-2002) As medidas, em centímetros, das arestas de um paralelepípedo são números inteiros ímpares consecutivos e a área lateral total do mesmo é de $142cm^2$. Qual é o volume do paralelepípedo?

44) (UECE-2002) A face ABC do tetraedro VABC é um triângulo equilátero de lado 3cm e a reta passando pelo vértice V e perpendicular a esta face intercepta-a em seu centro O. Se a aresta VA do tetraedro é 5cm então a medida, em cm, do segmento VO é:

a) $\sqrt{15}$
b) $\sqrt{18}$
c) $\sqrt{20}$
d) $\sqrt{22}$

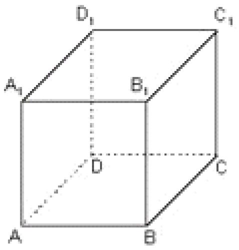
45) (UFC-2002) Sejam P_1 e P_2 dois pontos quaisquer interiores a um tetraedro regular. Sejam d_1, a soma das distâncias de P_1 às faces do tetraedro regular, e d_2, a soma das distâncias de P_2 às faces do tetraedro regular. Mostre que $d_1 = d_2$.

46) (UFSCar-2002) Na figura, os pontos ACFH são os vértices de um tetraedro inscrito em cubo de lado 3. O volume do tetraedro é



a) $\frac{27}{8}$
b) $\frac{9\sqrt{39}}{8}$
c) 9
d) $\frac{27\sqrt{13}}{8}$
e) 18

47) (Unicamp-2002) O sólido da figura ao lado é um cubo cuja aresta mede 2cm.

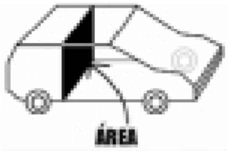


a) Calcule o volume da pirâmide $ABCD_1$.
b) Calcule a distância do vértice A ao plano que passa pelos pontos B, C e D_1.

48) (PUC-SP-2002) Normalmente, quando andamos sob chuva, as gotas que caem não nos machucam. Isso ocorre porque as gotas d'água não estão em queda livre, mas sujeitas a um movimento no qual a resistência do ar não pode ser desconsiderada.
A resistência do ar é uma força cujo sentido é sempre contrário ao sentido do movimento do objeto e seu valor é tanto maior quanto maior for a velocidade do corpo em movimento. Para uma gota em queda, a velocidade aumenta até um valor máximo denominado **velocidade limite**. Como as gotas têm, em geral, pequena massa e baixa velocidade limite - **em média 18km/h** - o impacto, normalmente, não nos causa sensação dolorosa.
Os textos abaixo se relacionam com o descrito.
Leia-os com atenção e responda o que se solicita.

TEXTO 1 CORTANDO O AR
"Vencer a resistência do ar ao deslocamento do carro é função da aerodinâmica. A forma ideal de qualquer modelo seria a criada pela natureza na gota d'água", explica o chefe de Design da Volkswagen do Brasil, Luiz Alberto Veiga (que preparou para o jornal "O Estado de S. Paulo" os desenhos do quadro abaixo).

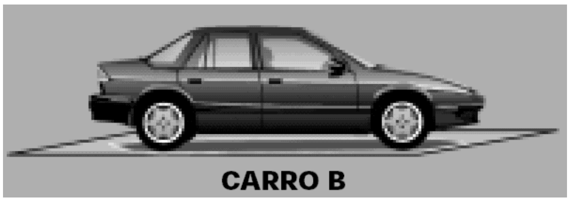
TEXTO 2 CALCULANDO A FORÇA DE RESISTÊNCIA DO AR
Qualquer objeto em movimento com velocidade v sujeito à resistência do ar (F_{res}), tem a ele associado um número chamado coeficiente de arrasto aerodinâmico, indicado por C_x. Quanto menor o coeficiente, melhor a aerodinâmica. O C_x é uma grandeza adimensional e seu valor para automóveis, normalmente, varia entre 0,3 e 0,9.



A área (A) do objeto, voltada para o movimento, também, tem uma influência importante na resistência do ar.
Para entender que área é essa, observe-a, por exemplo, na figura ao lado:
Outro fator importante a considerar é a densidade do ar (d). Um mesmo objeto, movimentando-se a uma mesma velocidade, sofre menor resistência em um local em que o ar seja menos denso.
Há uma fórmula que relaciona todas as grandezas que discutimos até aqui e que permite calcular o valor da força de resistência do ar que atua sobre os objetos na maioria das situações:

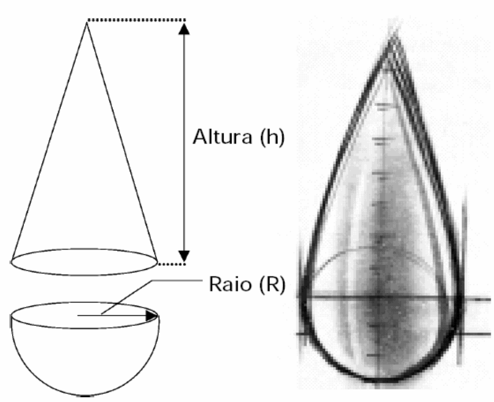
$$|F_{res}| = \frac{1}{2}\, d \,.\, A \,.\, C_x \,.\, v^2$$

QUESTÕES
A) De acordo com as informações contidas nos textos e figuras, analise as ilustrações abaixo e identifique qual dos veículos possui o maior valor para o coeficiente de arrasto aerodinâmico. Justifique.



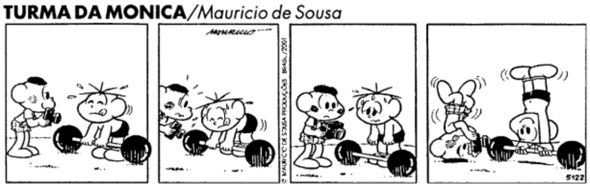
B) Suponha uma gota de chuva, em queda livre, após desprender-se de uma nuvem situada a 1280m de altura. Calcule a velocidade da gota ao atingir o solo e determine quantas vezes o valor encontrado é maior do que a velocidade limite citada no texto de introdução. Considere a gota inicialmente em repouso em relação ao solo.
C) O fato de as gotas de chuva atingirem a velocidade limite indica uma situação em que foi atingido o equilíbrio dinâmico. Quais forças se equilibram, a partir desse momento? Identifique o tipo de movimento que será executado pela gota a partir desse instante, justificando sua resposta.
D) Considere uma gota de chuva de massa 0,2g, em situação de equilíbrio dinâmico. Para a expressão dada no texto 2, assuma o produto $\frac{1}{2} \cdot d \cdot A$ como uma constante de valor $8 \cdot 10^{-4}$ (unidades do Sistema Internacional).

Calcule o valor de C^x para a gota de chuva considerando que a velocidade limite em sua queda é de 5m/s.
E) Numa boa aproximação, uma gota d'água pode ser considerada como o resultado da união de dois sólidos: uma semi-esfera e um cone (veja a figura seguinte). Calcule a relação entre a altura (h) do cone e o raio (R) da semi-esfera, considerando que seus volumes são iguais.



49) (PUC-SP-2002) A tira seguinte mostra o Cebolinha tentando levantar um haltere, que é um aparelho feito de ferro, composto de duas esferas acopladas a um bastão cilíndrico.

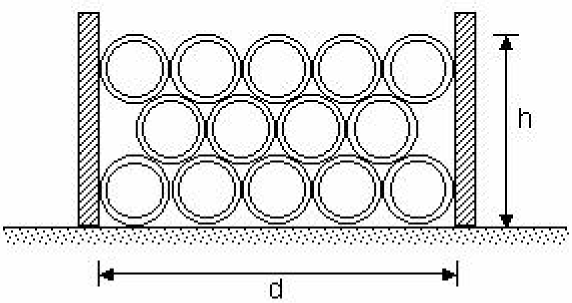
TURMA DA MONICA/*Mauricio de Sousa*



Suponha que cada esfera tenha 10,5 cm de diâmetro e que o bastão tenha 50 cm de comprimento e diâmetro da base medindo 1,4 cm. Se a densidade do ferro é 7,8 g/cm^3, quantos quilogramas, aproximadamente, o Cebolinha tentava levantar? (Use: $\pi = 22/7$)

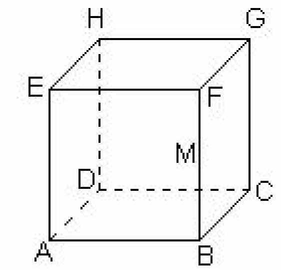
a) 18
b) 16
c) 15
d) 12
e) 10

50) (UFPR-2002) Uma fábrica produz tubos de concreto com o formato de cilindro circular reto, oco, de 1 m de comprimento e raios interno e externo de 45 cm e 50 cm, respectivamente. No pátio da fábrica, esses tubos ficam depositados em pilhas, conforme ilustração abaixo. Considere que as seguintes letras designem as medidas, relativas a uma dessas pilhas: h - altura, em cm; d - distância, em cm, entre os dois suportes verticais que sustentam os tubos empilhados; v - volume, em cm^3, de todo o concreto contido nos tubos. Assim, é correto afirmar:



d = 5 x 90
d = 5 x 100
v = 14 x 47000π
v = 14 x 47500π
h = 100($\sqrt{3}$ + 1)
h = 100($\sqrt{3}$ – 1)

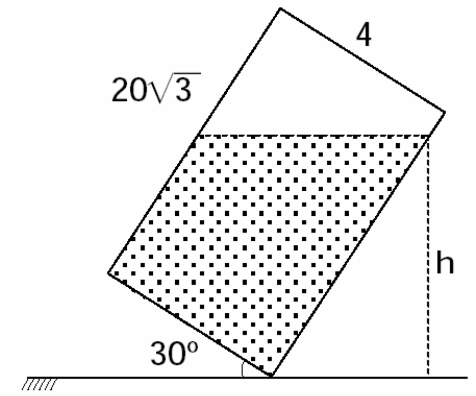
51) (UFPR-2002) Na figura abaixo está representado um cubo de aresta 6 m, com a face ABCD na posição horizontal. Um plano $\boldsymbol{\alpha}$ contém a aresta EH e o ponto médio **M** da aresta BF. Assim, é correto afirmar:



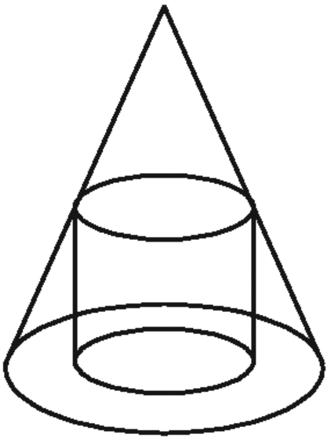
O plano α é perpendicular à face EABF
As intersecções de α com as faces EABF e DCGH são paralelos

a) O comprimento do segmento EM é 3$\sqrt{3}$ m
b) A parte do cubo que está acima do plano α é uma pirâmide
c) A área do trapézio ABME é 27 m^2
d) A parte do cubo que está abaixo do plano α tem volume igual a 162 m^3.

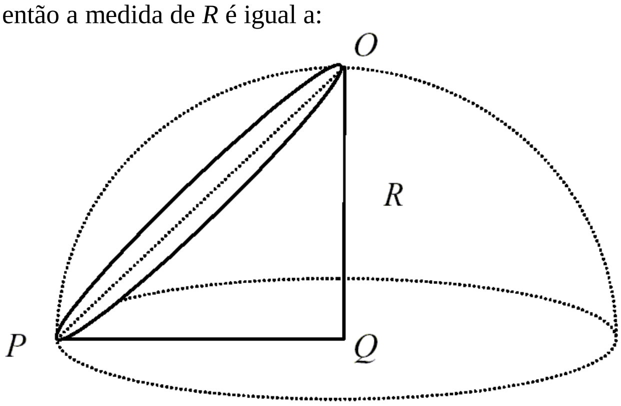
52) (Fuvest-2002) Um bloco retangular (isto é, um paralelepípedo reto-retângulo) de base quadrada de lado 4cm e altura 20$\sqrt{3}$ cm, com $\frac{2}{3}$ de seu volume cheio de água, está inclinado sobre uma das arestas da base, formando um ângulo de 30° com o solo (ver seção lateral abaixo). Determine a altura h do nível da água em relação ao solo.



53) (Mauá-2001) Um cilindro circular reto de altura *h* e raio *r* da base está inscrito em um cone circular reto de altura
H e raio *R* da base. Sendo *R* = 2*r*, determine a relação entre os seus volumes.



54) (UNIUBE-2001) Considere um cone reto inscrito em uma semi-esfera de raio *R*, em que $P\hat{Q}O = \pi/2$ radianos e cuja
base do cone tenha diâmetro *PO*, como na figura abaixo. Se o volume do cone é igual a $18\sqrt{2}\,\pi$ cm^3, então a medida de *R* é igual a:



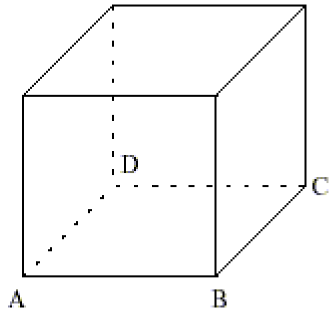
a) 12 cm

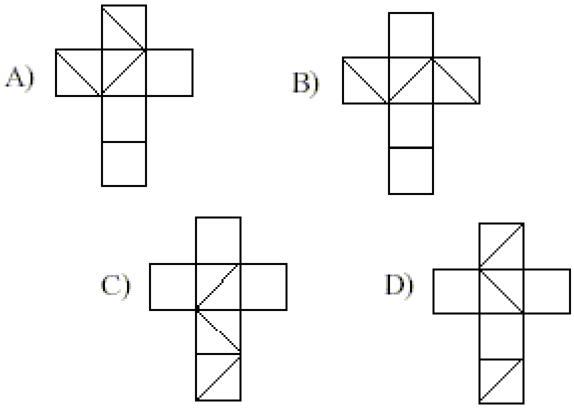
b) $6\sqrt[3]{2}$ cm

c) $3\sqrt[3]{2}$ cm

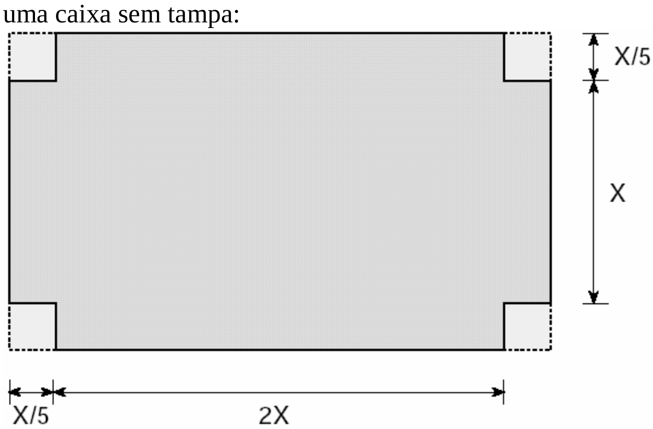
d) 6 cm

55) (UNIUBE-2001) Considere o cubo representado na figura abaixo, cuja base é o quadrado ABCD. Qual das figuras, a seguir, representa uma planificação deste cubo na qual a linha em negrito representa a sua intersecção com um plano, que passa por uma das diagonais do quadrado ABCD e por exatamente um vértice da face paralela à base?



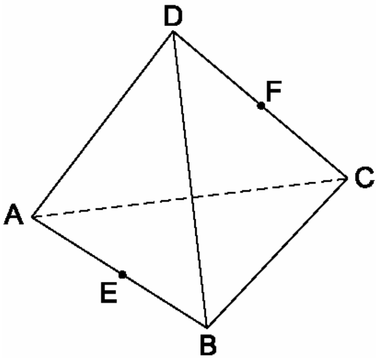


56) (Unicamp-2001) A figura abaixo é a planificação de uma caixa sem tampa:



a) Encontre o valor de x, em centímetros, de modo que a capacidade dessa caixa seja de 50 litros.
b) Se o material utilizado custa R$ 10,00 por metro quadrado, qual é o custo de uma dessas caixas de 50 litros considerando-se apenas o custo da folha retangular plana?

57) (Fuvest-2001) Na figura abaixo, ABCD é um tetraedro regular de lado **a**. Sejam E e F os pontos médios de AB e CD , respectivamente. Então, o valor de EF é:



a) $\frac{a}{2}$

b) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

c) $\frac{a\sqrt{2}}{4}$

d) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

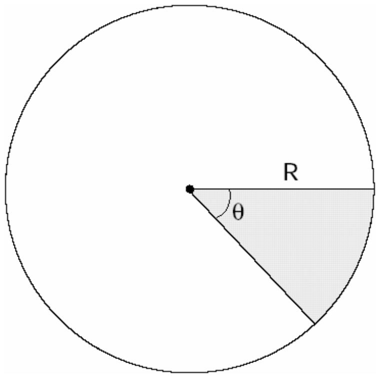
e) $\frac{a\sqrt{3}}{4}$

58) (Unicamp-2001) A base de uma pirâmide é um triângulo eqüilátero de lado L = 6cm e arestas laterais das faces A= 4cm.
a) Calcule a altura da pirâmide.
b) Qual é o raio da esfera circunscrita à pirâmide?

59) (Unicamp-2000) Seja P um ponto do espaço eqüidistante dos vértices A, B e C de um triângulo cujos lados medem 8cm, 8cm e 9,6cm. Sendo d(P, A) = 10cm, calcule:

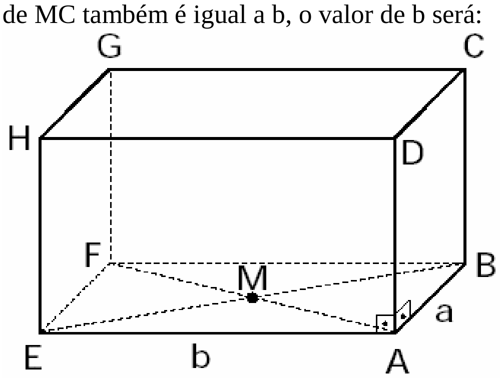
a) o raio da circunferência circunscrita ao triângulo ABC;
b) a altura do tetraedro, não regular, cujo vértice é o ponto P e cuja base é o triângulo ABC.

60) (Fuvest-2000) Um setor circular, com ângulo central θ $(0 < \theta < 2\pi)$, é recortado de um círculo de papel de raio R (ver figura). Utilizando o restante do papel, construímos a superfície lateral de um cone circular reto.



Determine, em função de R e θ,
a) o raio da base do cone.
b) o volume do cone.

61) (Fuvest-2000) No paralelepípedo reto retângulo da figura abaixo, sabe-se que AB = AD = a, AE = b e que M é a
intersecção das diagonais da face ABFE. Se a medida de MC também é igual a b, o valor de b será:



a) $\sqrt{2}$ a

b) $\sqrt{\frac{3}{2}}$ a

c) $\sqrt{\frac{7}{5}}$ a

d) $\sqrt{3}$ a

e) $\sqrt{\frac{5}{3}}$ a

62) (AFA-1999) Qual o volume, em cm^3, da esfera inscrita em um cone reto, cuja altura e diâmetro da base são, respectivamente, 16 cm e 24 cm.?

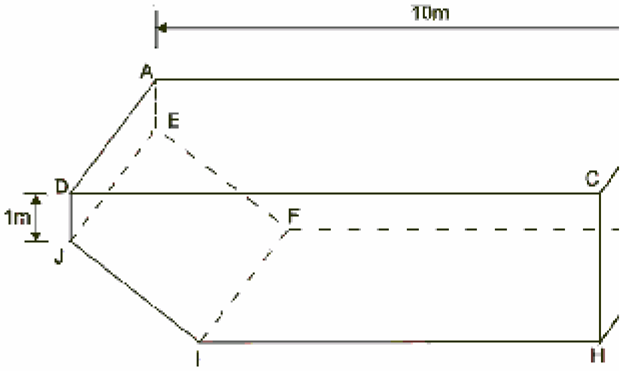
a) 27π

b) $\frac{500}{3}\pi$

c) 288π

d) 686π

63) (UFMG-1999) Observe a figura.



Essa figura representa uma piscina retangular com 10 m de comprimento e 7 m de largura. As laterais AEJD e BGHC são retângulos, situados em planos perpendiculares ao plano que contém o retângulo ABCD. O fundo da piscina tem uma área total de 77 m^2 e é formado por dois retângulos, FGHI e EFIJ. O primeiro desses retângulos corresponde à parte da piscina onde a profundidade é de 4 m e o segundo, à parte da piscina onde a profundidade varia entre 1 m e 4 m. A piscina, inicialmente vazia, recebe água à taxa de 8.000 litros por hora.

Assim sendo, o tempo necessário para encher totalmente a piscina é de:

a) 29 h e 30 min
b) 30 h e 15 min
c) 29 h e 45 min
d) 30 h e 25 min

64) (Unicamp-1999) Cada aresta de um tetraedro regular mede 6 cm. Para este tetraedro, calcule:

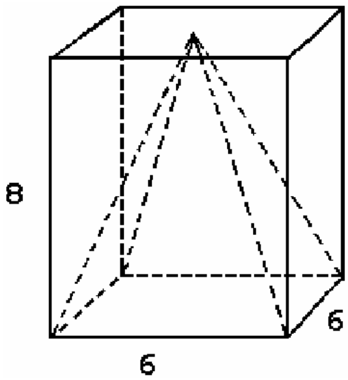
a) a distância entre duas arestas opostas, isto é, entre duas arestas que não têm ponto comum;
b) o raio da esfera inscrita no tetraedro.

65) (UFPR-1999) Considerando o cilindro de revolução obtido pela rotação do retângulo ABCD em torno do lado AB e sabendo que os lados AB e BC do retângulo medem 4 cm e 2 cm, respectivamente, é correto afirmar:

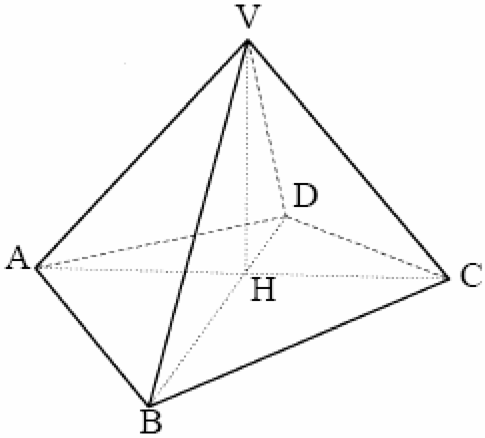
01. A seção do cilindro por um plano que contém AB é um quadrado.
02. A seção do cilindro por um plano perpendicular a AB é um círculo.
04. Os planos que contêm as bases do cilindro são paralelos entre si.
08. A área total do cilindro é menor do que a área da superfície esférica de raio 2 cm.
16. O volume do cilindro é o dobro do volume do cone de revolução obtido pela rotação do triângulo ABD em torno de AB.

Dê, como resposta, a soma das afirmações corretas.

66) (Fuvest-1999) Considere uma caixa sem tampa com a forma de um paralelepípedo reto de altura 8 m e base quadrada de lado 6 m. Apoiada na base, encontra-se uma pirâmide sólida reta de altura 8 m e base quadrada com lado 6 m. O espaço interior à caixa e exterior à pirâmide é preenchido com água, até uma altura h, a partir da base ($h \le 8$). Determine o volume da água para um valor arbitrário de h, $0 \le h \le 8$.



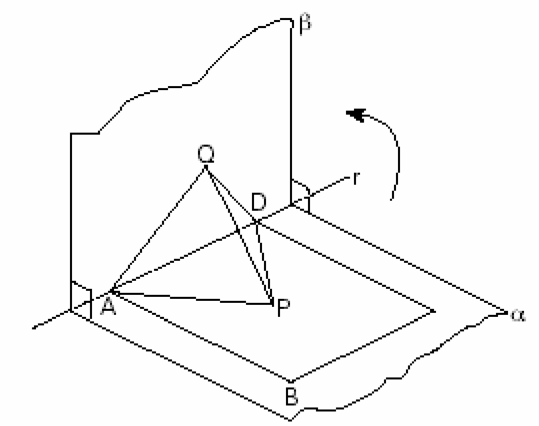
67) (UERJ-1998) A figura do R^3 representa uma pirâmide de base quadrada ABCD em que as coordenadas são A (0,0,0), B (4,2,4) e C (0,6,6), e o vértice V é eqüidistante dos demais.



A partir da análise dos dados fornecidos, determine:
a) as coordenadas do vértice D e a medida de cada aresta de base;
b) as coordenadas cartesianas do ponto V, considerando que o volume da pirâmide é igual a 72.

68) (Vunesp-1998) Considere um cone circular reto cuja altura e cujo raio da base são indicados, respectivamente por h e r. Na circunferência da base, tome dois pontos, A e B, tais que AB = r e considere o plano α determinado por A, B e o vértice do cone. Prove que o ângulo formado pelo eixo do cone e o plano α mede 30° se, e somente se, $h = \frac{3r}{2}$.

69) (Vunesp-1998) Na figura, os planos α e β são perpendiculares e se interceptam segundo a reta r. Os pontos A, B, C e D, com A e D em r, são os vértices de um quadrado e P é o ponto de interseção das diagonais do quadrado. Seja Q, em β, o ponto sobre o qual cairia P se o plano α girasse de 90° em torno de r, no sentido indicado na figura, até coincidir com β.



Se AB = $2\sqrt{3}$, calcule o volume do tetraedro APDQ.

70) (ITA-1998) Um poliedro convexo de 16 arestas é formado por faces triangulares e quadrangulares. Selecionando-o por um plano convenientemente escolhido, dele se destaca um novo poliedro convexo, que possui apenas faces quadrangulares. Este novo poliedro possui um vértice a menos que o original e uma face a mais que o número de faces quadrangulares do original. Sendo m e n, respectivamente, o número de faces e o número de vértices do poliedro original, então:

a) m = 9, n = 7
b) m = n = 9
c) m = 8, n = 10
d) m = 10, n = 8
e) m = 7, n = 9

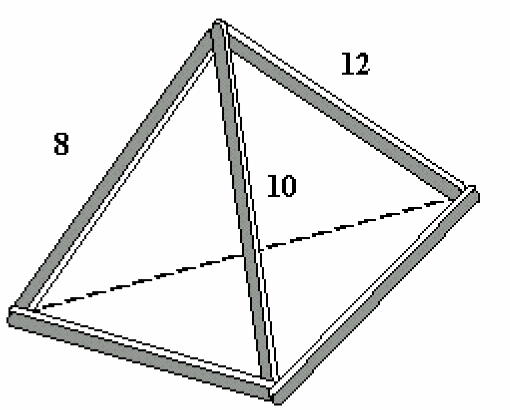
71) (AFA-1998) Seja uma pirâmide de base quadrada com arestas de mesma medida. O arc cos do ângulo entre as faces laterais que se interceptam numa aresta é

a) $-\frac{2}{3}$
b) $-\frac{1}{3}$
c) $\frac{1}{3}$
d) $\frac{2}{3}$

72) (AFA-1998) A intersecção de 3 superfícies esféricas distintas pode ser, somente, ou

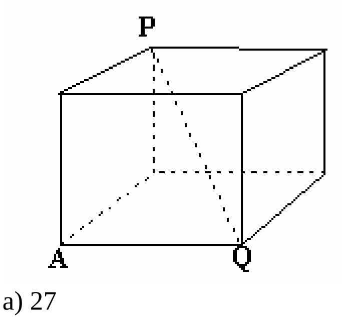
a) 1 ponto, ou vazia, ou 1 circunferência.
b) 1 ponto, ou vazia, ou 2 circunferências.
c) 1 segmento de reta, ou vazia, ou 1 circunferência.
d) 2 pontos, ou 1 ponto, ou vazia, ou 1 circunferência.

73) (UERJ-1998) Dispondo de canudos de refrigerantes, Tiago deseja construir pirâmides. Para as arestas laterais, usará sempre canudos com 8 cm, 10 cm e 12 cm de comprimento. A base de cada pirâmide será formada por 3 canudos que têm a mesma medida, expressa por um número inteiro, diferente das anteriores.
Veja o modelo abaixo:



A quantidade de pirâmides de bases diferentes que Tiago poderá construir, é:
a) 10
b) 9
c) 8
d) 7

74) (Mack-1998) No cubo da figura dada , a distância do vértice A à diagonal PQ é $\sqrt{6}$. Então, o volume do cubo é:



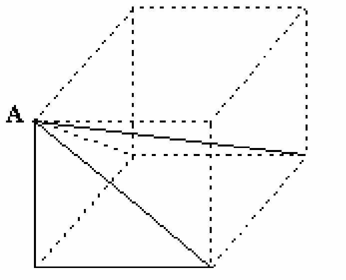
a) 27
b) 64
c) 125
d) $9\sqrt{3}$
e) $8\sqrt{3}$

75) (UFPR-1998) Em um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, considere a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 25$, na qual está inscrito um quadrado com lados paralelos aos eixos coordenados. Então, é correto afirmar:

01. Uma das diagonais do quadrado está contida na reta de equação $x + y = 0$.
02. O ponto (-3, 4) não pertence à circunferência.
04. A reta de equação $3x + 4y + 25 = 0$ é tangente à circunferência.
08. O volume do sólido de revolução obtido pela rotação do quadrado em torno de uma de suas diagonais é igual a 250 unidades de volume.
16. O cilindro de revolução obtido pela rotação do quadrado em torno do eixo x tem altura igual à diagonal do quadrado.

Marque como resposta a soma dos itens corretos.

76) (Mack-1998) Na figura, a pirâmide de vértice A tem por base uma das faces do cubo ao lado k. Se a área lateral dessa pirâmide é $4+4\sqrt{2}$, então o volume do sólido contido no cubo e externo à pirâmide é:



a) 8
b) $\frac{4}{3}$
c) $\frac{16}{3}$
d) $\frac{8}{3}$
e) 16

77) (ITA-1998) Considere um cone circular reto cuja geratriz mede $\sqrt{5}$ cm e o diâmetro da base mede 2 cm. Traçam-se n planos paralelos à base do cone, que o seccionam determinando n + 1 cones, incluindo o original, de modo que a razão entre os volumes do cone maior e do cone menor é 2. Os volumes destes cones formam uma progressão aritmética crescente cuja soma é igual a 2π. Então, o volume, em cm^3, do tronco de cone determinado por dois planos consecutivos é igual a:

a) $\frac{\pi}{33}$
b) $\frac{2\pi}{33}$
c) $\frac{\pi}{9}$
d) $\frac{2\pi}{15}$
e) π

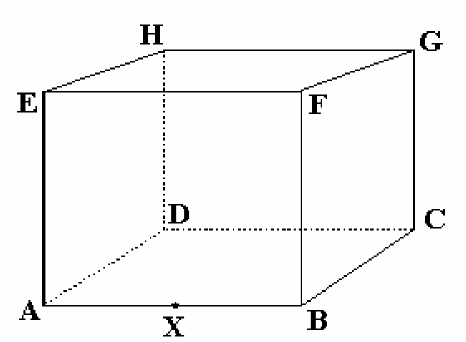
78) (Unicamp-1998) a) Qual é o valor de λ na equação $z^3 - 5z^2 + 8z - \lambda = 0$ de modo que $z = 3$ seja uma raiz dessa equação?

b) Para esse valor de λ, ache as três raízes z_1, z_2, z_3 dessa equação.

c) Ache o volume do sólido obtido quando a região triangular cujos vértices são os pontos z_1, z_2, z_3 gira em torno da reta de equação x = 1.

79) (Fatec-1997) Sabe-se que um cilindro de revolução de raio igual a 10cm, quando cortado por um plano paralelo ao eixo, a uma distância de 6 cm desse eixo, apresenta uma secção retangular equivalente à base. O volume desse cilindro, em centímetros cúbicos, é:
a) 1250π
b) $1250\pi^2$
c) $6,25\pi^2$
d) 625π
e) $625\pi^2$

80) (Fuvest-1997) No paralelepípedo reto retângulo mostrado na figura, AB=2cm e AD=AE=1cm.



Seja X um ponto de segmento AB e x a medida do segmento AX.
a) Para que valor de x, CX = XH?
b) Para que valor de x, o ângulo CXH é reto ?

81) (Fuvest-1997) Um cubo de aresta m está inscrito em uma semi-esfera de raio R de tal modo que os vértices de uma das faces pertencem ao plano equatorial da semi-esfera e os demais vértices pertencem à superfície da semi-esfera. Então, m é igual a:

a) $R\sqrt{\frac{2}{3}}$
b) $R\frac{\sqrt{2}}{2}$
c) $R\frac{\sqrt{3}}{3}$
d) R
e) $R\sqrt{\frac{3}{2}}$

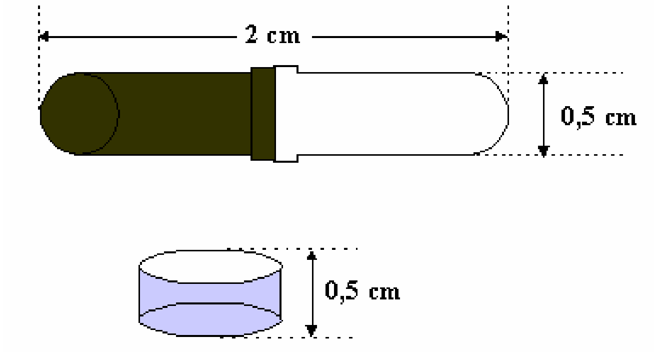
82) (Unicamp-1996) Um tetraedro regular, cujas as arestas medem 9 cm de comprimento, tem vértices nos pontos A, B, C e D. Um plano paralelo ao plano que contém a face BCD encontra as arestas AB, AC e AD, respectivamente, nos pontos R, S e T.
a) Calcule a altura do tetraedro ABCD.
b) Mostre que o sólido ARST também é um tetraedro regular.
c) Se o plano que contém os pontos R, S e T dista 2 centímetros do plano da face BCD, calcule o comprimento das arestas do tetraedro ARST.

83) (ITA-1996) A aresta de um cubo mede x cm. A razão entre o volume e a área total do poliedro cujos vértices são os centros das faces do cubo será:
a) $(\frac{\sqrt{3}}{9})$x cm
b) $(\frac{\sqrt{3}}{18})$x cm
c) $(\frac{\sqrt{3}}{6})$x cm
d) $(\frac{\sqrt{3}}{3})$x cm
e) $(\frac{\sqrt{3}}{2})$x cm

84) (IME-1996) Determine os números naturais n para os quais existam poliedros convexos de n arestas.

85) (Mack-1996) Num paralelepípedo retângulo a soma das medidas de todas as arestas é 52 e a diagonal mede $\sqrt{91}$. Se as medidas das arestas estão em progressão geométrica, então o seu volume é:
a) 216.
b) 108.
c) 81.
d) 64.
e) 27.

86) (Faap-1996) A razão na qual um comprimido de vitamina C começa a dissolver-se depende da área da superfície do comprimido. Uma marca de comprimido tem forma cilíndrica, comprimento 2 centímetros, com hemisférios de diâmetro 0,5 centímetro cada extremidade, conforme figura a seguir. Uma segunda marca de comprimido vai ser fabricada em forma cilíndrica, com 0,5 centímetro de altura.



Determine o diâmetro do segundo comprimido de modo que o seu volume seja igual ao do primeiro comprimido.
a) 1
b) $\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{12}}$
c) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{11}}$
d) $\frac{1}{2}$
e) $\frac{3}{4}$

87) (Fuvest-1996) As bases de um tronco de cone circular reto são círculos de raios 6cm e 3cm. Sabendo-se que a área lateral do tronco é igual à soma das áreas das bases, calcule:
a) a altura do tronco de cone.
b) o volume do tronco de cone.

88) (UFBA-1996) O apótema da base de um prisma reto hexagonal regular P mede 6 $\sqrt{3}$ cm, e a altura de P mede 8 $\sqrt{3}$ cm. Nesse prisma inscreve-se um cone reto, e a esse mesmo prisma circunscreve-se um cilindro reto; o cone e o cilindro têm a mesma altura de P. A área total do cilindro é 8(3+2 $\sqrt{3}$)xπcm^2, a área lateral do cone é 90yπcm^2, e o volume do prisma é 648zcm^3. Determine a medida do volume de um paralelepípedo retângulo cujas dimensões são, em cm, x, y e z, indicando, de modo completo, toda a resolução do problema.

89) (UFBA-1996) Em um paralelepípedo retângulo P, a altura h, a diagonal da base d e a diagonal D são, nessa ordem, os termos consecutivos de uma progressão aritmética de razão r =1. Sendo a base do paralelepípedo P um quadrado, pode-se afirmar:

(01) h.d.D = 60 cm^3
(02) O volume de P é V = 16 cm^2
(04) A área total de P é S = $4(4+3\sqrt{2})$ cm^2
(08) A área do círculo inscrito na base de P é S = 2π cm^2
(16) O perímetro do triângulo cujos lados coincidem com h, d, D é p =12cm

A resposta é a soma dos pontos das alternativas corretas

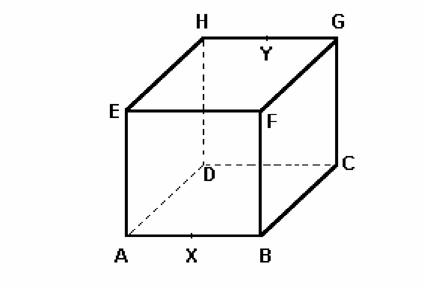
90) (Vunesp-1995) Uma piscina de forma retangular tem 8m de largura, 15m de comprimento, 0,9m de profundidade num de seus extremos e 2,7m de profundidade no outro extremo, sendo seu fundo um plano inclinado. Calcule o volume da água da piscina quando a altura do nível da água é de 0,6m na extremidade mais funda.

91) (Unicamp-1995) Uma pirâmide regular, de base quadrada, tem altura igual a 20cm. Sobre a base dessa pirâmide constrói-se um cubo de modo que a face oposta à base do cubo corte a pirâmide em um quadrado de lado igual a 5cm. Faça uma figura representativa dessa situação e calcule o volume do cubo.

92) (Cesgranrio-1995) Um salame tem a forma de um cilindro reto com 40cm de altura e pesa 1kg. Tentando servir um freguês que queria meio quilo de salame, João cortou um pedaço, obliquamente, de modo que a altura do pedaço varia entre 22cm e 26cm. O peso do pedaço é de:
a) 600g
b) 610g
c) 620g
d) 630g
e) 640g

93) (UFPE-1995) Seja C um cubo cujo lado mede 5cm e π um plano contendo duas diagonais de C. Particiona-se C em 125 cubos com lado medindo 1cm através de planos paralelos às faces de C. O plano π contém o centro de quantos destes 125 cubos com lado medindo 1cm?

94) (Fuvest-1995) No cubo de aresta **a** seguir, X e Y são pontos médios das arestas AB e GH respectivamente. Considere a pirâmide de vértice F e cuja base é o quadrilátero XCYE. Calcule, em função de **a**:



a) o comprimento do segmento XY.
b) a área da base da pirâmide.
c) o volume da pirâmide.

95) (Unicamp-1994) Em uma pirâmide de base quadrada, as faces laterais são triângulos eqüiláteros e todas as oito arestas são iguais a 1.
a) Calcule a altura e o volume da pirâmide.
b) Mostre que a esfera centrada no centro da base da pirâmide, e que tangencia as arestas da base, também tangencia as arestas laterais.
c) Calcule o raio do círculo intersecção da esfera com cada face lateral da pirâmide.

96) (UFMG-1994) As medidas da geratriz, do raio da base e da altura de um cone circular reto são x+a, x e x-a, respectivamente. Ao calcular o volume desse cone, usou-se, por engano, a fórmula do volume do cilindro circular reto de mesmo raio e de mesma altura do cone. O valor encontrado supera em 4π cm^3 o volume procurado.
CALCULE a altura e o raio da base desse cone.

97) (Fuvest-1994) A base de uma pirâmide regular é um quadrado ABCD de lado 6 e diagonais AC e BD. A distância de seu vértice E ao plano que contém a base é 4.
a) Determine o volume do tetraedro ABDE.
b) Determine a distância do ponto B ao plano que contém a face ADE.

98) (Fuvest-1986) A altura de um cone circular reto é H. Seja α um plano que é paralelo à base e que divide o cone em dois sólidos de mesmo volume. Calcule a distância entre α e o plano da base do cone.

99) (Fuvest-1984) De cada uma das quatro pontas de um tetraedro regular de aresta 3a corta-se um tetraedro regular de aresta a.
a) Qual o número de vértices, faces e arestas do poliedro resultante?
b) Calcule a área total da superfície desse poliedro.

100) (Cesgranrio-1984) Um recipiente cônico, com altura 2 e raio da base 1, contém água até a metade de sua altura (Fig. I). Inverte-se a posição do recipiente, como mostra a Fig. II. A distância do nível de água ao vértice, na situação da Fig. II, é:

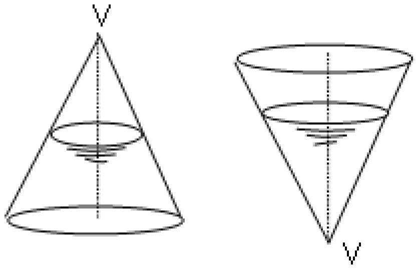


Fig. I   Fig. II

a) $\frac{3}{2}$

b) $\frac{4}{3}$

c) $\sqrt{3}$

d) $\sqrt[3]{7}$

e) $\sqrt[3]{6}$

101) (UFPE-1981) Considere um tanque com a forma de um cone invertido de raio da base 6m e altura 8m. Deixa-se cair dentro do tanque uma esfera de raio 3m. Assinale a alternativa correspondente à distância do centro da esfera ao vértice do cone.

a) 4m
b) 2m
c) 5m
d) 10m
e) 6m

Gabarito

1) a) $\dfrac{\pi}{4}$

b) $\dfrac{\ell^2\sqrt{6}}{8}$

c) $\dfrac{\ell^3}{16}$

2) a) A caixa d'água comporta 21/4 m^3.
b) O nível d'água está a 2 m da base menor da caixa d'água.

3) a) $\dfrac{\sqrt{10}}{4}$

b) $\dfrac{9}{16}$

c) $\dfrac{3\sqrt{3}}{64}$

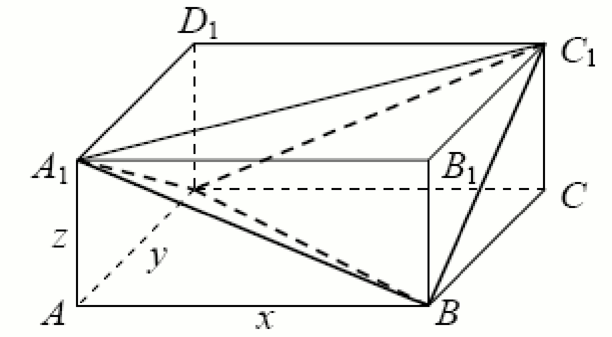
4)
a) $\dfrac{5\sqrt{57}}{2}$ cm^2

b) $\dfrac{20\sqrt{57}}{57}$ cm

5) Alternativa: B

6) a) h = $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ portanto, equivale a $\dfrac{2}{3}$ da diagonal, que é $\sqrt{3}$.
b) razão = 3

7)



$$\frac{V(A_1BC_1D)}{V(ABCDA_1B_1C_1D_1)} = \frac{xyz/3}{xyz} = \frac{1}{3}$$

8) Alternativa: D
Solução: Um plano qualquer divide o espaço em dois semi-espaços. Há, então, duas possibilidades para um plano que tangencie as três esferas:
• planos que deixam as três esferas em um mesmo semi-espaço: como os centros dessas esferas não são colineares, há no máximo 2 tais planos;
• planos que deixam duas esferas em um mesmo semi-espaço e a terceira no outro: para cada possibilidade de escolha de duas das três esferas, há no máximo dois desses planos. Como há três modos de escolhermos duas das três esferas, há no máximo 3 x 2 = 6 tais planos.
Somando as possibilidades acima, concluímos que há no máximo 2 + 6 = 8 planos satisfazendo as condições do enunciado.

É imediato verificar que existem várias configurações de três esferas de centros não-colineares
para as quais a cota superior de 8 planos é atingida. Um exemplo é fornecido por três esferas de raio 1, com centros situados nos vértices de um triângulo equilátero de lado 3.

9) a) CK = 2cm e DL = 4cm

b) $42cm^3$

10) a) $\dfrac{a^3}{6}$

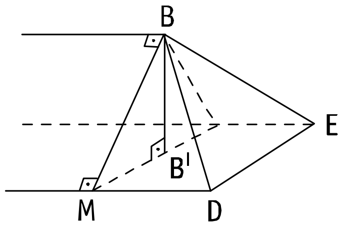
b) $\dfrac{5a^2}{8}$

c) $\dfrac{5a\sqrt{41}}{41}$

11) Resposta: 22

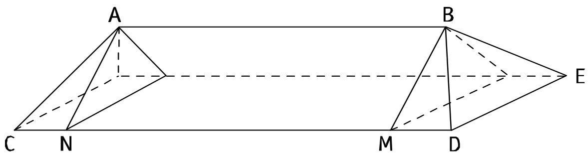
12) $\dfrac{640}{9} \cdot \sqrt{3} \cdot \pi cm^3$

13) a)



$$BM = \frac{3{,}4}{2} = 1{,}7\,m$$
$$B'M = \frac{3}{2} = 1{,}5\,m$$
$$BB' = h$$
$h^2 + 1{,}5^2 = 1{,}7^2 \Rightarrow h = 0{,}8\,m$

b)



volume = V = V(prisma) + V(pirâmide)

$$V = \frac{3h}{2} \times AB + \frac{2 \times 3}{3} \times h \Rightarrow V = \frac{3h}{2} \times 4 + 2h \Rightarrow$$
$$V = \mathbf{8h}$$

14) Resposta: 57

15) Mesma capacidade $\leftrightarrow b^3 = \frac{\pi r^2 b}{3} \leftrightarrow r^2 = \frac{3b^2}{\pi}$

(1)

$V_1(h) = b^2h$

Usando semelhança de triângulos, $V_2(h) = \frac{\pi r^2 b}{3} - \frac{\pi r^2 (b-h)^3}{3b^2}$

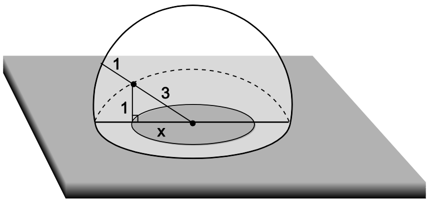
Por (1),
$V_2(h) = b^3 - (b - h) = 3b^2h - 3bh^2 + h^3$
$V_2(h) = 3V_1(h) \leftrightarrow 3b^2h - 3bh^2 + h^3 = 3b^2h \leftrightarrow h^2 (h - 3b) = 0 \leftrightarrow \frac{h}{b} = 3$ (pois $h \neq 0$)

16) Alternativa: B

17) Alternativa: D

18) $h = \sqrt[3]{98}$.

19) a)
$x^2 + 1^2 = 3^2$



$x^2 = 8$

$$\text{Área} = \pi x^2 = \mathbf{8\pi\, cm^2}$$

b) A maior esfera teria raio igual a metade do raio da cuba $\Rightarrow r = 2cm$

$$V = \frac{4}{3}\pi \times 2^3 = \mathbf{\frac{32\pi}{3}\ cm^3}$$

20) Alternativa: D

21) Alternativa: D

22) 24

23) Resposta: 30º, 60º e 90º

24) Alternativa: A

25) Alternativa: C

26) Alternativa: A

27) Alternativa: C

28) Alternativa: C

29) Alternativa: C

30) Alternativa: A

31) a) $108r^2\ cm^3$ e $27r^2\ cm^3$, respectivamente.
b) 20% e h = 20cm, respectivamente.

32) a) $R = \frac{3\sqrt{66}}{8}$ cm
(Lembre-se que num quadrilátero inscrito, os ângulos opostos são suplementares. Então use a lei dos cossenos

nos triângulos ABD e CBD para determinar BD e cos α, sendo α o ângulo oposto a BD. Daí, obtenha sen α e pela lei dos senos, obtenha R)

b) A = $\frac{495}{32}$ π cm³

33) V(x) = $\frac{5 \cdot \sqrt{2} \cdot x^3}{12}$.

34) Alternativa: B
Note que a nova altura é metade da altura original e a nova base é 3/4 da base original. Assim, o novo volume é $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}$ .4 = 1,5.

35) Alternativa: B

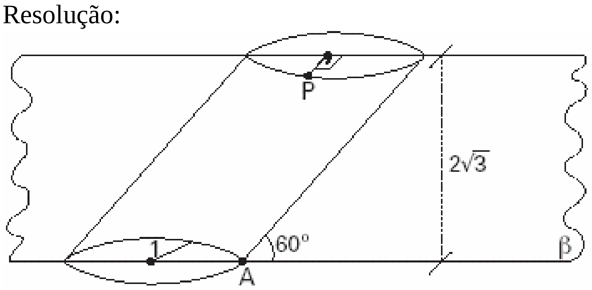
36) A = $\frac{r^2\sqrt{11}}{16}$ (o triângulo AMN é isósceles, com AN = AM = altura das faces equiláteras e MN base média)

37) h = $\frac{169-24\sqrt{3}}{12}$

38) Alternativa: C

39) a) $5\sqrt{2}$ cm
b) $\frac{500}{3}$ cm³

40) PA = $\sqrt{14}$
Resolução:



Da figura, calcula-se a geratriz, encontrando-se o valor 4. O que se busca é a diagonal do prisma oblíquo da figura abaixo. Pela lei dos cossenos, obtém-se o valor do segmento azul, que é $\sqrt{13}$. Com o teorema de Pitágoras, obtém-se a hipotenusa PA, que é $\sqrt{14}$.

41) Alternativa: C

42) Alternativa: A

43) Isso nos dá que 2[n(n - 2) + n(n + 2) + (n - 2)(n + 2)] = 142, isso nos dá que $3n^2 - 75 = 0$, assim n = ± 5, o resultado que convém é n = 5. Assim o volume será 3 x 5 x 7 = 105cm³.

44) Alternativa: D

45) Solução: Seja ABCD um tetraedro regular. Seja P um ponto qualquer interior a esse tetraedro. Considere as pirâmides ABCP, ABDP, BCDP e ACDP. A soma dos volumes dessas quatro pirâmides é igual ao volume do tetraedro. Sejam h_1, h_2, h_3 e h_4, respectivamente, as alturas dessas pirâmides e h, a altura do tetraedro.
Temos:

$$\frac{1}{3}S_{ABC}\cdot h_1+\frac{1}{3}S_{ABD}\cdot h_2+\frac{1}{3}S_{BCD}\cdot h_3+\frac{1}{3}S_{ACD}\cdot h_4=\frac{1}{3}S_{ABC}\cdot h.$$

Como o tetraedro é regular, os triângulos ABC, ABD, BCD e ACD são todos congruentes. Logo
$h_1 + h_2 + h_3 + h_4 = h$.
Como h_1, h_2, h_3 e h_4 são as distâncias de P às quatro faces do tetraedro, provamos que independente da posição de P essa soma é constante e igual à altura do tetraedro.

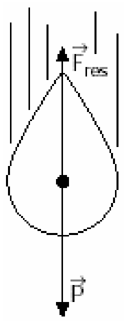
Assim, sendo P_1 e P_2 pontos quaisquer no interior do tetraedro, $d_1 = d_2 = h$

46) Alternativa: C

47) a) V = $\frac{4}{3}$ cm³

b) $\sqrt{2}$ cm

48) carro A
32 vezes maior



$C_x = 0,1$
h = 2R

49) Alternativa: E

50) F – V – F – V – V – F

51) V – V – F – F – V – V

52) h = 21cm

53) Resposta: a razão é $\frac{8}{3}$

54) Alternativa: D

55) Alternativa: A

56) a) 50cm
b) R$ 8,40

57) Alternativa: B

58) a) 2cm
b) 4cm

59) a) R = 5cm
b) h = $5\sqrt{3}$ cm (note que o pé da altura pedida coincide com o circuncentro O do triângulo)

60) a) $\frac{R(2\pi-\theta)}{2\pi}$
b) $\frac{1}{24}\left(\frac{2\pi-\theta}{\pi}\right)^2\sqrt{4\pi\theta-\theta^2}.R^3$

61) Alternativa: E

62) Alternativa: C

63) Alternativa: C

64) a) $3\sqrt{2}$ cm
b) r = $\frac{\sqrt{6}}{2}$cm

65) V – V – V – F – F → 1+2+4 = **7**

66) $\left[\frac{3}{16}(8-h)^3+36h-96\right]$ m^3

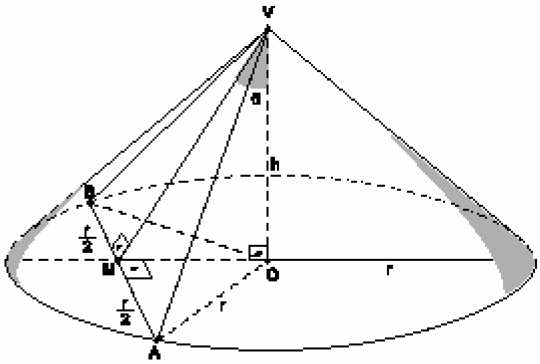
67) a) D = (–4, 4, 2)
b) V = (2, 7, –1) ou V = (–2, –1, 7)

Padrão de resposta oficial:
a) Coordenadas de D:
AD = BC → D = (-4, 4, 2)
Medida de cada lado → |AB| = 6

b) V = 72 => h = 6 → |VH| = 6
VH perpendicular ao plano do quadrado e |VH| = 6

H = (A+C)/2 = (0, 3, 3). VH // AD x AB = (12, 24, -24)
VH = (-2, -4, 4) ou VH = (2, 4, -4) → V (2, 7, -1) ou V (-2, -1, 7)

68) Resolução: Considere o esquema abaixo:



Se AB = r, então o triângulo ABO é equilátero de lado r e OM é sua altura, portanto OM = $\frac{r\sqrt{3}}{2}$. Para θ = 30°,

tg 30° = $\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{OM}{OV} = \frac{\frac{r\sqrt{3}}{2}}{h}$ → h = $\frac{3r}{2}$.

Para h = $\frac{3r}{2}$, tg θ = $\frac{\frac{r\sqrt{3}}{2}}{\frac{3r}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ → θ = 30°

69) V = $\sqrt{3}$

70) Alternativa: B

71) Alternativa: B

72) Alternativa: D

73) Alternativa: A

74) Alternativa: A

75) V – F – V – F – F → 1 + 4 = **5**

76) Alternativa: C

77) Alternativa: C

resolução: **cone maior**: g = $\sqrt{5}$ cm; D = 2r = 2 → R = 1cm
$g^2 = h^2 + R^2$ → $5 = h^2 + 1$ → h = 2 cm.

V = $\frac{\pi 1^2.2}{3} = \frac{2\pi}{3}$ cm^3

Então, o volume do cone menor é $\frac{1}{2}.\frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$ cm^3

A soma de todos os volumes é uma soma de PA de n + 1 termos:

$$S = \frac{\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right)(n+1)}{2} = 2\pi \rightarrow n = 3$$

portanto temos 3 planos e 4 cones, cujos volumes formam uma PA ($\frac{\pi}{3}$, v_2, v_3, $\frac{2\pi}{3}$)

A razão x dessa PA é o acréscimo de volume de um cone para outro, portanto é o volume de cada tronco entre 2 planos consecutivos:

Termo geral da PA:

$\frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + (4 - 1).x \rightarrow x = \frac{\pi}{9}$

78) a) $\lambda = 6$

b) $z_1 = 3$, $z_2 = 1 + i$, $z_3 = 1 - i$

c) $V = \frac{8\pi}{3}$

79) Alternativa: E

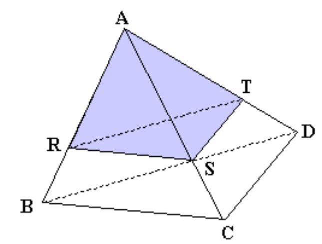
80) a) x = 0,75 cm

b) x = 1 cm

81) Alternativa: A

82) a) $3\sqrt{6}$ cm

b) se o plano RST é paralelo ao plano BCD, então RS//BC, ST//CD e RT//BD e então os triângulos ARS, AST, ART e RTS são eqüiláteros e congruentes, portanto ARST também é tetraedro regular.



c) $9 - \sqrt{6}$ cm

83) Alternativa: B

84) Resposta: $n \geq 6$

85) Alternativa: E

86) Alternativa: B

87) a) 4cm

b) 84π cm^3

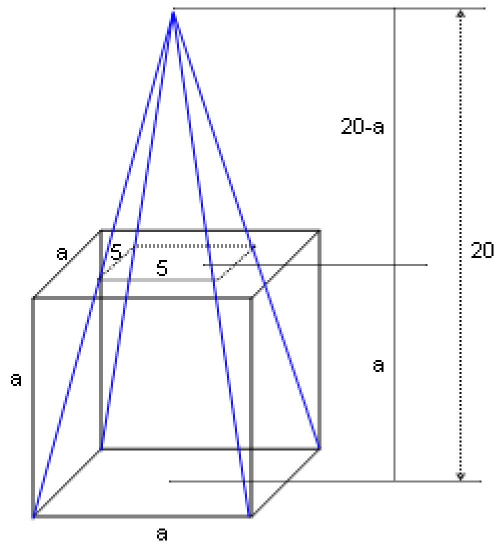
88) Pelo cilindro descobre-se que x = 12; pelo cone, que y = 2 e pelo prisma, que z = 8.

Assim o volume pedido é 12.2.8 = **192**.

89) V - F - F - V - V $\rightarrow$ 1 + 8 + 16 = **25**

90) 12 m^3

91) O volume é $10^3 = 1000$ cm^3



92) Alternativa: A

93) 25 cubos

94) a) $XY = a\sqrt{2}$

b) área da base = $\frac{a^2\sqrt{6}}{2}$

c) Volume = $\frac{a^3\sqrt{2}}{4}$

95) a) $h = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $V = \frac{\sqrt{2}}{6}$

b) Basta mostrar que a distância do centro da base é a mesma para as 8 arestas. De início, a distância do centro às 4 arestas da base é $R = \frac{1}{2}$. Além disso, a distância do centro da base à qualquer vértice é $\frac{\sqrt{2}}{2}$ pois essa distância ou é h ou é metade da diagonal do quadrado da base. Assim, as distâncias do centro à qualquer aresta lateral é a altura do triângulo isósceles de lados $\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ e 1, que além de tudo é retângulo. Essa altura vale

$\frac{1}{2}$ também.

c) R = $\frac{\sqrt{3}}{6}$

96) Altura = $\frac{3}{2}$

Raio = 2

97) a) A = 24
b) d = 4,8

98) Alternativa: D

99) a) F = 8, V = 12, A = 18

b) $A_T = 7a^2\sqrt{3}$

100) Alternativa: D

101) Alternativa: C