Exercícios de Matemática
Geometria Analítica – Cônicas

1) (ITA-2004) Considere todos os números z = x + iy que têm módulo $\frac{\sqrt{7}}{2}$ e estão na elipse $x^2 + 4y^2 = 4$. Então, o produto deles é igual a

a) $\frac{25}{9}$

b) $\frac{49}{16}$

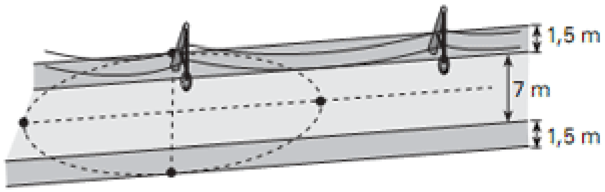
c) $\frac{81}{25}$

d) $\frac{25}{7}$

e) 4

2) (VUNESP-2010) A figura mostra a representação de algumas das ruas de nossas cidades. Essas ruas possuem calçadas de 1,5 m de largura, separadas por uma pista de 7 m de largura. Vamos admitir que:
I. os postes de iluminação projetam sobre a rua uma área iluminada na forma de uma elipse de excentricidade 0,943;
II. o centro dessa elipse encontra-se verticalmente abaixo da lâmpada, no meio da rua;
III. o eixo menor da elipse, perpendicular à calçada, tem exatamente a largura da rua (calçadas e pista).
Se desejarmos que as elipses de luz se tangenciem nas extremidades dos eixos maiores, a distância, em metros, entre dois postes consecutivos deverá ser de aproximadamente:

Dado: $0{,}943^2 \approx 0{,}889$ e $\sqrt{0{,}111} \approx 0{,}333$



a) 35.
b) 30.
c) 25.
d) 20.
e) 15.

3) (UFC-2005) A elipse F do plano cartesiano xy obtida da elipse E: $x^2 + 2y^2 - 6x + 4y - 25 = 0$ por uma translação que leva os focos de E em pontos eqüidistantes da origem e sobre o eixo ox admite uma equação igual a:

a) $\frac{x^2}{2} + y^2 = 18$

b) $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = 6$

c) $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 16$

d) $x^2 + 2y^2 = 25$

e) $2x^2 + 3y^2 = 49$

4) (Unicamp-1993) Dada uma elipse de semi-eixos a e b, calcule, em termos destes parâmetros, a área do quadrado nela inscrito, com lados paralelos aos eixos da elipse.

5) (ITA-2005) A distância focal e a excentricidade da elipse com centro na origem e que passa pelos pontos (1, 0) e (0, -2)são, respectivamente,

a) $\sqrt{3}$ e $\frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{2}$ e $\sqrt{3}$

c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\frac{1}{2}$

d) $\sqrt{3}$ e $\frac{\sqrt{3}}{2}$

e) $2\sqrt{3}$ e $\frac{\sqrt{3}}{2}$

6) (UEL-2002) Um quadrado está inscrito em uma elipse cujos semi-eixos medem **a** e **b**. Sabendo-se que cada lado do quadrado é paralelo a um dos eixos da elipse, calcule a área do quadrado.

a) $2(a^2 + b^2)$

b) $\frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}$

c) $4(a^2 + b^2)$

d) $\frac{4a^2b^2}{(a^2 + b^2)}$

e) $\frac{(a^2 + b^2)}{4a^2b^2}$

7) (Vunesp-2000) Considere a elipse de equação

$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

a) Mostre que o ponto P = (3, $\frac{12}{5}$) pertence à elipse e calcule a distância de P ao eixo das abscissas.

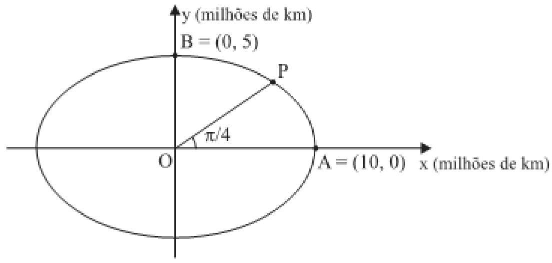
b) Determine os vértices Q e R da elipse que pertencem ao eixo das abscissas e calcule a área do triângulo PQR, onde P = $(3, \frac{12}{5})$.

8) (FGV-2002) No plano cartesiano, a curva de equações paramétricas x = 2cos*t* e y = 5 sen*t* com $t \in \mathbb{R}$ é:
a) uma senóide
b) uma cossenóide
c) uma hipérbole
d) uma circunferência
e) uma elipse

9) (ITA-1996) Tangenciando externamente a elipse e_1, tal que e_1:$9x^2 + 4y^2 - 72x - 24y + 144 = 0$, considere uma elipse e_2, de eixo maior sobre a reta que suporta o eixo menor de e_1 e cujos eixos têm a mesma medida que os eixos de e_1. Sabendo que e_2 está inteiramente contida no primeiro quadrante, o centro de e_2 é:
a) (7,3)
b) (8,2)
c) (8,3)
d) (9,3)
e) (9,2)

10) (Fuvest-2001) A elipse $x^2 + \frac{y^2}{2} = \frac{9}{4}$ e a reta y = 2x + 1, do plano cartesiano, se interceptam nos pontos A e B.
Pode-se, pois, afirmar que o ponto médio do segmento AB é:
a) (-2/3, -1/3)
b) (2/3, -7/3)
c) (1/3, -5/3)
d) (-1/3, 1/3)
e) (-1/4, 1/2)

11) (VUNESP-2008) Suponha que um planeta P descreva uma órbita elíptica em torno de uma estrela O, de modo que, considerando um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, sendo a estrela O a origem do sistema, a órbita possa ser descrita aproximadamente pela equação $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$, com x e y em milhões de quilômetros. A figura representa a estrela O, a órbita descrita pelo planeta e sua posição no instante em que o ângulo PÔA mede $\frac{\pi}{4}$.

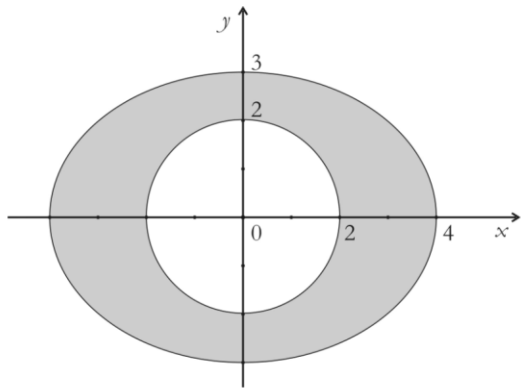


(figura fora de escala)

A distância, em milhões de km, do planeta P à estrela O, no instante representado na figura, é:

a) $2\sqrt{5}$
b) $2\sqrt{10}$
c) $5\sqrt{2}$
d) $10\sqrt{2}$
e) $5\sqrt{10}$

12) (UFPB-2006) A planta baixa de um projeto paisagístico encontra-se ilustrada na figura ao lado. A região hachurada corresponde à parte gramada e está limitada: internamente, pela circunferência que passa pelo ponto $(2,0)$, com centro na origem; e, externamente, pela elipse centrada na origem, com dois de seus vértices nos pontos $(4,0)$ e $(0,3)$. A região hachurada pode ser descrita pelo conjunto:



a) $\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq 4 \}$
b) $\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 9x^2 + 16y^2 \geq 144 \}$
c) $\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq 4 \text{ e } 9x^2 + 16y^2 \leq 144 \}$
d) $\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq 4 \text{ ou } 9x^2 + 16y^2 \leq 144 \}$
e) $\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4 \text{ e } 9x^2 + 16y^2 \leq 144 \}$
f) $\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4 \}$

13) (Vunesp-2005) A equação da elipse de focos F_1 = (-2, 0), F_2 = (2, 0) e eixo maior igual a 6 é dada por :

a) $\dfrac{x^2}{10} + \dfrac{y^2}{20} = 1$

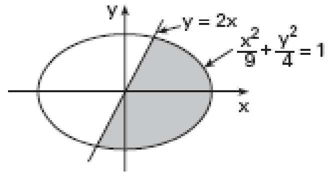
b) $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{5} = 1$

c) $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{15} = 1$

d) $\dfrac{x^2}{6} + \dfrac{y^2}{15} = 1$

e) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{25} = 1$

14) (Unifesp-2004) A área sombreada na figura, limitada pela elipse e pela reta indicadas, é:

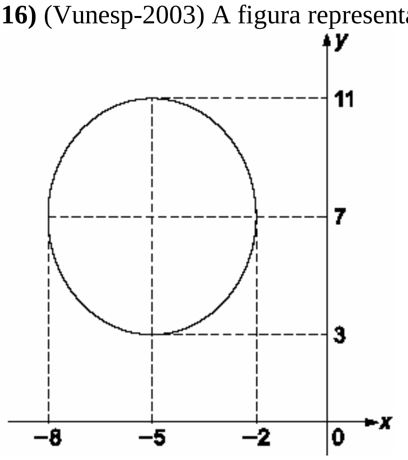


a) π .
b) 2π.
c) 3π.
d) 4π.
e) 6π.

15) (UFPB-1981) As coordenadas dos focos da cônica, de equação $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{36}=1$, são:

a) $(-\sqrt{11}, 0)$ e $(-\sqrt{11}, 0)$
b) $(0, -\sqrt{11})$ e $(0, -\sqrt{11})$
c) $(0, -\sqrt{11})$ e $(0, \sqrt{11})$
d) $(-\sqrt{11}, 0)$ e $(\sqrt{11}, 0)$
e) $(0, \sqrt{11})$ e $(\sqrt{11}, 0)$

16) (Vunesp-2003) A figura representa uma elipse.



A partir dos dados disponíveis, a equação desta elipse é

a) $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{7}=1$

b) $\dfrac{(x+5)^2}{9}+\dfrac{(y-7)^2}{16}=1$

c) $(x-5)^2 + (y-7)^2 = 1$

d) $\dfrac{(x-5)^2}{9}+\dfrac{(y+7)^2}{16}=1$

e) $\dfrac{(x+3)^2}{5}+\dfrac{(y-4)^2}{7}=1$

17) (AFA-1998) O lugar geométrico dos pontos do plano cartesiano que, juntamente com os pontos A(-3,5) e B(3,5), determina triângulos com perímetro 2p = 16 cm é uma

a) elipse.
b) parábola.
c) hipérbole.
d) circunferência.

18) (AFA-1999) A equação reduzida da cônica, representada no gráfico abaixo, é

a) $\dfrac{(x-4)^2}{9}+\dfrac{(y-3)^2}{16}=1$.

b) $\dfrac{(x-5)^2}{9}+\dfrac{(y+1)^2}{16}=1$.

c) $\dfrac{(x+1)^2}{16}+\dfrac{(y-5)^2}{9}=1$.

d) $\dfrac{(x+1)^2}{9}+\dfrac{(y-5)^2}{16}=1$.

19) (UFC-2002) O número de pontos de interseção das curvas $x^2 + y^2 = 4$ e $\dfrac{x^2}{15}+\dfrac{y^2}{2}=1$ é igual a:
a) 0
b) 3
c) 4
d) 5
e) 6

20) (Unicamp-1996) Uma elipse que passa pelo ponto (0,3) tem seus focos nos pontos (-4,0) e (4,0). O ponto (0,-3) é interior, exterior ou pertence à elipse? Mesma pergunta para o ponto $\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{13}{5}\right)$. Justifique sua resposta.

21) (Faap-1997) BAILADO RUSSO
(Guilherme de Almeida)

A mão firme e ligeira
puxou com força a fieira:
e o pião
fez uma elipse tonta
no ar e fincou a ponta
no chão.

É o pião com sete listas
de cores imprevistas.
Porém,
nas suas voltas doudas,
não mostra as cores todas
que tem:

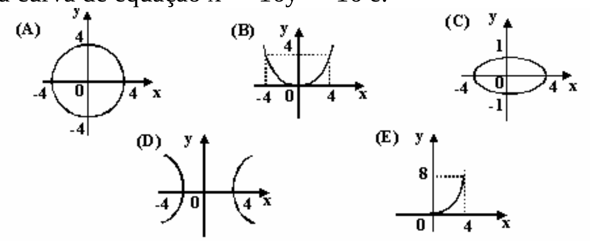
- fica todo cinzento,
no ardente movimento...
E até
parece estar parado,
teso, paralisado,
de pé.

Mas gira. Até que, aos poucos,
em torvelins tão loucos
assim,
já tonto, bamboleia,
e bambo, cambaleia...

Enfim,
tomba. E, como uma cobra,
corre mole e desdobra
então,
em hipérboles lentas,
sete cores violentas
no chão.

Mas como o poeta qualifica TONTA a elipse, podemos interpretar que ela:
a) descreveu um círculo irregular
b) saltou bruscamente para o alto
c) caiu ao contrário
d) saiu em linha reta
e) descreveu uma diagonal ao solo

22) (Cesgranrio-1998) O gráfico que melhor representa a curva de equação $x^2 + 16y^2 = 16$ é:



23) (Unitau-1995) A área de uma elipse de semi-eixos a e b é dada pela fórmula:
a) $S = a^2 + b^2$.
b) $S = (a^2 + b^2)\pi$.
c) $S = a^2b^2$
d) $S = \pi a/b$.
e) $S = \pi ab$.

24) (UFPE-1996) Considere dois pontos distintos A e B de um plano. O lugar geométrico dos pontos P deste plano tal que a soma das distâncias de P aos pontos A e B é constante, é uma curva denominada:
a) circunferência.
b) parábola.
c) hipérbole.
d) elipse.
e) reta.

25) (Faap-1997) BAILADO RUSSO
(Guilherme de Almeida)

A mão firme e ligeira
puxou com força a fieira:
e o pião
fez uma elipse tonta
no ar e fincou a ponta
no chão.

É o pião com sete listas
de cores imprevistas.
Porém,
nas suas voltas doudas,
não mostra as cores todas
que tem:

- fica todo cinzento,
no ardente movimento...
E até
parece estar parado,
teso, paralisado,
de pé.

Mas gira. Até que, aos poucos,
em torvelins tão loucos
assim,
já tonto, bamboleia,
e bambo, cambaleia...

Enfim,
tomba. E, como uma cobra,
corre mole e desdobra
então,
em hipérboles lentas,
sete cores violentas
no chão.

"Fez uma elipse tonta no ar... ". Elipse é uma curva:

a) fechada em que é constante a soma das distâncias de cada um dos seus pontos a dois pontos fixos, chamados focos.
b) aberta na qual cada um dos pontos é eqüidistante de um ponto fixo e de uma reta fixa chamada diretriz.
c) fechada na qual é constante a diferença das distâncias de cada um dos seus pontos a dois pontos fixos chamados focos.
d) fechada na qual os pontos se acham todos a igual distância de um ponto fixo chamado centro.
e) fechada que se afasta cada vez mais do seu ponto de partida, fazendo certo número de revoluções em volta desse ponto.

26) (ITA-1998) Considere a hipérbole H e a parábola T, cujas equações são, respectivamente,
$5(x + 3)^2 - 4(y - 2)^2 = -20$ e $(y - 3)^2 = 4(x - 1)$
Então, o lugar geométrico dos pontos P, cuja soma dos quadrados das distâncias de P a cada um dos focos da hipérbole H é igual ao triplo do quadrado da distância de P ao vértice da parábola T, é:

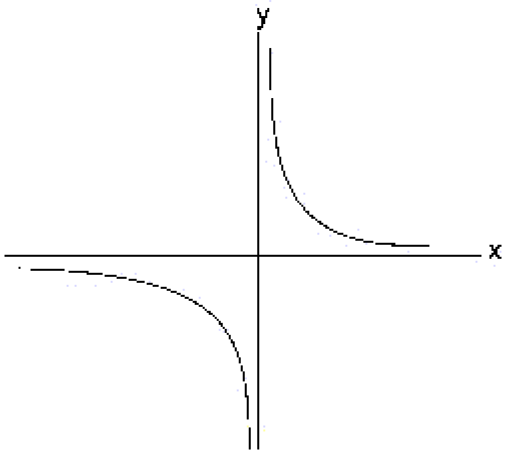
a) A elipse de equação $\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{3} = 1$
b) A hipérbole de equação $\frac{(y+1)^2}{5} + \frac{(x-3)^2}{4} = 1$
c) O par de retas dadas por $y = \pm(3x-1)$
d) A parábola de equação $y^2 = 4x + 4$
e) A circunferência centrada em (9, 5) e raio $\sqrt{120}$

27) (UFC-2007) No plano cartesiano, a hipérbole $xy = 1$ intersecta uma circunferência Γ em quatro pontos distintos *A*, *B*, *C* e *D*. Calcule o produto das abscissas dos pontos *A*, *B*, *C* e *D*.

28) (AFA-1999) O valor da excentricidade da cônica $\frac{(x-5)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1$ é

a) $\sqrt{2}$
b) $\frac{\sqrt{13}}{2}$
c) $\frac{\sqrt{5}}{2}$
d) $\sqrt{3}$

29) (UFSCar-2000) A equação que mais aproximadamente é representada pela curva ao lado é:



a) xy = 1.
b) x + y - 1 = 0.
c) xy = 0.
d) $x^2 - y = 0$.
e) x - y - 1 = 0.

30) (Mauá-2002) Precisa-se projetar um canal retilíneo para a ligação entre dois rios situados numa região plana. Nessa região, a representação matemática do curso de um dos rios é dada pela equação $y = x^2$ e a do outro, pela equação $y = x-2$. Admitindo-se que o canal possa ser construído em qualquer lugar entre os dois rios, qual seu menor comprimento possível?

31) (Unicamp-2000) Sejam A e B os pontos de intersecção da parábola $y = x^2$ com a circunferência de centro na origem
e raio $\sqrt{2}$.
a) Quais as coordenadas dos pontos A e B?
b) Se P é um ponto da circunferência diferente de A e de B, calcule as medidas possíveis para os ângulos $A\hat{P}B$.

32) (FUVEST-2010) A função f : IR → IR tem como gráfico uma parábola e satisfaz f(x+1) – f(x) = 6x-2, para todo número real x. Então, o menor valor de f(x) ocorre quando x é igual a
a) $\frac{11}{6}$
b) $\frac{7}{6}$
c) $\frac{5}{6}$
d) 0
e) $-\frac{5}{6}$

33) (UNIFESP-2006) A parábola $y = x^2 - tx + 2$ tem vértice no ponto (x_t , y_t). O lugar geométrico dos

vértices da parábola, quando t varia no conjunto dos números reais, é
a) uma parábola.
b) uma elipse.
c) um ramo de uma hipérbole.
d) uma reta.
e) duas retas concorrentes.

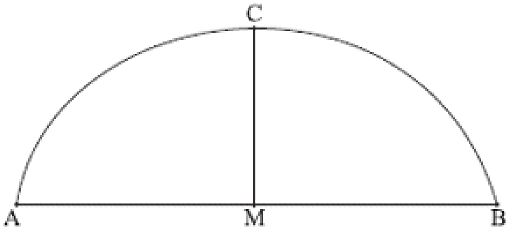
34) (Vunesp-2006) Fixado um sistema de coordenadas ortogonais em um plano, considere os pontos O(0, 0), A(0, 2) e a reta r de equação y = -1.
a) Se a distância do ponto Q(x_0, 2) ao ponto A é igual à distância de Q à reta r, obtenha o valor de x_0, supondo $x_0 > 0$.
b) Obtenha a equação do lugar geométrico dos pontos P(x, y) desse plano, cuja distância até o ponto A é igual à distância até a reta r.

35) (Vunesp-2004) O conjunto de todos os pontos P(x,y) do plano, com y ≠ 0, para os quais x e y satisfazem a equação

$$\text{sen}\left(\frac{y}{x^2+1}\right) = 0$$

é uma
a) família de parábolas.
b) família de circunferências centradas na origem.
c) família de retas.
d) parábola passando pelo ponto Q(0, 1).
e) circunferência centrada na origem.

36) (UNIFESP-2007) A figura mostra um arco parabólico ACB de altura CM = 16 cm, sobre uma base AB de 40 cm. M é o ponto médio de AB.



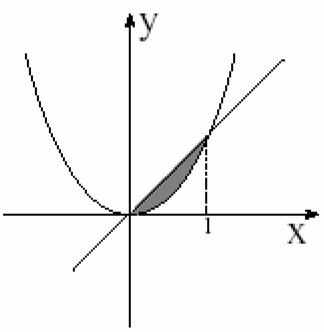
A altura do arco em centímetros, em um ponto da base que dista 5 cm de M, é
a) 15.
b) 14.
c) 13.
d) 12.
e) 10.

37) (UFC-2007) Encontre as equações das retas tangentes à parábola $y = x^2$ que passam pelo ponto (0, – 1).

38) (Mack-2006) A reta y = x é tangente à curva $y = x^2 + bx$, b≠0. Se m e p são as abscissas dos pontos em que a curva encontra o eixo Ox, m + p vale
a) -2
b) $\frac{2}{3}$
c) $\frac{1}{2}$
d) -1
e) $\frac{2}{3}$

39) (UFPB-2006) Uma reta tem coeficiente angular m=-1 e passa pelo vértice da parábola $4x - y^2 + 6y - 5 = 0$. Sua equação cartesiana é:
a) $x + y - 2 = 0$
b) $x - y + 3 = 0$
c) $x - y - 1 = 0$
d) $2x + y - 1 = 0$
e) $x + y - 1 = 0$
f) $3x + y - 3 = 0$

40) (PUC-PR-2003) Na figura seguinte, temos representadas as funções definidas por y = x e $y = x^2$. A região hachurada é definida por:



a) $\{(x,y) \in R^2 \mid 0 \le x \le \sqrt{2} \text{ e } x \le y \le x^2\}$
b) $\{(x,y) \in R^2 \mid 0 \le x \le \sqrt{2} \text{ e } x^2 \le y \le x\}$
c) $\{(x,y) \in R^2 \mid 0 \le x \le 1 \text{ e } x \le y \le x^2\}$
d) $\{(x,y) \in R^2 \mid 0 \le y \le \sqrt{2} \text{ e } \sqrt{y} \le x \le y\}$
e) $\{(x,y) \in R^2 \mid 0 \le x \le 1 \text{ e } x^2 \le y \le x\}$

Gabarito

1) Alternativa: B

2) Alternativa: B

3) Alternativa: A

4) Resp: área = $\dfrac{4a^2b^2}{a^2+b^2}$

5) Alternativa: E
(apenas se considerarmos que os eixos da elipse são paralelos aos eixos coordenados. Caso contrário a elipse não está definida)

6) Alternativa: D

7) a) Substituindo o ponto (3, $\dfrac{12}{5}$) na equação da elipse, obtemos 1 = 1. A distância do ponto P ao eixo das abscissas é $\dfrac{12}{5}$.
b) Q = (-5, 0) e R = (5, 0) e a Área pedida é de 12 u^2

8) Alternativa: E

9) Alternativa: D

10) Alternativa: D

11) Alternativa: B

12) Alternativa: C

13) Alternativa: B

14) Alternativa: C

15) Alternativa: C

16) Alternativa: B

17) Alternativa: A

18) Alternativa: D

19) Alternativa: C

20) O ponto (0, –3) pertence à elipse, e o ponto (5/2; 13,5) é externo a ela. Isso é facilmente comprovado obtendo-se a equação da elipse, e substituindo-se os pontos dados. No primeiro caso, a substituição resulta em 1, portanto pertence à elipse. No segundo caso, a substituição resulta em valor maior que 1 portanto é externo.

21) Alternativa: A

22) Alternativa: C

23) Alternativa: E

24) Alternativa: D

25) Alternativa: A

26) Alternativa: E

27) Pelas relações de Girard entre coeficientes e raízes de equações polinomiais, segue que seu produto é igual a 1.

28) Alternativa: B

29) Alternativa: A

30) Resposta:
$\dfrac{7\sqrt{2}}{8}$ (≈ 1,24) unidades de comprimento.

31) a) A(1, 1) e B(-1, 1)
b) 45^o e 135^o

32) Alternativa: C

33) Alternativa: A

34) a) 3
b) y= $\dfrac{1}{6}$ (x^2+3)

35) Alternativa: A

36) Alternativa: A

37) Resposta: y = 2x – 1 ou y = – 2x – 1.

38) Alternativa: D

39) Alternativa: A

40) Alternativa: E