

Geometria Analítica

Conteúdo:

- A reta – Parte I
- Exercícios

A Reta – Parte I

Tópicos Teóricos

1. Dados os pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, definimos o vetor $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A)$.

2. Vetor nulo de $\mathbb{R}^2$: $(0, 0) = \vec{0}$

3. Vetor simétrico: se $\vec{u} = (x, y)$, então $-\vec{u} = (-x, -y)$ é simétrico de $\vec{u}$.

4. Soma de vetores: se $\vec{u} = (x_1, y_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2)$, então $\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$.

5. Diferença de vetores: se $\vec{u} = (x_1, y_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2)$, então $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v}) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$.

6. Multiplicação de um vetor no $\mathbb{R}^2$ por escalar: $\vec{u} = (x, y)$, $a \in \mathbb{R} \Rightarrow a\vec{u} = a(x, y) = (ax, ay)$.

7. Vetores de mesma direção: $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm mesma direção se, e somente se, $\exists k \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{u} = k\vec{v}$.

8. Módulo de um vetor em $\mathbb{R}^n$: Se $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, então $|\vec{u}| = \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2}$.

9. Produto Escalar em $\mathbb{R}^2$

$\vec{u} = (x_1, y_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2)$ são vetores do $\mathbb{R}^2$. Definimos como Produto Interno ou Produto Escalar de $\vec{u}$ por $\vec{v}$ e representamos por $\vec{u} \cdot \vec{v}$, o número real $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2$. Daí,

I. $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cos \theta$ (demonstra-se pela lei dos cossenos), sendo θ o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Logo, $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

II. $|\vec{u}| = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}| \cos \theta}$ ou $\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|}$.

Exercícios de Fixação

01. Determine a distância entre dois pontos **A** e **B** do plano cartesiano.

02. Determine as coordenadas de um ponto **P** que divide um segmento AB em uma dada razão real $k \neq -1$.

03.
A) Prove que as coordenadas do ponto médio de um segmento AB são dadas por $\frac{A+B}{2}$.
B) Prove que as coordenadas do baricentro de um triângulo ABC são dadas por $\frac{A+B+C}{3}$.
C) Mostre que a distância do baricentro a um vértice é o dobro da distância ao lado oposto.
D) Encontre as coordenadas do incentro de um $\triangle ABC$.

04. Mostre que os pontos médios **P**, **Q**, **R**, **S** de qualquer quadrilátero no plano ou no espaço são vértices de um paralelogramo.

05. Seja ABCDEF um hexágono qualquer e $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ o hexágono formado pelos baricentros dos triângulos ABC, BCD, CDE, DEF, EFA, FAB. Mostre que $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ tem lados opostos paralelos e iguais.

06. Seja **r** uma reta passando pelo baricentro de um triângulo ABC. Prove que a soma das distâncias de dois dos vértices de ABC à reta é igual à distância do 3º vértice a **r**.

07. Seja ABCD um quadrilátero convexo, P, Q, R, S, os pontos médios de AB, BC, CD, DA, T a interseção de AC e BD, M a interseção de PR e QS, G o centro de massa de distribuição uniforme do quadrilátero.
I. Prove que M é o ponto médio da Mediana de Euler do quadrilátero.
II. Prove que T, M, G são colineares e $TM = 3MG$.

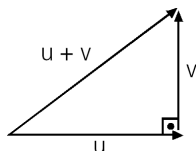
08. $A_1A_2A_3A_4$ é um tetraedro e G_i é o baricentro da face oposta a A_i , para $i = 1, 2, 3, 4$. B_{ij} é o ponto médio de A_iA_j . As retas A_iG_i são chamadas medianas do tetraedro. As retas B_{12} e B_{34} , B_{13} e B_{24} , B_{14} e B_{23} são chamadas bimedias do tetraedro. Prove que:
I. As quatro medianas e as três bimedias passam por um mesmo ponto chamado baricentro do tetraedro.
II. $\frac{A_iG_i}{GG_i} = \frac{3}{1}$.
III. As bimedias são divididas ao meio por **G**.

09. Sejam **M** e **N** os pontos médios dos lados AB e CD de um quadrilátero qualquer. Prove que $\overline{MN} = \frac{\overline{BC} + \overline{AD}}{2}$.

10. (Moldávia) As diagonais de um quadrilátero inscrito ABCD têm um ponto **H** comum. Perpendiculares HM e HN aos lados BC e AD são traçadas. Prove que os pontos médios dos segmentos AB, CD, MN são colineares.

11. Mostre que se $\vec{u} = (x_1, y_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2)$ são vetores do $\mathbb{R}^2$ e $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2$, então $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cos \theta$, sendo θ o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$. (sugestão: lei dos cossenos)

12. Mostre, através da figura a seguir, que a condição de ortogonalidade de dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.



13. Mostre que o pé da perpendicular a partir de um ponto A até uma reta BC é dado por $(A - \lambda B + (\lambda - 1)C) \cdot (B - C) = 0$.

14. Em um tetraedro, dois pares de arestas opostas são perpendiculares. Prove que o terceiro também é.

15. Seja $SABC$ um tetraedro tri-retângulo, tal que S seja o vértice dos ângulos retos. Prove que a projeção de S em ABC é ortocentro do ΔABC .

16. Seja $ABCD$ uma pirâmide regular com base $ABCD$, $AB = BC = CA = a$ e $AD = BD = CD = b$ e sejam M e N os pontos médios dos segmentos AB e CD , respectivamente. Um plano α passando por MN intersecta os segmentos AD e BC nos pontos P e Q respectivamente.

A) Prove que $\frac{AP}{AD} = \frac{BQ}{BC}$.

- B) Encontre $\frac{AP}{AD}$ no caso quando a área do quadrilátero $MQNP$ é mínima.

17. Determine $A \cdot B + A \cdot C + B \cdot C$, sabendo que $A + B + C = 0$, $|A| = 2$, $|B| = 3$, $|C| = \sqrt{5}$.

18. (Banco IMO) É dado um quadrilátero convexo $ABCD$ com diagonais congruentes $AC = BD$. Quatro triângulos equiláteros são desenhados externamente sobre seus lados. Prove que os segmentos unindo os baricentros dos triângulos sobre lados opostos são perpendiculares.

19. (Brasil) Em um triângulo isósceles ABC ($AC = BC$) seja O o seu circuncentro, D o ponto médio de AC e E , o baricentro do ΔDBC . Mostre que a reta OE é perpendicular a BD .

20. Três pontos A, B, C são tais que $AC^2 + BC^2 = \frac{AB^2}{2}$. Qual é a posição relativa desses pontos.

Exercícios Propostos

01. Até que ponto o segmento de extremos $A(3,0)$ e $B(0,7)$ deve ser prolongado no sentido de A para B para que o comprimento triplique?

02. Os pontos médios dos lados AB , BC e CA de um triângulo são, respectivamente, $M(1, 3)$, $N(-1, 4)$ e $P(0, 7)$. Obter os vértices A, B e C .

03. Demonstrar analiticamente as propriedades das bases médias de triângulo e trapézio.

04. (OPM) Demonstre que, numa pirâmide triangular regular (a base é um triângulo equilátero), duas arestas reversas são ortogonais.

05. Encontre c de tal forma que $(-1, 1, c)$ e $(-1, 1, -c)$ e a origem sejam vértices de um triângulo retângulo na origem.

06. Demonstre que se A é um vetor perpendicular a dois vetores B e C , então A é perpendicular a $B + C$.

07. Demonstre que se A e B são vetores tais que $A + B$ é perpendicular a $A - B$, então $|A| = |B|$.

08. Seja u um vetor perpendicular a todo vetor x . Mostre que $u = 0$.

09. (Equação vetorial da reta) Sejam A e B dois pontos distintos em $\mathbb{R}^n$, em que $n = 1, 2, 3$. Mostre que em um ponto $P \in \overline{AB} \Leftrightarrow$ existem números reais x e y tais que $P = xA + yB$ e $x + y = 1$.

10. Sejam A, B e C pontos não colineares em $\mathbb{R}^n$, em que $n = 2, 3$, e seja T o triângulo ABC mais seu interior. Mostre que em um ponto $P \in T$ existem números reais x, y e z não negativos tais que $P = xA + yB + zC$ e $x + y + z = 1$.

11. Sejam A, B, C e D pontos não colineares em $\mathbb{R}^n$, em que $n = 2, 3$, e seja T o tetraedro $ABCD$ mais seu interior. Mostre que em um ponto $P \in T \Leftrightarrow$ existem números reais x, y, z e w não negativos, tais que $P = xA + yB + zC + wD$ e $x + y + z + w = 1$.

12. Seja E um ponto sobre o prolongamento do lado AB , por B , de um quadrado $ABCD$. F é o ponto de interseção das retas BC e DE e G , o ponto de interseção de AF e CE . Mostre que BG e DE são perpendiculares.

13. Seja ABC um triângulo retângulo de hipotenusa BC , onde construímos externamente quadrados $BCDE$ e $ACFG$. Seja M o ponto de interseção das retas AE e BF . Mostre que M está sobre o perímetro do quadrado inscrito em ABC com lados paralelos aos catetos.

14. Mostre que $AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 \Leftrightarrow A + C = B + D$.

15. Sejam A, B, C, D quatro pontos no espaço. Prove que se, para todos os pontos X no espaço, vale a equação $AX^2 + CX^2 = BX^2 + DX^2$, então $ABCD$ é retângulo.

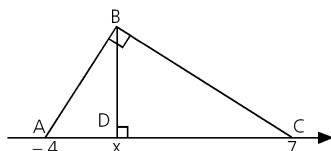
16. Prove o teorema de Euter: no quadrilátero $ABCD$ com medianas MN e PQ , $AC^2 + BD^2 = 2(MN^2 + PQ^2)$.

17. Sejam A, B, C, D pontos no espaço. Mostre que $AB \perp CD \Leftrightarrow AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$.

18. Prove que se M é um ponto e $ABCD$, um retângulo, então $\vec{MA} \cdot \vec{MC} = \vec{MB} \cdot \vec{MD}$.

19. Seja Q um ponto arbitrário no plano e M o ponto médio de AB . Prove que $QA^2 + QB^2 = 2QM^2 + \frac{AB^2}{2}$.

20. Seja ABC um triângulo e seja **O** um ponto qualquer no espaço. Mostre que $AB^2 + BC^2 + CA^2 \leq 3(OA^2 + OB^2 + OC^2)$.
21. As diagonais de um quadrilátero ABCD se intersectam em **O**. Mostre que $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = 2(AO^2 + BO^2 + CO^2 + DO^2)$ exatamente se $AC \perp BD$ ou uma das diagonais é bissectada por **O**.
22. O ponto de interseção das retas $r: \begin{cases} x = p - 3 \\ y = 2p + 9 \end{cases}$ e $s: \begin{cases} x = 2t \\ y = 4t - 1 \end{cases}$:
- A) é (10,19).
B) é (-6,3).
C) é (0, -1).
D) é (-3,9).
E) não existe.
23. (OCM) "As coordenadas dos vértices de um triângulo equilátero são números inteiros". Demonstre que essa afirmação é falsa.
24. Sejam A(1, 3), B(4, -5) e C(7, 5) três vértices consecutivos de um paralelogramo ABCD.
- A) Determine as coordenadas de **D**.
B) Seja **E** o ponto de interseção das diagonais. Calcule a medida de DE.
25. (FGV) Considere os pontos A(1; -2), B(-2; 4) e C(3; 3). A reta suporte da altura do triângulo ABC pelo vértice **C** tem equação:
- A) $2y - x - 3 = 0$
B) $2y + x + 3 = 0$
C) $2y + x - 9 = 0$
D) $y - 2x + 3 = 0$
E) $y + 2x + 9 = 0$
26. (UFSCar) Os pontos **P** e **Q** dividem o segmento de extremos (5,8) e (1,2) em três partes iguais. Se as retas perpendiculares a esse segmento pelos pontos **P** e **Q** interceptam o eixo **y** nos pontos (0,p) e (0,q), com $p > q$, então $6q - 3p$ é igual a:
- A) 10
B) 8
C) 7
D) 5
E) 2
27. (UFSCar) A hipotenusa do triângulo retângulo ABC está localizada sobre a reta real, conforme indica a figura.



Se $x > 0$ e a medida da altura BD relativa ao lado AC do triângulo ABC é $2\sqrt{6}$, então **x** é o número real:

- A) $2\sqrt{3}$
B) 4
C) $3\sqrt{2}$
D) 5
E) $3\sqrt{3}$

28. (Vunesp) Num sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, o coeficiente angular e a equação geral da reta que passa pelos pontos **P** e **Q**, sendo P(2,1) e **Q** o simétrico, em relação ao eixo **y**, do ponto Q'(1,2) são, respectivamente:

- A) $\frac{1}{3}$; $-3y - 5 = 0$
B) $\frac{2}{3}$; $2x - 3y - 1 = 0$
C) $-\frac{1}{3}$; $x + 3y - 5 = 0$
D) $\frac{1}{3}$; $x + 3y - 5 = 0$
E) $-\frac{1}{3}$; $x + 3y + 5 = 0$

29. Considere os pontos A(-1, -1), B(11, 4), C(7, 14); Seja l(x, y) o ponto de interseção das bissetrizes do $\triangle ABC$. Então:

- A) l é um ponto com coordenadas inteiras.
B) apenas uma das coordenadas de l é racional.
C) l está no 2º quadrante.
D) $x + y \in \mathbb{Q}$.
E) n.d.a.

30. (ITA) Considere os pontos A(0,0), B(2,0) e C(0,3). Seja P(x,y) o ponto de interseção das bissetrizes internas do $\triangle ABC$. Então, $x + y$ é igual a:

- A) $\frac{12}{5 + \sqrt{13}}$
B) $\frac{8}{2 + \sqrt{11}}$
C) $\frac{10}{6 + \sqrt{13}}$
D) 5
E) 2

31. Num sistema cartesiano, as coordenadas dos vértices de um triângulo ABC são A(0,0), B(3,6) e C(8,0). A soma das coordenadas do ortocentro (encontro das alturas) desse triângulo é:

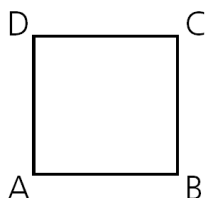
- A) $\frac{12}{5}$
B) $\frac{11}{2}$
C) $\frac{13}{6}$
D) $\frac{13}{2}$
E) $\frac{11}{3}$

32. (OPM) Usando geometria analítica, demonstrar o seguinte teorema: "Num triângulo retângulo, a bissetriz do ângulo reto divide a hipotenusa em segmentos proporcionais aos catetos".

33. (OPM) Demonstre, usando coordenadas (geometria analítica) o teorema: "Qualquer ângulo inscrito em um semicírculo é um ângulo reto".

34. (IME) Demonstrar analiticamente que se uma reta perpendicular a uma corda de uma circunferência passa pelo seu centro, então ela divide a corda no seu ponto médio.

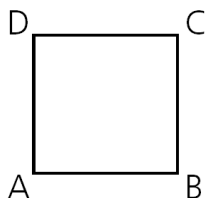
35. (EUA) Um ponto **P** pertence ao plano de um dado quadrado de lado ℓ . Os vértices do quadrado são A, B, C, D, tomados no sentido anti-horário. Sejam **u**, **v**, **w** as distâncias de **P** a **A**, **B**, **C**. Qual a maior distância que **P** pode estar de **D** se $u^2 + v^2 = w^2$?



36. (Fuvest) São dados os pontos A(1, 1) e B(9, 3). A mediatriz do segmento AB encontra o eixo dos **y** no ponto de ordenada igual a:

- A) 20
- B) 21
- C) 22
- D) 23
- E) 24

37. (IME) ABCD é um quadrado de lado ℓ , conforme a figura abaixo. Sabendo-se que **K** é a soma dos quadrados das distâncias de um ponto do plano definido por ABCD aos vértices de ABCD, determine:



- A) o valor mínimo de **K** e a posição do ponto **P** na qual ocorre este mínimo;
- B) o lugar geométrico de **P** para $K = 4\ell^2$.

38. (IME) Sejam **r**, **s**, **t** três retas paralelas não coplanares. São marcados sobre **r** dois pontos **A** e **A'**, sobre **s** os pontos **B** e **B'** e sobre **t** os pontos **C** e **C'**, de modo que os segmentos $AA'=a$, $BB'=b$ e $CC'=c$ tenham o mesmo sentido.

A) Mostre que se **G** e **G'** são os baricentros dos triângulos ABC e A'B'C', respectivamente, então GG' é paralelo às três retas.

B) Determine GG' em função de **a**, **b**, **c**.

39. Seja ABCD uma pirâmide triangular regular de base ABC. Sejam **a** e **b** as medidas de AB e CD, respectivamente. Sendo M e N os pontos médios de AB e CD, analise as afirmações:

I. $MN \perp AB$.

II. $CD \perp AB$.

III. $\overrightarrow{MN} = \frac{\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}}{2}$

IV. $MN = \frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{4}$

Quantas são verdadeiras?

- A) 0
- B) 1
- C) 2
- D) 3
- E) 4

40. Seja ABC um triângulo retângulo com catetos AB e BC paralelos aos eixos coordenados. Se a equação da reta suporte da mediana partindo de **A** é $x + y - 4 = 0$, então a equação da reta passando pela origem e perpendicular à mediana partindo de **C** pode ser:

- A) $y = x$
- B) $x + 2y = 0$
- C) $x + 3y = 0$
- D) $x + 4y = 0$
- E) n.d.a.

41. Uma reta passando pelo ponto $(-a, 0)$ corta o segundo quadrante determinando uma região triangular com área **T**.

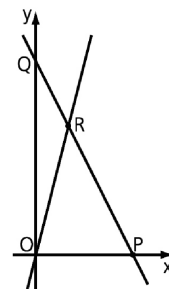
A equação da reta é:

- A) $2Tx + a^2y + 2aT = 0$
- B) $2Tx - a^2y + 2aT = 0$
- C) $2Tx + a^2y - 2aT = 0$
- D) $2Tx - a^2y - 2aT = 0$
- E) n.d.a.

42. Determine a equação do lugar geométrico dos pontos cujas distâncias ao ponto (3, 2) são iguais às distâncias à reta $2x + y = 3$.

43. As retas de equações $y = ax + b$ e $y = cx$ são ilustradas na figura a seguir. Sabendo que o coeficiente **b** é igual à média aritmética dos coeficientes **a** e **c**:

- A) expresse as coordenadas dos pontos P, Q e R em termos dos coeficientes **a** e **b**.
- B) determine **a**, **b** e **c** sabendo que a área do triângulo OPR é o dobro da área do triângulo ORQ e que o triângulo OPQ tem área 1.



44. As coordenadas de **A**, **B** e **C** são (5, 5), (2, 1) e (0, k), respectivamente. O valor de **k** que torna $AC + BC$ o menor possível é:

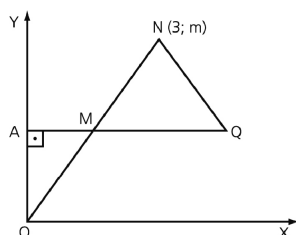
- A) 3
B) $4\frac{1}{2}$
C) $3\frac{6}{7}$
D) $4\frac{5}{6}$
E) $2\frac{1}{7}$

45. Determine a soma das coordenadas do ponto simétrico de (10, 21) em relação à reta $2x + 5y - 38 = 0$.

- A) -10
B) -11
C) -12
D) -13
E) n.d.a.

46. No plano cartesiano da figura a seguir, MNQ é um triângulo equilátero e $AM = MQ$. O valor de **m** é:

- A) 3
B) $2\sqrt{2}$
C) $2\sqrt{3}$
D) $\sqrt{3}$
E) $3\sqrt{3}$



Gabarito – Exercícios Propostos									
01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
*	*	–	–	*	–	–	–	–	–
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
–	E	–	*	A	B	B	C	E	A
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
B	–	–	–	*	C	*	–*	D	E
41	42	43	44	45	46				
B	*	*	E	B	E				

* 01: - 6, 21

02: A(2, 6), B(0, 0), C(- 2, 8)

05: $\pm\sqrt{2}$

24: A) D(4, 13) B) DE = 9

35: $2 + \sqrt{2}$

37: A) $2\ell^2$

B) circunferência circunscrita ao quadrado

38: A) Demonstração

B) $\frac{a+b+c}{3}$

42: $x^2 - 4xy + 4y^2 - 18x - 14y + 56 = 0$

43: A) $P\left(-\frac{b}{a}, 0\right), Q(0, b), P\left(\frac{b}{2(b-a)}, \frac{b(2b-a)}{2(b-a)}\right)$

B) a = -8, b = 4, c = 16

– Demonstração

RESULTADO FINAL **UECE 2010.2**

FARIAS BRITO

1º NO ENEM. NA UECE TAMBÉM.

1º LUGAR GERAL

ALVARO VIEIRA GASTRO RELO
278,0 PONTOS
CENÁRIO: CAROLINA MARI

2º LUGAR GERAL

ORLEANDRE CARLOS DA SILVA
277,0 PONTOS
CENÁRIO: CAROLINA MARI

3º LUGAR GERAL

JOEL MURDENA FREITAS
275,0 PONTOS
CENÁRIO: CAROLINA MARI

FARIAS BRITO < 1º NO ENEM DO MEC - É O MEC QUEM DIZ
1º NO VESTIBULAR DA UECE - É UECE QUEM DIZ

1º NO ENEM www.fariasbrito.com.br

ORGANIZAÇÃO EDUCACIONAL **FARIAS BRITO** 25 ANOS
Paixão por você. Paixão por vencer.