Filipe Rodrigues de S. Moreira

Graduando em Engenharia Mecânica –
Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA)
(Fevereiro 2005)

Geometria Analítica

Capítulo I. Introdução

A Geometria, como ciência dedutiva, foi criada pelos gregos, mas apesar do seu brilhantismo faltava operacionabilidade. Infelizmente isto só foi conseguido mediante a Álgebra como princípio unificador. Os gregos, porém, não eram muito bons em álgebra. Mais do que isso, somente no século XVII a álgebra estaria razoavelmente aparelhada para uma fusão criativa com a geometria.

Ocorre porém que o fato de haver condições para uma descoberta não exclui o toque de genialidade de alguém. E no caso da geometria analítica, fruto dessa fusão, o mérito não foi de uma só pessoa. Dois franceses, Pierre de Fermat (1601-1665) e René Descartes (1596-1650), curiosamente ambos graduados em Direito, nenhum deles matemático profissional, são os responsáveis por esse grande avanço científico: o primeiro movido basicamente por seu grande amor, a matemática e o segundo por razões filosóficas. E, diga-se de passagem, não trabalharam juntos: a geometria analítica é um dos muitos casos, em ciência, de descobertas simultâneas e independentes.

Se o bem-sucedido Pierre de Fermat zeloso e competente conselheiro junto ao Parlamento de Toulouse dedicava muitas de suas melhores horas de lazer à matemática, certamente não era porque faltasse outra maneira de preencher o seu tempo disponível. Na verdade Fermat simplesmente não conseguia fugir à sua verdadeira vocação e, apesar de praticar matemática como hobby, nenhum de seus contemporâneos contribuiu tanto para o avanço desta ciência quanto ele. Além da geometria analítica, Fermat teve papel fundamental na criação do Cálculo Diferencial, do Cálculo de Probabilidades e, especialmente, da teoria dos números, ramo da matemática que estuda as propriedades dos números inteiros.

A contribuição de Fermat à geometria analítica encontra-se num pequeno texto intitulado Introdução aos Lugares Planos e Sólidos (1636 no máximo) que só foi publicado em 1679, postumamente, junto com sua obra completa. É que Fermat, bastante modesto, era avesso a publicar seus trabalhos. Disso resulta, em parte, o fato de Descartes comumente ser mais lembrado como criador da Geometria Analítica.

O interesse de Descartes pela matemática surgiu cedo, no “College de la Fleche”, escola do mais alto padrão, dirigida por jesuítas, na qual ingressará aos oito anos de idade. Mas por uma razão muito especial e que já revelava seus pendores filosóficos: a certeza que as demonstrações ou justificativas matemáticas proporcionam. Aos vinte e um anos de idade, depois de freqüentar rodas matemáticas em Paris (além de outras) já graduado em Direito, ingressa voluntariamente na carreira das armas, uma das poucas opções “dignas” que se ofereciam a um jovem como ele, oriundo da nobreza menor da França. Durante os quase nove anos que serviu em vários exércitos, não se sabe de nenhuma proeza militar realizada por Descartes. É que as batalhas que ocupavam seus pensamentos e seus sonhos travavam-se no campo da ciência e da filosofia.

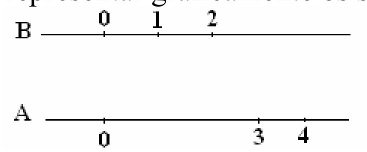
A Geometria Analítica de Descartes apareceu em 1637 no pequeno texto chamado A Geometria como um dos três apêndices do Discurso do método, obra considerada o marco inicial da filosofia moderna. Nela, em resumo, Descartes defende o método matemático como modelo para a aquisição de conhecimentos em todos os campos.

A Geometria Analítica, como é hoje, pouco se assemelha às contribuições deixadas por Fermat e Descartes. Inclusive sua marca mais característica, um par de eixos ortogonais, não usada por nenhum deles. Mais, cada um a seu modo, sabia que a idéia central era associar equações a curvas e superfícies. Neste particular, Fermat foi mais feliz. Descartes superou Fermat na notação algébrica.

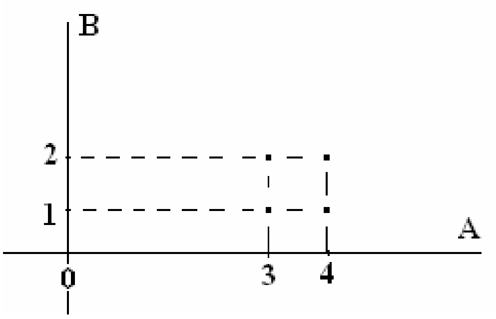
HYGINO H. DOMINGUES

Capítulo II. Introdução ao $\mathbb{R}^2$ e estudo do ponto.

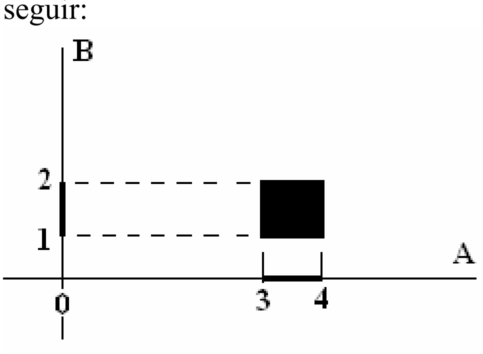
Sejam os conjuntos $B = \{1,2\}$ e $A = \{3,4\}$. De certo, são conjuntos finitos, de números reais e com o auxílio da reta real, podemos facilmente representar graficamente os seus elementos.



É conhecida uma operação entre conjuntos, chamada produto cartesiano, a qual produz como resultado um outro conjunto, em que os novos elementos são entidades matemáticas, formadas por duas partes, uma oriunda do conjunto A e outra do conjunto B. Essa entidade matemática é denominada **par ordenado**. Vamos explicitar o resultado do produto cartesiano entre os conjuntos A e B. $A \times B = \{(3,1),(3,2),(4,1),(4,2)\}$. Veja que nos elementos de $A \times B$, o primeiro número no par ordenado é advindo do conjunto A enquanto que o segundo veio do conjunto B. Vamos definir uma maneira de representar o conjunto $A \times B$ e para isso utilizaremos também retas reais, porém numa disposição diferente. Veja!!!

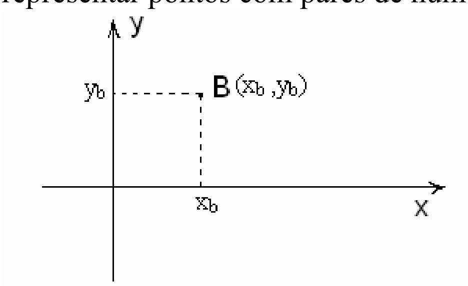


Utilizando-se de retas reais podemos representar esse resultado do conjunto $A \times B$, porém a questão é que essas retas reais estão dispostas convenientemente, uma perpendicular à outra. A essas retas, nessa disposição, chamamos eixos coordenados. Na reta que está na posição horizontal, representaremos os elementos advindos do conjunto A e na reta vertical os elementos advindos do conjunto B. Como podemos perceber, os quatro elementos do conjunto $A \times B$ foram representados fazendo-se o cruzamento de um número advindo do conjunto A com o seu respectivo no conjunto B. Suponha agora que o conjunto A seja do tipo: $A = \{x \in R / 3 \leq x \leq 4\}$ e que o conjunto B seja expresso da forma $B = \{x \in R / 1 \leq x \leq 2\}$. Fazendo agora a operação $A \times B$, chega-se em uma nova figura mostrada a seguir:



Como podemos perceber o resultado dessa operação foi uma região, um contorno geométrico fechado e seu interior. Agora imagina o que acontece se definirmos o conjunto A como sendo os reais e o conjunto B também. Como é de se esperar, se fizermos o produto cartesiano dos reais com o próprio conjunto dos reais, teremos o que chamamos de **plano cartesiano** ou ainda de $\mathbb{R}^2$**.** A partir daqui, se pode definir o que chamamos de **ponto** com sendo o resultado do produto cartesiano entre dois conjuntos unitários, ou ainda como sendo um elemento de produto cartesiano entre dois conjuntos não vazios.

O ponto pode ser entendido como o "endereço" de certa posição num dado plano. Como se pode representar pontos com pares de números reais, é possível definir operações algébricas com esses pontos.



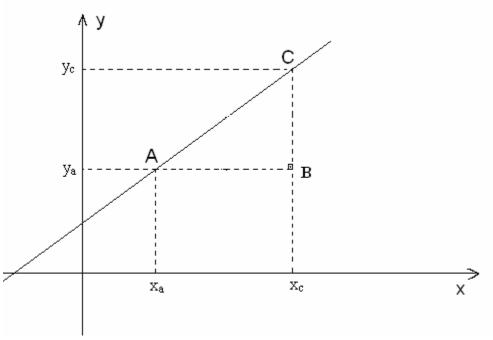
B é um ponto qualquer, do plano XOY e para cada B está assossiado um par ordenado, par esse que é representado da seguinte forma: (x_b, y_b) onde x_b é a posição relativa ao eixo X e y_b é a posição relativa ao eixo Y.

Como dito acima, o ponto é representado no eixo cartesiano por uma coordenada ***x***, denominada de abscissa e uma coordenada ***y***, chamada ordenada. Dizemos que dois pontos são iguais quando acontece a seguinte propriedade:

$$A(x_A, y_A) = B(x_B, y_B) \Leftrightarrow x_A = x_B \quad e \quad y_A = y_B$$

II.1 - Distância entre dois pontos

Sejam A(x_A ,y_A) e C(x_C ,y_C) dois pontos do plano. A distância entre esses dois pontos é exatamente o valor da hipotenusa do triângulo ABC mostrado abaixo. Logo se conseguirmos determinar o valor dos catetos, utilizando o Teorema de Pitágoras, será possível achar essa distância. Logo, como o cateto $AB = x_C - x_A$ e o cateto $BC = y_C - y_A$, aplicando o Teorema de Pitágoras vêm:



$$d_{A,C} = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2}$$

Exercícios Resolvidos!!!!

R1) Uma formiga está sobre uma mesa e o ponto inicial que ela se encontra é o ponto P(2, 3). Ela caminha em linha reta e para no ponto Q(-6, -3). Calcular a distância que a formiga andou.
Solução:
Aplicando a fórmula da distância entre dois pontos, chegamos à distância que a formiga andou.

$$d_{P,Q} = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2} = \sqrt{(2-(-6))^2 + (3-(-3))^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{64+36} = 10$$

R2) Duas circunferências são tangentes externamente. O centro de uma circunferência está no ponto C_1(3, 5) e o centro da outra está no ponto C_2(0, 1). Calcule a soma dos raios dessas circunferências.
Solução:
Foi dito que essas circunferências são tangentes externamente, logo a soma dos raios é exatamente a distância entre C_1 e C_2. $d_{P,Q} = \sqrt{(x_{C_1} - x_{C_2})^2 + (y_{C_1} - y_{C_2})^2} = \sqrt{(3-0)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

Praticando!!!!

P1-) Calcule a distância entre os pontos abaixo:
a) P(0, 0) e Q(3, 4)
b) P(1, 13) e Q(6, 1)
c) P(7, 0) e Q(1, 8)
d) P(-6, 13) e Q(-1, 1)

P2-) Dado um triângulo ABC, com vértices A(0, 0), B(12, 5) e C(3, 4). Calcule o seu perímetro.

P3-) Seja um hexágono, tal que, A(10, 0), B(5, $5\sqrt{3}$), C(-5, $5\sqrt{3}$), D(-10, 0), E(-5, $-5\sqrt{3}$) e F(5, $-5\sqrt{3}$), são seus vértices. Determine os valores das diagonais AC, BD, CE, DF, EA e FB. O que pode-se concluir sobre esse hexágono?

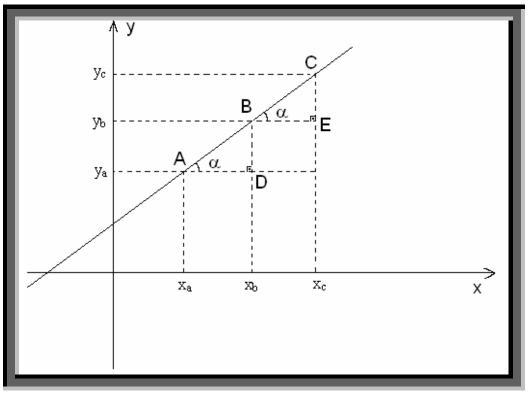
P4-) Determine os valores de x e y que tornam A e B o mesmo ponto:
a) A(1+ x, y - 2x + 2) e B(-3, -1 + 3y).
b) A(2x + y, y - 5) e B(x^2 – 4, 2y - 9).
c) A(x – y – 3 , x + y – 3) e B(2x , 3y).

P5-) Sabe-se que as coordenadas do baricentro de um triângulo qualquer são dadas por:

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \quad \text{e} \quad y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}.$$

Calcule as coordenadas do baricentro de um triângulo ABC, com vértices A(-6, 0), B(6, 0) e C(0, $6\sqrt{3}$).
Mostre que GA = GB = GB = $4\sqrt{3}$.

II.2 - Razão de secção



Esse assunto tem sido pouco explorado nas provas em geral, mas em contra partida, embora seja um assunto relativamente simples, quando é cobrado poucos candidatos acertam a questão. Isso a acontece devido principalmente à falta de rigor e didatismo dos livros que esse assunto. A idéia aqui é que você perceba o conceito que está por trás desse assunto e assim a sua compreensão vai ser automática.

Tem-se um dado segmento AC de extremos A(x_a ,y_a) e C(x_c ,y_c). Queremos determinar um ponto B, sobre a reta que contêm o segmento $\overline{AC}$ (veja que B está sobre a reta e não necessariamente no segmento), tal que a relação $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = r$ seja mantida. Vamos explicar o que essa relação apresentada quer dizer: quando escrevemos que $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = r$, estamos querendo passar a informação de que o tamanho $\overline{AB}$ é “r” vezes maior que o tamanho $\overline{BC}$. O problema é que em algumas provas oficiais, foi cobrado esse conceito, porém, com um valor negativo para “r”. A partir desse momento essa notação “$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = r$” se torna, na verdade, um abuso de linguagem e uma falta de rigor, porque o que significa a divisão entre dois tamanhos ser negativa ? De fato, quando se pensa em tamanhos se trata de um absurdo, porém podemos dar um tratamento mais elegante à essa questão considerando $\overline{AB}$, não como segmento mas sim como um vetor. Ainda assim a expressão “$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = r$” é uma heresia matemática, pois não se defini uma divisão de vetores, logo, uma maneira mais formal de se formular esse enunciado é usando a expressão $\overrightarrow{AB} = r.\overrightarrow{BC}$. Fazendo desse jeito, até a questão é simplificada, pois é possível resolver o problema de uma só vez (tanto para o termo em “x” como para o termo em “y”). Veja: $\overrightarrow{AB} = r.\overrightarrow{BC}$. Assim, temos: $\vec{B} - \vec{A} = r(\vec{C} - \vec{B})$ isolando *B* chegamos a $\vec{B} = \left(\frac{1}{1+r}\right)\vec{A} + \left(\frac{r}{1+r}\right)\vec{C}$.

Esse resultado significa que a relação entre x_B, x_A e x_C é dada por:

$$\boxed{x_B = \left(\frac{1}{1+r}\right)x_A + \left(\frac{r}{1+r}\right)x_C} \qquad \text{(I)}$$

Da mesma forma achamos a relação entre y_B, y_A e y_C é dada por:

$$\boxed{y_B = \left(\frac{1}{1+r}\right)y_A + \left(\frac{r}{1+r}\right)y_C} \qquad \text{(II)}$$

II.3 - Coordenadas do ponto médio

Seja B o ponto médio de $\overline{AC}$. Para acharmos as coordenadas de B, basta ver que: $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = 1$, ou seja, $\overline{BC} = \overline{AB}$ então fazendo r = 1 nas equações (I) e (II) temos que:

$$\boxed{x_B = \frac{x_A + x_C}{2}} \quad \text{e} \quad \boxed{y_B = \frac{y_A + y_C}{2}}.$$

Exercícios Resolvidos!!!!

R3) Dados os pontos A(1, 2) e C(2, 6), determinar as coordenadas de um ponto B (sobre a reta que contêm AC), tal que $\overline{AB} = 2\overline{BC}$.

Solução:

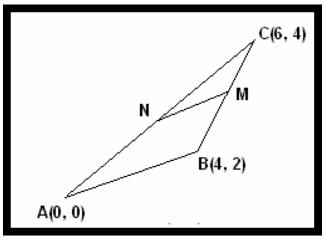
Temos que, $\vec{B} - \vec{A} = 2(\vec{C} - \vec{B}) \Rightarrow 3\vec{B} = \vec{A} + 2\vec{C} \Rightarrow \vec{B} = \frac{1}{3}\vec{A} + \frac{2}{3}\vec{C}$. Assim, temos, $x_B = \frac{1}{3}x_A + \frac{2}{3}x_C = \frac{1}{3}(1) + \frac{2}{3}(2) = \frac{5}{3}$ e $y_B = \frac{1}{3}y_A + \frac{2}{3}y_C = \frac{1}{3}(2) + \frac{2}{3}(6) = \frac{14}{3}$, logo B$\left(\frac{5}{3}, \frac{14}{3}\right)$.

R4) Calcule as coordenadas do ponto médio do segmento AB. Dados, A(0, 8), B(2, 2).

Solução:

Seja M o ponto médio de AB. Temos: $x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{0+2}{2} = 1$ e $y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{8+2}{2} = 5$, logo, M(1, 5).

R5) Seja o triângulo ABC. A(0, 0), B(4, 2) e C(6, 4). Determine o valor da base média relativa ao lado AB.



Solução:

N é o ponto médio de AC e M o ponto médio de BC. A base média é o e segmento MN.

$x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{4+6}{2} = 5$. $y_M = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{2+4}{2} = 3$, assim, M(5, 3).

$x_N = \dfrac{x_A + x_C}{2} = \dfrac{0+6}{2} = 3$. $y_N = \dfrac{y_A + y_C}{2} = \dfrac{0+4}{2} = 2$, assim, N(3, 2).
O comprimento de MN é dado pela distância de M à N. $d_{M,N} = \sqrt{(x_M - x_N)^2 + (y_M - y_N)^2} = \sqrt{(5-3)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{5}$

Praticando!!!!

P6-) Sejam os pontos A(1,3) e B(2,5). Determine as coordenadas de um ponto C tal que C divida o segmento AB nas seguintes proporções:

a-) $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = 3$ b-) $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = -4$ c-) $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \dfrac{4}{3}$

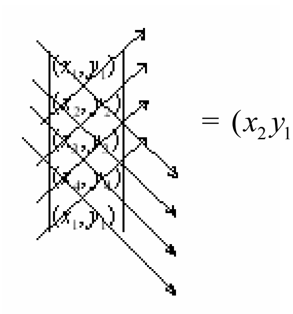
d-) $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \dfrac{1}{5}$ e-) $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \dfrac{-2}{7}$

P7-) Determine as coordenadas de um ponto C, pertencente ao segmento AB com A(1,3) e B(2,5), tal que: $5\overline{AB} = 3\overline{AC} + 2\overline{CB}$.

P8*-) Seja o triângulo ABC. A(0, 0), B(2, 2) e C(6, 8). Determine o valor da base média relativa ao lado AB.

II.4 - Condição de alinhamento de pontos

Esse assunto é mostrado nos livros convencionais de uma forma que lhe permite verificar a condição de alinhamento de três em três pontos. Esse dispositivo prático que será apresentado, o OCAP (Operador Condição de Alinhamento entre Pontos), é capaz de verificar se “n” pontos estão alinhados ao mesmo tempo. Veremos mais a frente que o resultado numérico que é gerado por esse operador tem um significado muito importante e poderoso. Veja como se aplica o OCAP: sejam $P_1(x_1, y_1),\ P_2(x_2, y_2),\ P_3(x_3, y_3)\ e\ P_4(x_4, y_4)$, pontos do plano. P_1, P_2, P_3, P_4, estarão alinhados $\Leftrightarrow$ OCAP = 0. Veja a figura abaixo: colocar os pontos, numa ordem à sua escolha, um embaixo do outro e fazer as multiplicações nos sentido das setas (primeiro para cima) e quando forem feitas as multiplicações no sentido para baixo, troca-se o sinal do número resultante. No final soma-se tudo e esse é o resultado do OCAP.

OCAP =  $= (x_2y_1 + x_3y_2 + x_4y_3 + x_1y_4 - x_1y_2 - x_2y_3 - x_3y_4 - x_4y_1)$.

Praticando!!!!

P8-) Verifique se os pontos abaixo estão alinhados:

a) P_1(0, 1), P_2(-1, 0), P_3(4, 5) .

b) P_1(0, 2), P_2(1, 3), P_3(4, 4)

c) P_1(0, 0), P_2(-1, 5), P_3(4, -20) .

d) P_1(10, 0), P_2(-1, -1), P_3(4, -5) .

e) P_1(8, 1), P_2(-10, 0), P_3(5, 5) .

f) P_1(0, 1), P_2(-1, 10), P_3(14, 5) .

P9-) Dados os pontos A(0, 0) e B(5, 5). Seja um ponto Q(r, s) que está alinhado com A e B ao mesmo tempo. Determine uma relação entre r e s.

P10-) Dados os pontos A(0, 2) e B(2, 0). Seja um ponto Q(r, s) que está alinhado com A e B ao mesmo tempo. Determine uma relação entre r e s.

P11-) Dados os pontos A(-1, 2) e B(1, 1). Seja um ponto Q(r, s) que está alinhado com A e B ao mesmo tempo. Determine uma relação entre r e s.

P12-) Dados os pontos A(2, 4) e B(2, 8). Seja um ponto Q(r, s) que está alinhado com A e B ao mesmo tempo. Determine uma relação entre r e s.

P13-) Dados os pontos A(3, 2) e B(2, 4). Seja um ponto Q(r, s) que está alinhado com A e B ao mesmo tempo. Determine uma relação entre r e s.

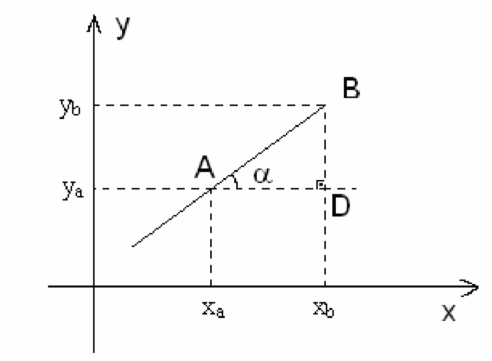
***P14-)** O ponto P(r,s) é tal que está alinhado com Q e R. Q é o baricentro do triângulo formado por C(0, 0), D(3, 3) e E(6, 9). B é um ponto sobre o segmento AC tal que $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = 3$ em que A(3, 12). Determinar uma relação entre r e s.

Capítulo III. Estudo da reta.

Podemos definir uma reta como sendo uma sucessão de infinitos pontos, distintos, alinhados. O fato de estarem alinhados confere a existência de uma direção constante. Assim sendo pode-se afirmar que para existir uma reta é necessário da existência de dois pontos distintos, ou ainda um ponto e uma direção. A reta não tem fim e divide o plano que a contém em duas partes.

III.1 - Equações da reta

A partir do enunciado acima podemos determinar a equação de uma reta se soubermos dois pontos pelos quais ela passa. Sendo dados esses dois pontos, ou seja, conhecemos as suas coordenadas integralmente, já sabemos que por eles vai passar uma reta única, e é justo que cada ponto que esteja nessa reta a relação do seu "x" com seu "y" seja constante. Veja a figura:



A no segmento formado por A e B todos os pontos estão alinhados, assim, podemos fazer o OCAP com os pontos dados e um ponto genético (x, y) e esse OCAP tem que resultar zero. Achar a equação de uma reta é relacionar as coordenadas genéricas x e y de tal forma que aplicando nessa relação a ordenada tem-se como resultado a abcissa ou vice versa.

$$\begin{vmatrix} x_a, y_a \\ x_b, y_b \\ x, y \\ x_a, y_a \end{vmatrix} = x_b y_a + x_a y_b + x_a y - x_a y_b - x_b y - x y_a = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{(y_b - y_a)}_{a} x + \underbrace{(x_a - x_b)}_{b} y + \underbrace{(x_b y_a - x_a y_b)}_{c} = 0 .$$

$$\boxed{ax + by + c = 0 \quad \textit{equação geral da reta.}}$$

Vamos agora partir da equação encontrada acima e isolar o termo “y”, ou seja, vamos escrever o y como uma função de “x”:

$$y = \underbrace{\left(\frac{y_b - y_a}{x_b - x_a} \right)}_{m} x + \underbrace{\left(\frac{x_a y_b - x_b y_a}{x_a - x_b} \right)}_{n}$$

Esse novo formato de equação é muito utilizado e tem um nome específico, o chamamos de ***equação reduzida*** da reta.

$$\boxed{y = mx + n \quad \textit{equação reduzida da reta}}$$

Da figura acima, pode-se ver que foi construído um triângulo retângulo ABD com o prolongamento dos segmentos que formam os pontos A e B. O ângulo α que aparece como ângulo interno do triângulo ABC é exatamente o ângulo que a reta AB forma com a horizontal, pois se tem a situação de duas retas paralelas cortadas por uma mesma transversal que forma ângulos correspondentes. O cateto oposto a α, BD, tem valor $y_b - y_a$ e o cateto adjacente AD tem valor $x_b - x_a$. Podemos então achar o valor da tangente de α da seguinte maneira:

$\tan\alpha = \dfrac{cat.\,oposto\ à\ \alpha}{cat.\,ajacente\ à\ \alpha} = \dfrac{y_b - y_a}{x_b - x_a} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \mathbf{m}$. Veja que interesante, o valor do coeficiente que multiplica o “x” na equação reduzida é numéricamente igual à tangente do ângulo que a reta faz com a horizontal. Devido a esse fato, esse coeficiente recebeu um nome conveniente, **m** é chamado de **COEFICIENTE ANGULAR.** Trata-se da parte da reta que dá a sua direção. O outro coeficiente da equação reduzida “n” é chamado de coeficiente linear e ele tem um significado; veja que se substituirmos “x = 0” na equação reduzida, resulta-se em “y = n”, ou seja, esse “n” é exatamente o ponto em que a reta corta o eixo Oy, é chamado de **COERICIENTE LINEAR.** Assim sendo, conhecendo-se o coeficiente angular e um ponto $P(x_0, y_0)$ em que uma reta passa é possível encontrar sua equação da seguinte maneira:

$$(y - y_o) = m\,(x - x_o) \ \Rightarrow\ y = \mathbf{m}x + (y_o - mx_o).$$

A partir da equação geral da reta ou da equação reduzida da reta, podemos chegar a outro tipo de equação chamado ***equação segmentaria*** da reta.

Vejamos: $ax + by + c = 0,\ c \neq 0 \Rightarrow ax + by = -c$. Dividindo toda a equação por (-c) tem-se:

$$-\frac{ax}{c}-\frac{by}{c}=1 \Rightarrow \frac{x}{-c/a}+\frac{y}{-c/b}=1,\ \ fazendo\ \ p=-\frac{c}{a}\ \ e\ \ q=-\frac{c}{b}\Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1\ \ equação\ \ segmentária\ \ da\ \ reta}.$$

Exercícios Resolvidos!!!!

R6) Determinar a equação geral da reta que passa pelos pontos P(0, 6) e Q(6, 0).

Solução:

Aplicando o "L" aos pontos P e Q, temos: $\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \\ x & y \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 36+0+0-0-6y-6x=0 \quad \Rightarrow x+y-6=0$

R7) Dados dos pontos, A(0, 2) e B(-3, -1), determinar a equação da reta que contém o segmento AB.

Solução:

Como por dois pontos passa uma única reta, temos: y = ax + b. a = $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2-(-1)}{0-(-3)}=1$, logo sua equação é:

y = x + n. Como o ponto (0, 2) pertence à reta esse satisfaz a sua equação. 2 = 0 + n, n = 2. e a equação da reta é: y = x + 2.

R8) Dadas as retas abaixo na forma geral. Passe para forma reduzida.

a) $2y+8x-9=0$. b) $3y+18x-10=0$

Solução:

a) $2y+8x-9=0$. Basta isolar o y. $2y=-8x+9 \Rightarrow y=\frac{-8}{2}x+\frac{9}{2} \ \Rightarrow y=-4x+\frac{9}{2}$

b) $3y+18x-10=0$. Isolando o y: $3y+18x-10=0 \Rightarrow y=\frac{-18}{3}x+\frac{10}{3} \Rightarrow y=-6x+\frac{10}{3}$.

R9) Sejam os pontos A(0, 0), B(0, 4), C(4, 4) e D(4, 0) os vértices de um quadrilátero. Determine:
a) A reta suporte que contem a diagonal AC
b) A reta suporte que contem a diagonal BD
c) A reta suporte que contem o segmento determinado pelo ponto A e o ponto médio do lado CD.
d) A reta suporte que contem o segmento determinado pelo ponto médio do lado BC e o ponto médio do lado CD.

Solução:
a)Reta suporte de um segmento é a reta que contem esse segmento. Assim, basta fazer o L com os pontos A(0,0), C(4, 4) e um ponto genérico (x, y).

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 4 \\ x & y \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 4x - 4y = 0 \Rightarrow y = x.$$

b) Fazemos o mesmo feito no item a só que agora com os pontos B(0, 4), D(4, 0) e um ponto genérico (x, y). Aplicamos o L e obtemos que a equação da reta é: $y = -x + 4$.

c) Vamos achar o ponto médio de CD. C(4, 4) e D(4, 0). $x_M = \dfrac{x_C + x_D}{2} = \dfrac{4+4}{2} = 4$ e $y_M = \dfrac{y_C + y_D}{2} = \dfrac{4+0}{2} = 2$. Assim, M(4, 2). Vamos fazer o L com os pontos A(0, 0), M(4, 2) e um ponto genérico (x, y). achamos a equação: $y = \dfrac{x}{2}$.

d) Determinando os ptos médios de BC e CD, M e N respectivamente. M $\left(\dfrac{0+4}{2}, \dfrac{4+4}{2}\right)$ = M(2, 4).
N$\left(\dfrac{4+4}{2}, \dfrac{4+0}{2}\right)$ = N(4, 2). Fazendo L com M, N e um ponto genérico (x, y) encontramos a equação: $y = -x + 6$.

Praticando!!!!

P14-) Determine as equações das retas que passam pelos pontos indicados abaixo:
a) A(0, 0) B(2, 4) b) A(-1, 1) B(5, 5)
c) A(0, 3) B(-2, 1) d) A(2, 7) B(-2, -13)
e) A(8, 3) B(-6, -4) f) A(0, 0) B(-3, 0)

P15-) Dado o triângulo com vértices A(0, 0), B(2, 3), C(1, 0). Determine:
a) As coordenadas do baricentro.
b) Os pontos médios dos lados AB, BC e CA.
c) A equação da reta suporte da mediana relativa ao vértice A.
d) A equação da reta suporte da mediana relativa ao vértice B.
e) A equação da reta suporte da mediana relativa ao vértice C.
f) A equação da reta suporte da base média relativa à base BC.
g) A equação da reta suporte da base média relativa à base AB.

***P16-)** Dados os pontos A(-10, 0), B(10, 0), C(0, $10\sqrt{3}$). Ache um ponto E, sobre AC, tal que ligando B e E, cortamos o triângulo ABC em dois triângulos BCE e BAE, com $\dfrac{A_{BCE}}{A_{BAE}} = 2$.

III.2 - Intersecção entre retas

Lembra quando, lá na 7º série do primeiro grau, aprendemos a resolver sistemas de equações do primeiro grau? Ali era dado um sistema de duas equações do 1ª grau e duas incógnitas e tínhamos que descobrir os valores das incógnitas que satisfaziam ao mesmo tempo, as duas equações. Pois é, vimos no item III.1, que as retas tem equação da forma $ax + by + c = 0$, que são equações do 1º grau. Sabemos que duas retas não paralelas e nem coincidentes se interceptam uma única vez. Assim, dadas duas retas, achar a sua intersecção é determinar o x e o y, que satisfazem ao mesmo tempo as duas equações, ou seja, voltamos à 7º série e vamos agora resolver sistemas de primeiro grau, de duas equações e duas incógnitas.

A intersecção de r com s é: $\vec{r} \cap \vec{s} = \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$, temos que resolver esse sistema e achar o ponto (x, y) que satisfaz essas duas equações ao mesmo tempo.

Obs.: Em alguns casos será necessário fazer intersecção com o eixo Ox ou com Oy. Nesses casos agimos da seguinte forma:

Intersecção com o eixo Oy: Qualquer ponto do eixo Oy tem abscissa 0, logo basta substituir o x da equação conhecida por 0 e ver o valor de y correspondente.

Ex: fazer a intersecção entre a reta $y = 3x + 5$ com o eixo Oy: $y = 3.(0) + 5 = 5$. Logo essa reta corta o eixo Oy no ponto (0, 5).

Intersecção com o eixo Ox: Qualquer ponto do eixo Ox tem ordenada 0, logo basta substituir o y da equação conhecida por 0 e ver o valor de x correspondente.

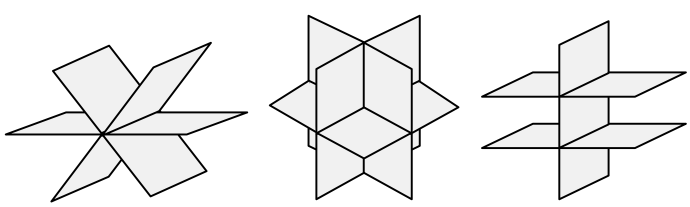
Ex: fazer a intersecção entre a reta $y = 3x + 5$ com o eixo Ox: $0 = 3x + 5 \Rightarrow x = \frac{-5}{3}$. Logo essa reta corta o eixo Ox no ponto $\left(\frac{-5}{3}, 0\right)$

Algumas considerações importantes

Nesse momento vale à pena discutirmos uma questão proposta pelo vestibular da Academia da Força Aérea de 2001/2002. Acabamos de estudar a maneira de se proceder para determinar a intersecção de duas retas e como foi dito, trata-se da resolução de um sistema linear com duas equações e duas incógnitas. O vestibular da AFA propôs uma análise menos braçal e mais filosófica do assunto quando expandiu para a análise de um sistema de três equações e três incógnitas. Foi dito no enunciado que uma equação do tipo $ax + by + cz + d = 0$, equivale a uma equação de um plano, assim sendo, quando resolvemos um sistema desses, na verdade estamos analisando o resultado da intersecção de três planos. Veja a questão proposta:

(AFA-2001)O conjunto de soluções de uma única equação linear $a_1x + a_2y + a_3z = b$ **é representado por um plano no sistema de coordenadas retangulares xyz (quando a_1, a_2, a_3 não são todos iguais a zero). Analise as figuras a seguir.**

(I) Três planos se cortando numa reta
(II) Três planos se cortando num ponto
(III) Três planos sem interseção



Assinale a opção verdadeira.

a) A figura **I** representa um sistema de três equações com uma única solução.
b) A figura III representa um sistema de três equações cujo conjunto solução é vazio.
c) A figura **II** representa um sistema de três equações com uma infinidade de soluções.
d) As figuras **I** e **III** representam um sistema de três equações com soluções iguais.

Como pode ser vista, a figura (I) mostra três planos se interseccionando numa reta, ou seja, trata-se de um sistema que gera como solução muitas ***ternas*** (x, y, z) o que dá um caráter de infinitas soluções para o sistema, logo estamos diante de um sistema possível e indeterminado. Com relação à figura (II) têm-se três planos que se interseccionam num único ponto (x, y, z), o que confere um status de sistema possível e determinado. Já a figura (III) mostra uma intersecção dos planos gerando dois conjuntos disjuntos, ou seja, surgiram duas retas, paralelas que, por conseguinte não vão se cruzar, logo não se tem uma solução para esse sistema sendo ele um sistema impossível. Com essa análise podemos configurar como correta a opção "b" pois diz que (III) se trata de um sistema com três equações que tem conjunto solução representado pelo conjunto vazio.

Exercícios Resolvidos!!!!

R9) Determinar o ponto de intersecção entre as duas retas dadas: $\begin{cases} 3x - y + 5 = 0 \\ -x + 3y - 7 = 0 \end{cases}$

Solução:

Da equação de cima temos que $y = 3x + 5$. Substituindo na equação de baixo, tem-se: $-x + 3(3x+5) - 7 = 0 \;\Rightarrow\; -x + 9x + 15 - 7 = 0 \;\Rightarrow\; 8x = -8 \;\Rightarrow\; x = -1 \Rightarrow y = 3(-1) + 5 = 2$

Praticando!!!!

P16-) Ache as intersecções entre os pares de retas abaixo:
a) y = 3x – 4 e y – x + 6 = 0;
b) y – 4x + 5 = 0 e o eixo Ox;
c) y + 8x – 4 = 0 e y + x + 7 = 0;
d) y – 5x + 2 = 0 e o eixo Oy;
e) y – x + 2 = 0 e 3x – y + 1 = 0;
f) x – 2y + 6 = 0 e 2x + 2y – 3 = 0;
g) 5x – 3y + 2 = 0 e x + 3y – 2 = 0;

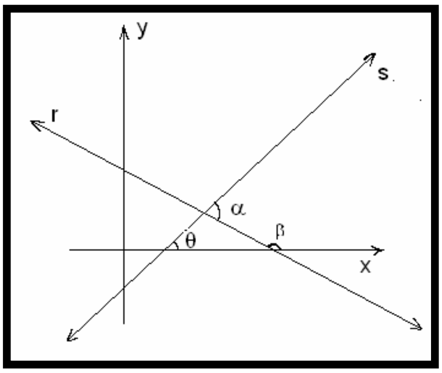
P17-) Ache as intersecções entre as retas abaixo e os eixos Ox e Oy:
a) 2x + 3y – 2 = 0
b) 3x – 6y + 7 = 0
c) 2x – y = 0
d) 3x – 6y – 12 = 0

***P18-)**Mostre que as retas de equação $2x + 3y - 1 = 0$, $x + y = 0$ e $3x + 4y - 1 = 0$ concorrem no mesmo ponto.

***P19-)** Demonstre que $x - 2y = 0$, $x + 2y = 8$ e $(1+k)x + 2(1-k)y - 8 = 0$ concorrem no mesmo ponto, para qualquer valor de k.

III.3 - Ângulo entre retas

Nessa seção vamos estabelecer uma relação que expressa exatamente uma informação sobre o menor ângulo formado por duas retas concorrentes. Como vimos antes, a parte da equação de uma reta que está vinculada com a sua direção é o coeficiente angular, assim sendo, nada mais justo que esse resultado que estamos querendo saia em função desses coeficientes, que são de antemão conhecidos. São dadas duas equações de reta $\vec{r}: y = m_r x + n_r$ e $\vec{s}: y = m_s x + n_s$.



$m_s = tg\theta \quad e \quad m_r = tg\beta$.

Da geometria plana: $\alpha = \theta + (\pi - \beta) \Rightarrow tg\alpha = tg(\theta + (\pi - \beta))$

$$= tg(\pi + (\theta - \beta)) = \frac{\overbrace{tg\pi}^{=0} + tg(\theta - \beta)}{1 - \underbrace{tg\pi}_{=0}.tg(\theta - \beta)} = tg(\theta - \beta) = \frac{tg\theta - tg\beta}{1 + tg\theta.tg\beta}.$$

Como queremos o menor ângulo entre essas retas, temos que garantir que o resultado encontrado é positivo, assim, aplicamos o módulo sobre a expressão encontrada.

$$\boxed{tg\alpha = \left|\frac{m_s - m_r}{1 + m_s m_r}\right|}$$

Para o caso particular em que se têm retas perpendiculares, $\alpha = 90^\circ$ e $tg(90) \to \infty$. Logo, a única maneira de se ter uma fração (com numerador finito) tendendo para o infinito é fazendo o denominador tender a zero. Assim, *Se* $\vec{r} \perp \vec{s} \quad \Rightarrow \quad 1 + m_s m_r = 0 \quad \Rightarrow \quad m_s m_r = -1$

Condição para que $\vec{r} \perp \vec{s}$:

$$\boxed{m_s.m_r = -1}$$

III.4 - Condições de paralelismo entre retas

Sejam $\vec{r_1}$ *e* $\vec{r_2}$ retas contidas no plano. $r_1: y = m_1 x + n_1$ e $r_2: y = m_2 x + n_2$. As condições expressas abaixo, são expressamente para equações na forma reduzida.

- $m_1 = m_2 \quad \Rightarrow \quad$ Re*tas paralelas*; Veja que é necessário e suficiente que o componente responsável pela direção da reta seja igual para ambas as retas.
- $m_1 = m_2 \quad e \quad n_1 = n_2 \quad \Rightarrow \quad$ Re*tas coincidentes*; Aqui além de se ter a mesma direção elas devem passar pelo mesmo ponto, assim, tanto os "m's" quando os "n's" são iguais.
- $m_1 \neq m_2 \quad \Rightarrow \quad$ Re*tas concorrentes*; Basta que as direções sejam diferentes que em algum lugar essas retas vão se cruzar.

Sejam $\vec{r_1}\ \ e\ \ \vec{r_2}$ retas contidas no plano. $r_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$ e $r_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$. Essas retas estão na sua forma geral, assim, veja como ficam as condições de paralelismo:

- $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} \Rightarrow \text{Re}\,tas\ paralelas$;
- $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}\ \ e\ \ \frac{c_1}{b_1} = \frac{c_2}{b_2} \Rightarrow \text{Re}\,tas\ coincidentes$

Para entender essas condições basta colocar $\vec{r_1}\ \ e\ \ \vec{r_2}$ no formato reduzido e aplicar as condições que vimos para o formato reduzido.

$\Rightarrow$Para que se tenha um feixe de retas concorrentes, basta que todos os coeficientes angulares sejam distintos, dois a dois, e que exista um único ponto que satisfaça as equações de todas as retas ao mesmo tempo.

Exercícios Resolvidos!!!!

R11) Determine o ângulo entre as retas abaixo:
a) $r:\ x + y + 2 = 0$ e $s:\ 2x + y + 2 = 0$

Solução:
a)primeiramente vamos passar as equações para o formato reduzido. $r:\ y = -x - 2$ e $s:\ y = -2x - 2$

assim, $tg\alpha = \left|\frac{m_s - m_r}{1 + m_s m_r}\right|$ $m_s = -2$ e $m_r = -1$. Aplicando na fórmula, temos: $tg\alpha = \left|\frac{(-2)-(-1)}{1+(-2)(-1)}\right| = \left|\frac{-1}{3}\right| = \frac{1}{3}$

Logo, o ângulo entre as retas r e s é tal que a sua tangente é $\frac{1}{3}$. Então: $\alpha = arctg\left(\frac{1}{3}\right)$

R11) Dadas as equações de r: $(m-2)x + (m-3)y + 2 = 0$ e s: $(m-1)x + (m-5)y + 5 = 0$, determinar os valores de m para que sejam paralelas.

Solução:
Como estão na forma reduzida, para serem paralelas, $\frac{m-2}{m-3} = \frac{m-1}{m-5} \Rightarrow m^2 - 4m + 3 = m^2 - 7m + 10 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3m - 7 = 0 \Rightarrow m = \frac{7}{3}$

R12) (AFA-94) Para que a reta $x - 5y + 20 = 0$ seja paralela à reta determinada pelos pontos M(t, s) e N(2, 1), deve-se ter t igual a:
a) $\frac{5s}{2} - \frac{5}{2}$ b) -5s + 7 c) -5s +3 d)5s – 3

Solução:
Primeiro temos que determinar a equação da reta formada por M e N. Vamos usar o "OCAP".

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ t & s \\ x & y \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = t + sx + 2y - 2s - ty - x = 0 \ \Rightarrow\ x(s-1) + y(2-t) + (t-2s) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{s-1}{1} = \frac{2-t}{-5} \Rightarrow$$

$$-5s+5 = 2-t \quad \Rightarrow \quad t = 5s-3 \quad \Rightarrow \quad Letra \quad d.$$

R13) Determinar a equação da reta r, que é paralela à reta s de equação y **–** **3**x + 5 = 0 e que passa pelo ponto P(2, 3).

Solução:
Foi dito que r é paralela a s, logo a equação de r vai ser: y **–** **3**x + n = 0. Para determinar o n, usamos que r passa por P(2, 3), então esse ponto deve satisfazer a sua equação. Assim: (3) – 3.(2) + n = 0, n = 3. Logo:
r: y – 3x + 3 = 0

R13) Verificar se as retas abaixo são ou não perpendiculares:
a) $r: -2x + y + 2 = 0$ e $s: x + 2y + 2 = 0$
b) $r: x + 3y = 0$ e $s: y = -3x + 11 = 0$

Solução:
a)Para ver se as retas são perpendiculares ou não, basta achar o coeficiente angular de cada uma e multiplicá-los. Se o resultado for -1, são perpendiculares. Vejamos: $m_s = \frac{-1}{2}$ e $m_r = 2$. Logo, $m_s m_r = \frac{-1}{2}.2 = -1.$

Logo r e s são perpendiculares.

b) Da mesma forma: $m_s = -3$ e $m_r = \frac{-1}{3}$. Logo, $m_s m_r = (\frac{-1}{3}).(-3) = 1.$ Logo, r e s não são perpendiculares.

Praticando!!!!

P18-) Determine os valores de m para que as retas r e s sejam retas coincidentes.
r: 3x + 2y + (3m-5) = 0 s: 9x + 6y + (m^2-m+2) = 0

P19-) Determinar a equação da reta r, que é paralela à reta s de equação 2y – 3x + 5 = 0 e que passa pelo ponto P(2, 1).

P20-) Determinar a equação da reta r que é perpendicular à reta s de equação 3y + 2x – 6 = 0 e que passa pelo ponto de intersecção entre as retas t: y – 2x + 5 = 0 e u: x = 3.

P21-) Calcule o menor ângulo entre os pares de retas abaixo:
a) y +3x – 2 = 0 e y = 2x – 1
b) y – 2x + 6 = 0 e 2y – 4x + 9 = 0
c)2y – x + 5 = 0 e 2x – y – 6 = 0
d) y – 2x + 1 = 0 e y = 5x – 1
e) 2y – 2x + 7 = 0 e 3y +x – 1 = 0

P22-) Dê a equação de r. Sabe-se que r // s, s: 2x – y + 5 = 0 e que r passa pela origem.

P23-) Dê a equação de r. Sabe-se que r passa por T(0, 1) e é perpendicular à s e que s passa por P(2, 1) e por Q(1, 2).

P24-) u: y = x + 5, v: y = 2x + 7, r: y – 3x + 1 = 0 e s: 2y – 8x + 2 = 0. Determine a reta que passa pela intersecção entre u e v e pela intersecção entre r e s.

P25-) Dados A(0, 1), B(2, 3). Determine C e D tais que os triângulos ABC e ABD são eqüiláteros.

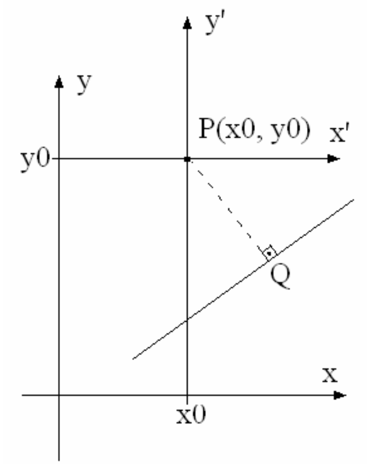
P26-) Dados A(0, 1) e C(2, 3) tais que AC é a diagonal de um quadrado ABCD. Determine B e D, tal que BD é a outra diagonal.

***P27-)** Discuta em função de p e m a posição relativa entre as retas (r) $mx + y - p = 0$ e (s) $3x + 3y - 7 = 0$

***P28-)** Mostre que todas as retas de equações $(m+2)x - my - 4 + m = 0$ concorrem num mesmo ponto.

III.5 - Distância de ponto à reta

Sejam r: $ax + by + c = 0$ e $P(x_0, y_0)$ tal que $P \notin r$, conforme a figura abaixo:



Traçamos um par de eixos auxiliares, X'OY', a fim de que as contas sejam minimizadas, pois para esse novo par de eixos, o ponto $P(x_0, y_0)$ passa ser a origem. Logo temos que $x = x' + x_0$ e $y = y' + y_0$. Substituindo essas relações na equação da reta r vem: $a(x' + x_0) + b(y' + y_0) + c = 0$ resultando em $ax' + by' + (ax_0 + by_0 + c) = 0$. Essa é a nova equação de r, agora tendo como referência o nosso novo sistema de eixos. Vamos achar a equação da reta s, perpendicular à r, passando pela origem (no novo sistema de eixos). Passando a equação de r para o formato reduzido temos: $y' = -\left(\frac{a}{b}\right)x' - \left(\frac{ax_0 + by_0 + c}{b}\right)$. Logo o $m_s = \frac{b}{a}$, pois $s \perp r$. A equação de s fica é dada por $y' = \left(\frac{b}{a}\right)x'$. Fazendo a intersecção de r com s resulta no ponto Q.

Logo $Q\left(\frac{-(ax_0 + by_0 + c)a}{a^2 + b^2}, \frac{-(ax_0 + by_0 + c)b}{a^2 + b^2}\right)$. Calculando a distância de P até o ponto Q, lembrando que agora P se torna a origem (0, 0) chega-se que $d_{P,Q} = \sqrt{\left(\frac{-(ax_0 + by_0 + c)a}{a^2 + b^2}\right)^2 + \left(\frac{-(ax_0 + by_0 + c)b}{a^2 + b^2}\right)^2} =$

$d_{P,Q} = \sqrt{\frac{(ax_0 + by_0 + c)^2 \cancel{(a^2 + b^2)}}{(a^2 + b^2)^{\cancel{2}}}} = \left|\frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|$. Logo, dá-se por distância de *P* a *r* a seguinte expressão:

$$\boxed{d_{P,r} = \left|\frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|}$$

No caso particular em que, no sistema original XOY, o ponto *P* seja a origem (0,0), a expressão fica reduzida à: $\boxed{d_{P,r} = \left| \dfrac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|}$.

III.6 - Distância entre duas retas paralelas.

Sejam $\vec{r_1}$ e $\vec{r_2}$ de equações $ax + by + c_1 = 0$ e $ax + by + c_2 = 0$ respectivamente. Para se obter a distância entre $\vec{r_1}$ e $\vec{r_2}$, basta pegar um ponto que pertença a uma das retas e calcular a distância desse ponto até a outra reta. Seja $P(x_0, y_0) \in r_1$. Assim, $ax_0 + by_0 = -c_1$. $d_{P,r} = \left| \dfrac{ax_0 + by_0 + c_2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| = \left| \dfrac{c_2 - c_1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$. Logo,

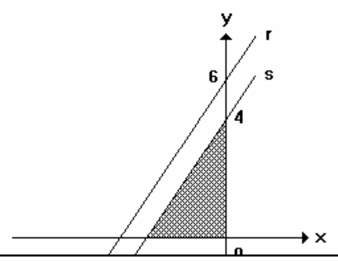
$$\boxed{d_{r_1,r_2} = \left| \frac{c_2 - c_1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|}$$

Praticando!!!!

01) (MACK) Um segmento de reta de comprimento 8 movimenta-se no plano mantendo suas extremidades P e Q apoiadas nos eixos 0x e 0y, respectivamente. Entre os pontos do lugar geométrico descrito pelo ponto médio de PQ, o de maior ordenada possui abscissa:
a) – 2 b) – 1 c) 0 d) 1
e) 2

02) (ITA) Três pontos de coordenadas, respectivamente, (0, 0), (b, 2b) e (5b, 0), com b > 0, são vértices de um retângulo. As coordenadas do quarto vértice são dadas por:
a) (– b, – b) b) (2b, – b)
c) (4b, – 2b) d) (3b, – 2b)
e) (2b, – 2b)

03) (MACK) Na figura, a área do triângulo assinalado é 6. Então a distância entre as retas paralelas r e s é:



a) 2
b) 3/2
c) 6/5
d) 7/5
e) 8/5

04) (UFMG) O ponto da reta s que está mais próximo da origem é A = (–2,4).
A equação da reta s é
a) x + 2y = 6 b) x – 2y + 10 = 0
c) y + 2x = 0 d) 2y – x = –10
e) y + 2x = 6

05) (VUNESP) Seja A a intersecção das retas r, de equação y = 2x, e s, de equação y = 4x – 2. Se B e C são as intersecções respectivas dessas retas com o eixo das abscissas, a área do triângulo ABC é:
a) ½ b) 1 c) 2
d) 3 e) 4

06) (FGV) Um polígono do plano é determinado pelas inequações x $\geq$ 0, y $\geq$ 0, 5x + 2y $\leq$ 20 e x + y $\leq$ 7. Seus vértices são:
a) (0, 0), (4, 0), (0, 7) e (2 ,5)
b) (0, 0), (4, 0) e (0, 7)
c) (0, 0), (7,0) e (2 ,5)
d) (0, 0), (7,0), (2 ,5) e (0, 10)

e) (4, 0), (7, 0), (0, 10) e (0, 7)

07) (FATEC) Se A = (-1, 3) e B = (1, 1), então a mediatriz do segmento AB encontra a bissetriz dos quadrantes pares no ponto:
a) (-1,1) b) (-3/4, 3/4)
c) $(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ d) (-1/2, 1/2) e) (-1/4, 1/4)

08) (ITA) Seja A o ponto de intersecção das retas r e s dadas, respectivamente, pelas equações x + y = 3 e x - y = - 3. Sejam B e C pontos situados no primeiro quadrante com $B \in r$ e $C \in s$. Sabendo que $d(A,B) = d(A,C) = \sqrt{2}$, então a reta passando por B e C é dada pela equação:
a) 2x + 3y = 1 b) y = 1
c) y = 2 d) x = 1 e) x = 2

09) (ITA) Sabendo que o ponto (2, 1) é o ponto médio de uma corda AB da circunferência $(x - 1)^2 + y^2 = 4$, então a equação da reta que contém A e B é dada por:
a) y = 2x – 3 b) y = x – 1 c) y = – x + 3
d) y = 3x/2 – 2 e) y = – (1/2)x + 2

10) (FUVEST) A reta s passa pelo ponto (0, 3) e é perpendicular à reta AB onde A = (0, 0) e B é o centro da circunferência $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 20$. Então a equação de s é:
a) x – 2y = – 6 b) x + 2y = 6
c) x + y = 3 d) y – x = 3
e) 2x + y = 6

11) (UFRS) Um círculo com centro C = (2, –5) tangencia a reta de equação x – 2y – 7 = 0. O valor numérico da área da região limitada pelo círculo é
a) 4π b) 5π c) 6π
d) 7π e) 8π

12) (UECE) Sejam $Q_1(x_1,y_1)$ e $Q_2(x_2,y_2)$ os pontos de intersecção da reta de equação y + 2 = 0 com a circunferência de centro no ponto P(- 4,1) e raio r centímetros. Se $x_1<x_2$ e Q_1Q_2 = 8 cm, então a equação dessa circunferência é:
a) $x^2 + y^2 + 8x - 2y - 7 = 0$
b) $x^2 + y^2 + 8x - 2y - 8 = 0$
c) $x^2 + y^2 + 8x - 2y - 15 = 0$
d) $x^2 + y^2 + 8x - 2y - 19 = 0$

13) (FUVEST) O segmento AB é diâmetro da circunferência de equação $x^2 + y^2 = 10y$. Se A é o ponto (3,1), então B é o ponto:
a) (–3, 9) b) (3, 9) c) (0, 10)
d) (–3, 1) e) (1, 3)

14) (FUVEST) A reta y = mx (m >0) é tangente à circunferência
$(x – 4)^2 + y^2 = 4$. Determine o seno do ângulo que a reta forma com o eixo x:.
a) 1/5 b) 1/2 c) $(\sqrt{3})/2$
d) $(\sqrt{2})/2$ e) $\sqrt{5}$

15) (ITA) Duas retas r_1 e r_2 são paralelas à reta 3x – y = 37 e tangentes à circunferência $x^2 + y^2 – 2x – y = 0$. Se d_1 é a distância de r_1 até a origem e d_2 é a distância de r_2 até a origem, então $d_1 + d_2$ é igual a:
a) $\sqrt{12}$ b) $\sqrt{15}$ c) $\sqrt{7}$
d) $\sqrt{10}$ e) $\sqrt{5}$

16) (FGV) Num triângulo ABC são conhecidos o vértice A = (3,5) e as retas y – 1 = 0 e x + y – 4 = 0, suportes de duas medianas do triângulo. A reta que passa pelos vértices B e C tem equação:
a) 2x + 3y – 2 = 0. b) 3x + y – 1 = 0.
c) x + 2y – 1 = 0. d) 2x + y – 1 = 0.
e) x + 3y – 1 = 0.

17) (ITA) As retas y = 0 e 4x + 3y + 7 = 0 são retas suportes das diagonais de um paralelogramo. Sabendo que estas diagonais medem 4cm e 6cm, então, a área deste paralelogramo, em cm^2, vale:
a) 36/5 b) 27/4 c) 44/3
d) 48/3 e) 48/5

18) Determinar as equações das retas t que são paralelas a (s): 12x + 5y + 1 = 0 e tangentes a (α): $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$.

19) Determinar as equações das retas t que passam por P(2,3) e são tangentes a (α): $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 3 = 0$

20) Obter as equações das bissetrizes dos ângulos formados pelas retas: r: 3x + 4y - 1 = 0 s: 12x - 5y = 0

GABARITO
01) C **02)** C **03)** C **04)** B **05)** A **06)** A **07)** A
08) D **09)** C **10)** B **11)** B **12)** B **13)** A **14)** B
15) E **16)** C **17)** B **18)** 12x+5y+43=0, 12x+5y - 87=0
19) x + 2y - 8 = 0 **20)** 21x - 77y + 13 = 0 e 99x + 27y - 13 = 0

Capítulo IV. Lugar Geométrico

Lugar Geométrico (L.G.) é uma região do plano ou uma geometria em que todos os pontos obedecem a uma lei ou propriedade.

IV.1 - Bissetrizes e sua equação

Vimos em Geometria plana que bissetriz é a reta que corta um ângulo em duas partes iguais. Vamos estender esse conceito para algo mais geral. Na verdade a bissetriz é algo mais forte que isso e essa definição é apenas uma conseqüência da definição formal de bissetriz. **Bissetriz é o lugar geométrico dos pontos do plano que eqüidistam de duas retas concorrentes dadas.**

Sejam $\vec{r_1}\ e\ \vec{r_2}$ de equações $a_1x+b_1y+c_1=0$ e $a_2x+b_2y+c_2=0$, respectivamente, tal que ambas sejam concorrentes. Vamos determinar as equações das bissetrizes do ângulo formado por $\vec{r_1}\ e\ \vec{r_2}$.

Assim, seja $P(x_0,y_0)$ um ponto qualquer dessa bissetriz, então basta calcularmos a distância desse ponto P à uma das retas e igualarmos com a distância desse mesmo ponto a outra reta. Logo temos:

$d_{P,r_1}=d_{P,r_2}$ Logo: $d_{P,r_1}=\left|\dfrac{a_1x_0+b_1y_0+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}\right|=d_{P,r_2}=\left|\dfrac{a_2x_0+b_2y_0+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}\right|$ assim, chegamos a seguinte equação:

$$\left|\frac{a_1x_0+b_1y_0+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}\right|=\left|\frac{a_2x_0+b_2y_0+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}\right| \Rightarrow \textit{Equação das bissetrizes}$$

Resolvendo essa equação (equação modular), obteremos duas respostas (uma equivalente à bissetriz interna e outra equivalente à bissetriz externa). Resolvemos essa equação da seguinte forma:

$$\frac{a_1x_0+b_1y_0+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}=\pm\left(\frac{a_2x_0+b_2y_0+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}\right)$$

Exercícios resolvidos:

R10) Determinar as equações das bissetrizes de duas retas dadas:

a) r: $5x + 12y + 5 = 0$ e s: $3x + 4y + 2 = 0$

Solução:
Aplicando a definição de bissetriz temos: $d_{P,r} = d_{P,s}$. Seja P(x_0, y_0).

$$\left|\frac{5x_0 + 12y_0 + 5}{\sqrt{5^2 + 12^2}}\right| = \left|\frac{3x_0 + 4y_0 + 2}{\sqrt{3^2 + 4^2}}\right| \Rightarrow \quad \left|\frac{5x_0 + 12y_0 + 5}{13}\right| = \left|\frac{3x_0 + 4y_0 + 2}{5}\right| \Rightarrow$$

1º caso: $\frac{5x_0 + 12y_0 + 5}{13} = \frac{3x_0 + 4y_0 + 2}{5} \Rightarrow 25x_0 + 60y_0 + 25 = 39x_0 + 52y_0 + 26 \quad \Rightarrow \quad 14x_0 - 8y_0 + 1 = 0$

$\Rightarrow \quad y_0 = \frac{7}{4}x_0 + \frac{1}{8}$

2º caso: $\frac{5x_0 + 12y_0 + 5}{13} = -\left(\frac{3x_0 + 4y_0 + 2}{5}\right) \Rightarrow 25x_0 + 60y_0 + 25 = -39x_0 - 52y_0 - 26 \Rightarrow 64x_0 + 112y_0 + 51 = 0$

$\Rightarrow \quad y_0 = \frac{-4}{7}x_0 + \frac{51}{112}$

OBS.: Repare que o coeficiente angular do 1º caso é $\frac{7}{4}$ e o do 2º caso é $\frac{-4}{7}$. Como já era esperado, veja que $\frac{7}{4}.\frac{-4}{7} = -1$, logo, realmente, as bissetrizes interna e externa formam um ângulo de 90º.

Praticando!!!!

P27-) Determinar a equação do lugar geométrico dos pontos do plano em que a distância de um ponto qualquer desse LG até a reta r: 6x + 8y – 1 = 0 é igual a distância desse mesmo ponto até à reta s: 5x – 12y + 2 = 0.

P28-) Determinar a equação do lugar geométrico dos pontos do plano em que a distância de um ponto qualquer desse LG até a reta r: 4y + 3x + 2 = 0 é igual a distância desse mesmo ponto até à reta s: 7x + 24y – 5 = 0. Verifique que as retas encontradas nesse LG são perpendiculares.

P29-) Determinar a equação do lugar geométrico dos pontos do plano que eqüidistam 5 unidades do ponto P(0, 0).

P30-) Determine a equação do lugar geométrico dos pontos do plano determinado pelas equações:

$$\begin{cases} x = 2t - 5 \\ y = t \end{cases}$$

P31-) Determinar a equação do lugar geométrico determinado pelas equações abaixo:

$$\begin{cases} x = sent \\ y = \cos t \end{cases}$$

P32-) Determinar a equação do lugar geométrico determinado pelas equações abaixo:

$$\begin{cases} x = sent \\ y = 1 + sen\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \end{cases}$$

P33-) Determine a equação do lugar geométrico dos pontos do plano que eqüidistam de dois pontos fixos dados. P(0, 0) e Q(5, 5).

P34-) Determinar a equação do lugar geométrico dos pontos do plano em que a distância de um ponto qualquer desse LG até a reta r: 3x + 4y – 1 = 0 é igual a ***n*** vezes a distância desse mesmo ponto até à reta s: 5x – 12y + 2 = 0.

P35-) Um menino está sentado na mesa para almoçar. De repente ele vê uma formiga andando sobre a mesa e repara que o inseto anda 2 cm para a direita e sobe 3 cm. Cada vez que a formiga subia os 3cm o menino fazia um furinho na mesa da cozinha (tentando matar a formiga e nunca conseguia porque quando ele furava a toalha a formiga já tinha saído do lugar). Determine o lugar geométrico marcado pelos furos na toalha da mesa. Suponha que a origem do sistema de coordenadas estava no primeiro furo que o garoto fez na toalha da mesa.

P36-) Determine o lugar geométrico dos pontos do plano que são determinados pelas equações:

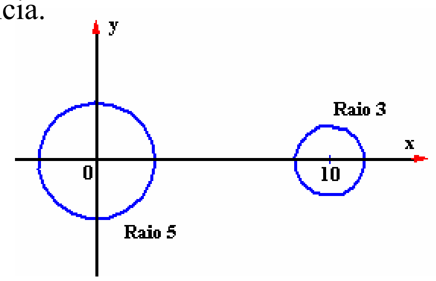
$$\begin{cases} x = t + 2 \\ y = t^2 + t - 1 \end{cases}.$$

Faça um esboço desse lugar geométrico.

P37-) São dadas duas retas, r: 3x + 4y – 3 = 0 e s: 7x + 24y – 1 = 0. Determine o lugar geométrico dos pontos do plano tais que duas vezes a distância desses pontos até a reta r é três vezes a distância desses pontos à reta s.

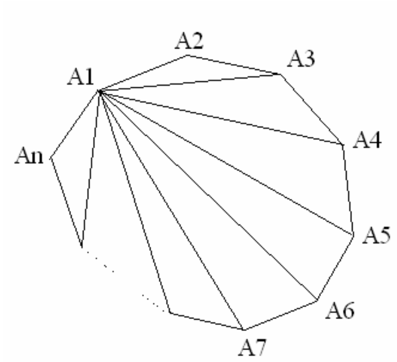
2º Desafio

Determinar a equação do lugar geométrico dos pontos do plano que possuem iguais potências em relação à duas circunferências dadas. C_1 é uma circunferência centrada em $O_1(0, 0)$ e de raio R_1 igual a 5. C_2 é outra circunferência com centro $O_2(10, 0)$ e de raio R_2 igual a 3.
Obs.: A potência de um ponto externo à uma circunferência é dado por: $Pot(O) = (d_{P,O})^2 - R^2$ em que O é o centro dessa circunferência.



Capítulo V. Outras considerações para o OCAP

Lembra do "OCAP"? Como vimos acima, se aplicássemos alguns pontos no "OCAP" e se o resultado fosse zero os pontos estariam alinhados? E se o "OCAP" $\neq 0$? O que significaria esse valor ? O valor de $\dfrac{|OCAP|}{2}$ representa a área do polígono formado pelos pontos aplicados, quando é obedecida uma ordem de aplicação dos pontos no OCAP. Vamos demonstrar esse resultado.



Vamos supor a existência de um polígono de n lados, com vértices $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, …, $A_n(x_n, y_n)$. Fazendo o OCAP com todos esses pontos nessa ordem se obtém a expressão: $OCAP = x_2y_1 + x_3y_2 + x_4y_3 + x_5y_4 + ... + x_ny_{n-1} + x_1y_n - (x_1y_2 + x_2y_3 + ... + {}$ ${}+ x_{n-1}y_n + x_ny_1)$.

É possível provar, usando o produto vetorial entre dois vetores, que o dobro da área de um triângulo é dada pelo determinante: $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3)$.

Aplicando nesse determinante os pontos $A_1A_2A_3$, $A_1A_3A_4$, $A_1A_4A_5$, ..., $A_1A_{n-1}A_n$ e somando todos os resultados, chega-se a expressão: $2S = \cancel{(x_3 + ... + x_{n-1})y_1} + \cancel{x_1(y_3 + ... + y_{n-1})} + (x_2y_1 + x_3y_2 + x_4y_3 + ... + x_ny_{n-1}) -$ $- \cancel{(x_3 + ... + x_{n-1})y_1} - \cancel{x_1(y_3 + ... + y_{n-1})} - (x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_4 + ... + x_{n-1}y_n) + x_1y_n - x_ny_1 = OCAP$.

Logo $S = \dfrac{|OCAP|}{2}$**. Esse resultado é muito poderoso e mostra que se for feito o OCAP com os pontos num determinado sentido, de forma que se feche o polígono, o resultado desse OCAP é o dobro da área desse polígono.**

Ex.: Seja o polígono de 6 lados com vértices em: A(0,0), B(0,2), C(2,4), D(6,4), E(7,2), F(7,0). Determinar a sua área.

Jeito trabalhoso de solução: Desenhar o polígono, dividi-lo em figuras conhecidas, calcular cada área e depois somá-las.
Modo prático de resolução: Aplicar o "OCAP", tirar o módulo e dividir por dois. Veja:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2 & 4 \\ 6 & 4 \\ 7 & 2 \\ 7 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 4 + 24 + 28 + 14 + 0 - 0 - 0 - 8 - 12 - 0 - 0 = 50 \quad \Rightarrow \quad L = 50 \quad \Rightarrow \quad \frac{|L|}{2} = 25$$

que é o valor da área desse polígono estranho.

Praticando!!!!

P38-) Verifique se os pontos abaixo estão alinhados. Caso não estejam, determine a área do polígono formado. Lembre-se que para **determinar a área**, deve-se colocar os pontos no plano, escolher um desses pontos e adotar uma ordem (sentido horário ou anti-horário) para o "L".

a) A(0, 0), B(0, 3), C(1, 4), D(3, 5), E(5, 5), F(5, 2)
b) A(-1, 0), B(0, 4), C(2, 4), D(3, 5), E(-2, 5)
c) A(5, 0), B(4, 3), C(1, 2), D(0, 3)
d) A(1, 2), B(-1, 0), C(4, 5), D(-8, -7)
e) A(2, 1), B(5, 4), C(-3, -4), D(0, -1)
f) A(0, 0), B(1, 2), C(3, 3), D(3, 2)
g) A(-1, 0), B(-1, 1), C(0, 2), D(3, 3)
h) A(1, 1), B(2, 2), C(1, 0), D(2, -2)

P39-) Dado o hexágono A(0, 0), B(1, 2), C(2, 2), D(3, 0), E(2, -2), F(1, -2). Sejam M, N, P os pontos médios de AB, CD, EF respectivamente. Determine:

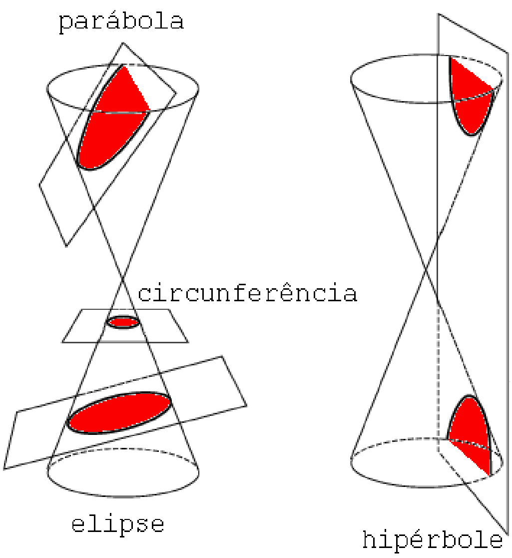
a) A área do triângulo MNP b) As coordenadas do baricentro de MNP c) Angulo entre MN e NP
d) A área do hexágono.

P40-) Uma curva de equação $x^2 + (y-3)^2 = 25$ corta os eixos coordenados nos pontos A, B, C e D. Determine a área desse quadrilátero formado por esses quatro pontos.

P41-) Uma curva de equação $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ corta os eixos coordenados nos pontos A, B, C e D. Determine a área do quadrilátero formado por esse quatro pontos.

Capítulo VI. Cônicas

Nesse capítulo vamos estudar alguns tipos particulares de lugares geométricos. Esse nome cônicas, realmente, não vem à toa, ele surge pois as figuras que vamos estudar são resultados de cortes de planos em cones duplos. Veja as figuras abaixo:



Veja que quando se toma um cone duplo e se faz um corte através de um plano paralelo à base desse cone, a figura resultante é o que chamamos de ***circunferência***. Ao inclinarmos esse plano de secção, o corte resultante gera outra figura que é chamada de ***elipse***. No caso de se fazer um corte nesse mesmo cone através de um plano paralelo à geratriz do cone obtém-se como figura resultante uma ***parábola***. No último caso, faz-se um corte usando um plano perpendicular ao plano da base do cone, assim se obtém dois ramos de hipérbole.

VI.1 - Circunferência

É o L.G. dos pontos $P_L(x, y)$ plano que eqüidistam de um ponto dado fixo $P_0(x_0, y_0)$. Essa distância fixa é chamada raio. Veja sua equação!!!

$d_{P_L,P_0} = r. \quad \Rightarrow \quad \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = r \quad \Rightarrow$ *elevando ambos os membros ao quadrado*

$$\boxed{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2 \quad \textit{Equação reduzida da circunferência}}$$

Desenvolvendo a equação reduzida, encontramos a *equação geral da circunferência*.

$$\boxed{x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + (x_0^2 + y_0^2 - r^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \textit{Equação geral da circunferência.}}$$

Dada uma equação geral da circunferência, queremos identificar o raio e o centro C(x_0, y_0). Basta dividir o **coeficiente do termo em *x*** por **-2** (pronto achamos o x_0), fazendo o mesmo com o **coeficiente do termo em y**, achamos o y_0. Para determinar o raio, fazemos o seguinte: $R = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 - n}$ onde ***n*** é o **termo independente** de **x** e **y** dado na equação.

Exercícios Resolvidos!!!!

R11) Dadas as equações de circunferências abaixo, identificar o raio e as coordenadas do centro :

a) $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 10 = 0$ b) $x^2 + y^2 - 5x + 11y + 1 = 0$

Solução:

a) Primeiro vamos olhar para o coeficiente do termo em *x*. Basta dividi-lo por -2 e obtemos o x_0. Fazemos o mesmo com o coeficiente do termo em y. Assim: $x_c = \frac{-8}{-2} = 4 \; e \; y_c = \frac{-6}{-2} = 3$, logo C(4, 3). Para achar o raio, basta calcular: R = $\sqrt{4^2 + 3^2 - 10} = \sqrt{15}$

b) $x_0 = \frac{-5}{-2} = \frac{5}{2} \quad y_0 = \frac{11}{-2} = \frac{-11}{2}$ logo $C\left(\frac{5}{2}, \frac{-11}{2}\right)$ e $R = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{-11}{2}\right)^2 - 1} = \sqrt{\frac{71}{2}}$

Praticando!!!!

P42-) Dadas as equações de circunferências abaixo, identificar o raio e as coordenadas do centro :

a) $x^2 + y^2 + 8x + 2y + 5 = 0$

b) $x^2 + y^2 + 7x - 9y + 3 = 0$

c) $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 2 = 0$

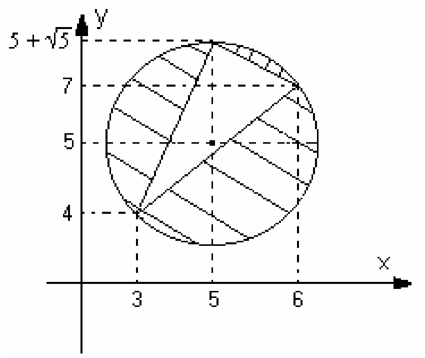
P43-) Monte as equações das circunferências:

a) C(0, 0), r = 5
b) C(1, -3), r = 8
c) C(-1, -1), r = 1
d) C(0, 5), r = $\sqrt{2}$

P44-) Indique o centro C e o raio das circunferências abaixo.

a) $x^2 + y^2 + 2x = 3$
b) $x^2 + y^2 - 5x + 2y = 0$
c) $x^2 + y^2 + 5x = 1$
d) $x^2 + y^2 - 5y - 5x = 0$

P45-) Dê a área da região hachurada.



VI.1.1 - Posições relativas entre ponto e circunferência

Dada a circunferência C: $(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = R^2$ e o ponto $P(x_0, y_0)$. Substituímos o ponto *P* na equação da circunferência, calculamos o resultado e tiramos a seguinte conclusão:

- Se $(x_0 - x_C)^2 + (y_0 - y_C)^2 < R^2$, P é interior;
- Se $(x_0 - x_C)^2 + (y_0 - y_C)^2 = R^2$, P $\in C$;
- Se $(x_0 - x_C)^2 + (y_0 - y_C)^2 > R^2$, P é exterior;

VI.1.2 - Posições relativas entre reta e circunferência

Dada a circunferência C: $(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = R^2$ e a reta r: $ax + by + c = 0$. Isolando **y** ou **x** e substituindo em C, encontraremos uma equação do 2º grau em **x** ou **y,** respectivamente. Logo, para que r seja secante a C, basta que essa equação tenha duas soluções reais distintas; para que r seja tangente a C deve haver uma solução real; para que r seja exterior à C, a equação não pode ter solução real.

- r é secante: $\Delta > 0$;
- r é tangente: $\Delta = 0$;
- r é exterior: $\Delta < 0$;

Exercícios Resolvidos!!!!

R12) Determinar a posição relativa entre a circunferência C: $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 10 = 0$ e a reta r: -2x + y + 1 = 0. Determine também a sua intersecção se houver.

Solução:

Vamos isolar o y na equação da reta: $y = 2x - 1$. Substituindo na equação da circunferência temos: $x^2 + (2x-1)^2 - 8x - 6(2x-1) + 10 = 0 \Rightarrow 5x^2 - 24x + 17 = 0 \Rightarrow \Delta = 576 - 340 = 236 > 0$, logo r é secante à C. Continuando a resolver a equação, temos $x = \frac{12 \pm \sqrt{59}}{5}$. De fato temos dois valores de x, pois são dois pontos de intersecção entre a reta e a circunferência. Para $x = \frac{12+\sqrt{59}}{5}$ temos $y = 2\left(\frac{12+\sqrt{59}}{5}\right) - 1 = \frac{19+\sqrt{59}}{5}$

Para $x = \frac{12+\sqrt{59}}{5}$ temos $y = 2\left(\frac{12-\sqrt{59}}{5}\right) - 1 = \frac{19-\sqrt{59}}{5}$. Logo os pontos de intersecção entre a circunferência e a reta são: $P_1\left(\frac{12+\sqrt{59}}{5}, \frac{19+\sqrt{59}}{5}\right)$ e $P_2\left(\frac{12-\sqrt{59}}{5}, \frac{19-\sqrt{59}}{5}\right)$.

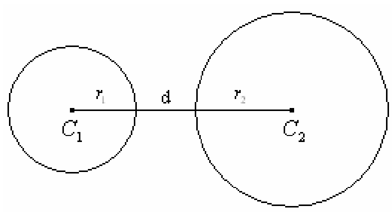
Praticando!!!!

P46-) Indique a posição relativa entre as retas e as circunferências abaixo, bem como suas intersecções (se tiverem):
a) $x^2 + y^2 = 25$ *e* $y = x + 1$ b) $x^2 + y^2 = 25$ *e* $y = x - 10$ c) $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 9$ *e* Ox
d) $x^2 + y^2 + 2x = 8$ *e* $2y - 4x + 6 = 0$ e) $(x-1)^2 + y^2 - 2y = 15$ *e* $y = 3x$

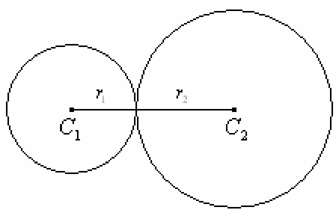
VI.1.3 - Posições relativas entre circunferências

Seja $d_{C_1C_2}$ a distância entre os centros das circunferências e r_1 *e* r_2 os seus raios. Semelhantemente ao feito com as intersecções de retas e circunferências, podemos fazer entre circunferências, ou seja, isolamos o x ou o y das equações e as igualamos. Resolvendo a nova equação podemos encontrar uma, duas ou nenhuma solução, assim, podemos dizer se são tangentes, secantes ou sem pontos em comum, respectivamente. O problema é que apenas a solução da equação não é suficiente para saber se são tangentes exteriores ou interiores, por exemplo. Assim fazemos as seguintes análises abaixo:

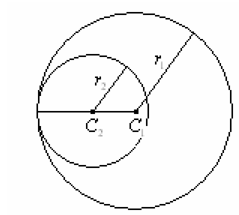
- $d_{C_1C_2} > r_1 + r_2 \Rightarrow d_{C_1C_2} = r_1 + r_2 + d$, $d > 0$, trata-se de **circunferências exteriores**;



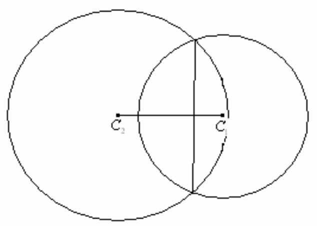
- $d_{C_1C_2} = r_1 + r_2 \Rightarrow d = 0$, trata-se de **circunferências tangentes exteriores**;



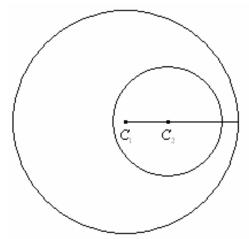
- $d_{C_1C_2} = |r_1 - r_2|$, temos **circunferências tangentes interiormente**;



- $|r_1 - r_2| < d_{C_1C_2} < r_1 + r_2$, temos **circunferências secantes**;



- $d_{C_1C_2} < |r_1 - r_2|$, caso em que a circunferência de raio menor é **interior** à outra;



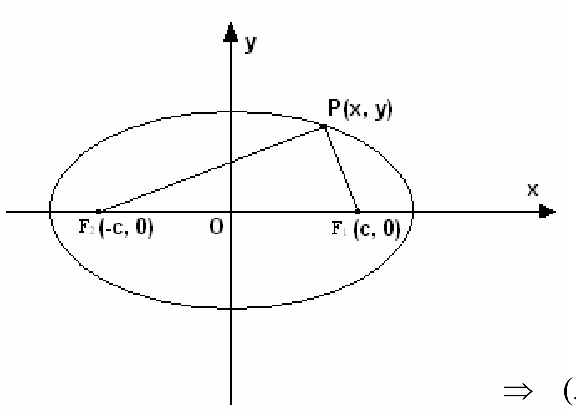
Praticando!!!!

P47-) Dadas as equações abaixo, determine a posição relativa entre as circunferências. Lembre-se que não é necessário desenhar as circunferências, basta calcular a distância entre os seus centros e comparar com a soma dos raios e a diferença dos raios.

a) $x^2 + y^2 = 1$ e $(x - 1)^2 + y^2 = 1$.
b) $(x - 1)^2 + (y - 5)^2 = 1$ e $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 1$
c) $x^2 + (y - 2)^2 = 1$ e $x^2 + y^2 + 6y - 2x + 6 = 0$
d) $x^2 + y^2 - 2y = 3$ e $x^2 + y^2 - 10y + 21 = 0$
e) $x^2 + y^2 = 121$ e $x^2 + y^2 - 4y - 4x = 8$

VI.2 – Elipse

A elipse é o nome dado ao LG dos pontos do plano tais que a soma das distâncias de qualquer ponto desse LG a dois pontos fixos, chamados focos, é constante e igual a 2a. Vamos achar a equação de uma elipse.



$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a \quad \Rightarrow \quad d_{P,F_1} + d_{P,F_2} = 2a \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-(-c))^2 + (y-0)^2} = 2a \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \overbrace{\left(\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2}^{elevando\ ambos\ os\ membros\ ao\ quadrado} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad (x-c)^2 + y^2 = 4a^2 + (x+c)^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad -2cx = 4a^2 + 2cx - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \quad \Rightarrow \quad \overbrace{\left(cx + a^2\right)^2 = \left(a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2}^{elevando\ ambos\ os\ membros\ ao\ quadrado} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad c^2x^2 + a^4 + 2a^2cx = a^2y^2 + a^2x^2 + 2a^2cx + a^2c^2 \quad \Rightarrow \quad a^4 - a^2c^2 = a^2y^2 + a^2x^2 - c^2x^2 \quad \Rightarrow$$

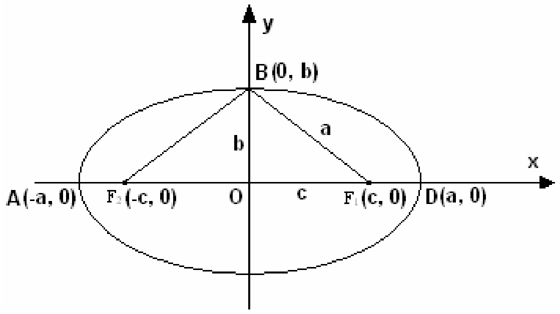
$$\Rightarrow \quad a^2\overbrace{(a^2 - c^2)}^{=b^2} = a^2y^2 + x^2\overbrace{(a^2 - c^2)}^{=b^2} \quad \Rightarrow \quad \overbrace{a^2b^2 = a^2y^2 + x^2b^2}^{dividindo\ ambos\ os\ membros\ por\ a^2b^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{a^2b^2}{a^2b^2} = \frac{a^2}{a^2b^2}y^2 + \frac{b^2}{a^2b^2}x^2 \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad equação \quad da \quad elipse}.$$

$$\boxed{\frac{(x - x_c)^2}{a^2} + \frac{(y - y_c)^2}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad equação \quad completa \quad da \quad elipse}$$

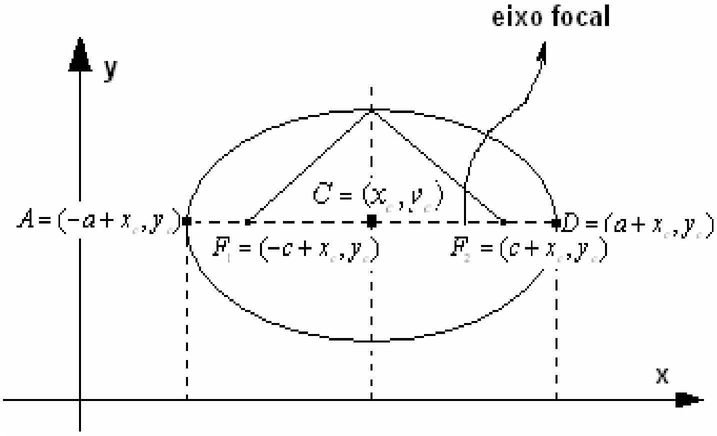
OBS.: Repare que se a = b, caímos na equação de uma circunferência: $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = a^2$**, logo concluímos que toda circunferência é um caso particular de uma elipse.**

VI.2.1 - Caso particular da elipse sobre Ox e seus elementos



Equação: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
Semi-eixo maior: 2a
Semi-eixo menor: 2b
Excentricidade: e = $\frac{c}{a}$**, sempre <1, pois c < a.**
Relação fundamental: $a^2 = b^2 + c^2$
Focos: F1=(-c, 0) e F2=(c, 0)
Vértices: A=(-a, 0) e D=(a, 0)
Centro: C = (0, 0)

VI.2.2 - Caso geral da elipse com eixo focal paralelo ao eixo Ox e seus elementos



Equação: $\frac{(x-x_c)^2}{a^2}+\frac{(y-y_c)^2}{b^2}=1$

Semi-eixo maior: 2a

Semi-eixo menor: 2b

Excentricidade: e = $\frac{c}{a}$

Relação fundamental: $a^2=b^2+c^2$

Focos: $F_1=(-c+x_c\,,y_c)$ e $F_2=(c+x_c\,,y_c)$

Vértices: $A=(-a+x_c\,,y_c)$ e $D=(a+x_c\,,y_c)$

Centro: $C=(x_c\,,y_c)$

OBS.: Um jeito mais fácil de entender a diferença entre esse VI.2.1 e VI.2.2 é: No caso de VI.2.1,o centro da elipse era a origem, C = (0, 0). No segundo caso passou a ser $C=(x_c\,,y_c)$, logo, foi somado x_c ao x do centro antigo (que era 0). O mesmo aconteceu com o y do centro antigo que também era 0, foi somado a ele y_c. **Logo a todos os x'ses da elipse devem-se somar x_c e a todos os y'ons devem-se somar y_c.**

Alguns bizus de elipses!!!

- Para **identificar** se o **eixo focal** da elipse é **paralelo** ao eixo **Ox ou Oy**, basta olhar para a equação. Se o $\mathbf{a^2}$ (o maior de todos os elementos) estiver **embaixo** do termo **x**, a elipse tem eixo focal paralelo ao eixo Ox. Se o $\mathbf{a^2}$ estiver embaixo do termo **y**, a elipse tem eixo focal paralelo ao eixo Oy.

Exercícios Resolvidos!!!!

R13-) Dada a equação da elipse $\frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y+5)^2}{9}=1$, determine o valor do semi-eixo maior, do semi-eixo menor, as coordenadas dos focos, dos vértices, do centro e o valor da excentricidade.

Solução:

Da equação temos que o semi-eixo maior(que é igual a *a*) vale $a=\sqrt{25}=5$ o semi eixo menor vale: $b=\sqrt{9}=3$.

Da relação fundamental tiramos que $c^2=a^2-b^2=25-9=16 \Rightarrow c=4$. Como o 25 que é o maior parâmetro está em baixo do termo de **x,** a elipse tem **eixo focal paralelo ao eixo Ox**.

As coordenadas do centro são: C = (2, -5) logo temos:

Coordenadas dos focos: $F_1=(-4+2\,,0-5)=(-2\,,-5)$ e $F_2=(4+2\,,0-5)=(6\,,-5)$

Coordenadas dos vértices: $V_1=(-5+2\,,0-5)=(-3\,,-5)$ e $V_2=(5+2\,,0-5)=(7\,,-5)$

Para calcular a excentricidade basta fazer: $e=\frac{c}{a}=\frac{4}{5}=0{,}8$

R14-) Encontrar a equação de uma elipse que está centrada na origem, com eixo focal coincidente com o eixo Ox , de excentricidade 0,5 e que passa pelo ponto (10,0).

Solução:

Foi dado que a excentricidade vale 0,5 então temos $\frac{1}{2} = \frac{c}{a} \Rightarrow a = 2c$. Sabemos que $a^2 = b^2 + c^2$ então temos que:

$(2c)^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b^2 = 4c^2 - c^2 \Rightarrow \ b^2 = 3c^2 \Rightarrow b = c\sqrt{3}$**.** Foi dito que a elipse está centrada em (0, 0) e que está sobre Ox, logo a sua equação é da forma: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow$ substituindo $a = 2c$ e $b = c\sqrt{3}$ na equação temos:

$\frac{x^2}{(2c)^2} + \frac{y^2}{(c\sqrt{3})^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{4c^2} + \frac{y^2}{3c^2} = 1 \Rightarrow$ como o ponto (10, 0) está na elipse, ele satisfaz a sua equação, então, aplicando esse ponto na equação achamos o valor de *c*. $\frac{10^2}{4c^2} + \frac{0^2}{3c^2} = 1 \Rightarrow 100 = 4c^2 \Rightarrow c = 5$**. Assim, a equação da elipse é:** $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{75} = 1$

R15) Seja a elipse de equação $4y^2 + 8y + 9x^2 + 18x = 49$. Identificar as coordenadas dos focos, dos vértices do centro, o valor da sua excentricidade e determine também os valores de t para que a reta de equação $y = tx$ seja tangente à essa elipse.

Solução:

Primeiramente, vamos escrever a equação da elipse na sua forma reduzida: $\frac{(x - x_c)^2}{a^2} + \frac{(y - y_c)^2}{b^2} = 1$

Partindo da equação dada temos: $4(y^2 + 2y) + 9(x^2 + 2x) = 49 \to 4(y^2 + 2y + 1) + 9(x^2 + 2x + 1) = 49 - 4 - 9 \Rightarrow$.

$4(y+1)^2 + 9(x+1)^2 = 36 \Rightarrow$ dividindo ambos os membros por 36 temos: $\frac{(y+1)^2}{9} + \frac{(x+1)^2}{4} = 1 \Rightarrow$ agora é só analisar: Da equação, o centro C = (-1, -1). a = 3, b = 2 e da relação fundamental c = $\sqrt{5}$. Como a está sob o termo do y, o eixo focal da elipse está paralelo ao eixo Oy. Logo, os focos são: F_1(-1, -1- $\sqrt{5}$) e F_2(-1, -1 + $\sqrt{5}$). Os vértices são: V_1(-1, -4) e V_2(-1, 2). A excentricidade é dada por: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$. Vamos agora achar os valores de t para que a reta $y = tx$ seja tangente à elipse. Vamos substituir o y da equação da elipse por *tx*. $4(tx)^2 + 8(tx) + 9x^2 + 18x = 49 \Rightarrow (4t^2 + 9)x^2 + (8t + 18)x - 49 = 0$**.** Para que a reta seja tangente à elipse deve haver apenas uma raíz real para essa equação do segundo grau. Então Δ = 0. Δ $= (8t + 18)^2 - 4.(4t^2 + 9).(-49) = (8t + 18)^2 + 196.(4t^2 + 9)$ que é uma soma de números positivos, logo é sempre positivo e não pode ser zero. Assim, concluímos que não existe valor de t tal que uma reta da forma $y = tx$**,** seja tangente à essa elipse.

Praticando!!!!

P48-) Dada a equação da elipse $\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y-3)^2}{16} = 1$ **.** Determine:

a)As coordenadas do centro, dos focos e dos vértices.

b) Dada a reta ***y = mx***, determine os valores de ***m*** para que essa reta seja tangente à elipse.

c) Faça a intersecção dessa elipse com os eixos coordenados. Determine a área desse polígono formado.

P49-) Seja a elipse de equação $\frac{(x-1)^2}{144}+\frac{y^2}{169}=1$.
Determine:
a)As coordenadas dos vértices, dos focos e do centro.
b)A excentricidade.
c)A equação da circunferência que circunscreve essa elipse.
d)A equação da circunferência que está inscrita nessa elipse.

P50-) Determine todos os valores de ***m*** tais que a reta ***y = mx*** seja tangente à elipse de equação $\frac{(x-10)^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ **.**

P51-) Dada a expressão que determina a área de uma elipse: $A=\pi ab$ Determine a equação da elipse de área 20π, que possui excentricidade 0,6 e centro C(0,0).
P52-) Determine o comprimento de uma elipse de excentricidade zero e valor de ***a*** igual a 10.

P53-) Dada a equação de uma circunferência. $x^2+y^2-8x-6y+10=0$. Determine a equação de uma elipse centrada no centro da circunferência e que possui a mesma área dessa circunferência. Atente que foi pedida uma equação, pois esse problema tem infinitas respostas.

P54-) Determine as coordenadas dos focos, dos vértices e do centro de cada elipse abaixo.
a) $9x^2+25y^2-50x-18y-191=0$
b) $25x^2+9y^2-18x-50y-191=0$
c) $x^2+2y^2-4x-4y+3=0$

P55-) Determine a equação e identifique o lugar geométrico dos pontos do plano que são determinados pelos sistemas abaixo.

a) $\begin{cases} x=9sent \\ y=1+2sen\left(\frac{\pi}{2}-t\right) \end{cases}$ b) $\begin{cases} x=5sen2t \\ y=-1+\cos 2t \end{cases}$

c) $\begin{cases} x=2+3\cos(3t-3) \\ y=7sen(3t-3) \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x=sen2t \\ y=3(\cos^2 t-sen^2 t) \end{cases}$

P56-) A reta x-y-5=0 é tangente a uma elipse de focos F(3,0) e F'(-3,0). Determine uma equação desta elipse.

3º Desafio

São dadas as equações de duas elipses fixas. $E_1:\frac{x^2}{2}+y^2=1$ e $E_2:\frac{(x-x_c)^2}{2}+y^2=1$. Sabe-se que a expressão do coeficiente angular da reta tangente à uma elipse de equação $\frac{(x-x_c)^2}{a^2}+\frac{(y-y_c)^2}{b^2}=1$ para qualquer ponto dessa curva é dada por $m=-\frac{(x-x_c)b^2}{(y-y_c)a^2}$. Determine o valor de $\boldsymbol{x_c}$ da equação de E_2, para que ambas as elipses dadas sejam ortogonais.
Dado: uma elipse é ortogonal a outra elipse se e somente se as retas tangentes à essas elipses (no ponto de intersecção entre elas) forem perpendiculares.

Capítulo VII. Questões de Vestibular

01.(FUVEST - 2000) Se (m + 2n, m – 4) e (2 – m, 2n) representam o mesmo ponto do plano cartesiano, então m^n é igual a:

(A) –2
(B) 0
(C) $\sqrt{2}$
(D) 1
(E) $\frac{1}{2}$

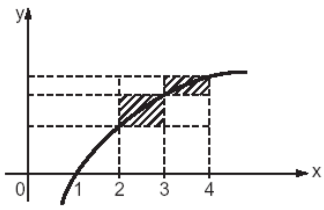
02.(FUVEST - 2000) Um circunferência passa pelos pontos (2, 0), (2, 4) e (0, 4). Logo, a distância do centro dessa circunferência à origem é:

(A) $\sqrt{2}$
(B) $\sqrt{3}$
(C) $\sqrt{4}$
(D) $\sqrt{5}$
(E) $\sqrt{6}$

03.(FUVEST - 2000) Sejam a, b, c três números estritamente positivos em progressão aritmética. Se a área do triângulo ABC, cujos vértices são A = (-a, 0). B = (0, b) e C = (c, 0), é igual a b, então o valor de b é:

(A) 5
(B) 4
(C) 3
(D) 2
(E) 1

04.(FUVEST - 2000) A curva da figura que se segue representa o gráfico da função $y = \log_{10}x$, para x > 0. Assim sendo, a área da região hachurada, formada

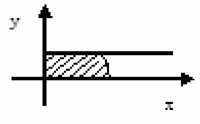


(A) $\log_{10}2$
(B) $\log_{10}3$
(C) $\log_{10}4$
(D) $\log_{10}5$
(E) e)$\log_{10}6$

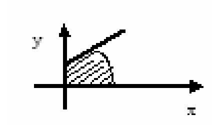
05.(FUVEST - 2000) Das regiões hachuradas na seqüência, a que melhor representa o conjunto dos pontos (x, y), do plano cartesiano, satisfazendo o conjunto de desigualdades

$x \geq 0$; $y \geq 0$; $x - y + 1 \geq 0$; $x^2 + y^2 \leq 9$, é:

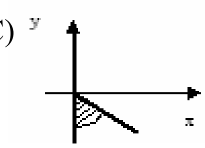
(A)



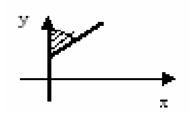
(B)



(C)

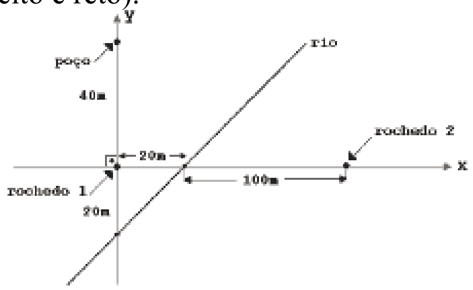


(D)



(E) nda

06.(FUVEST - 1999) Um pirata enterrou um tesouro numa ilha e deixou um mapa com as seguintes indicações: o tesouro está enterrado num ponto da linha reta entre os dois rochedos; está a mais de 50 m do poço e a menos de 20 m do rio (cujo leito é reto).



a) Descreva, usando equações e inequações, as indicações deixadas pelo pirata, utilizando para isto o sistema de coordenadas mostrado na figura.
b) Determine o menor intervalo ao qual pertence a coordenada x do ponto (x,0) onde o tesouro está enterrado.

07.(FUVEST - 1999) A reta r tem equação 2x + y = 3 e intercepta o eixo x no ponto A. A reta s passa pelo ponto P = (1,2) e é perpendicular a r. Sendo B e C os pontos onde s intercepta o eixo x e a reta r, respectivamente,
a) Determine a equação de s.
b) Calcule a área do triângulo ABC.

08.(FUVEST – 2003)
A) A reta r passa pela origem do plano cartesiano e tem coeficiente angular m > 0. A circunferência C passa pelos pontos (1, 0) e (3, 0) e tem centro no

eixo x. Para qual valor de m a reta r é tangente a C?
B) Suponha agora que o valor de m seja menor que aquele determinado no item anterior. Calcule a área do triângulo determinado pelo centro de C e pelos pontos de intersecção de r com C.

09.(FUVEST – 2003) Duas retas s e t do plano cartesiano se interseptam no ponto (2, 2). O produto de seus coeficientes angulares é 1 e a reta s intersepta o eixo dos y no ponto (0, 3). A área do triângulo delimitado pelo eixo dos x e pelas retas s e t é:
A) 2
B) 3
C) 4
D) 5
E) 6

10.(FUVEST – 2003) O sistema $\begin{cases} x+(c+1)y=0 \\ cx+y=-1 \end{cases}$, onde 0 $c \neq 0$, admite uma solução (x , y) com x = 1. Então, o valor de c é:
A) -3
B) -2
C) -1
D) 1
E) 2

11.(FUVEST – 2003) No plano cartesiano, os comprimentos de segmentos consecutivos da poligonal, que começa na origem 0 e termina em B (ver figura), formam uma progressão geométrica de razão p, com 0 < p < 1. Dois segmentos consecutivos são sempre perpendiculares. Então, se OA = 1, a abscissa x do ponto B = (x, y) vale:

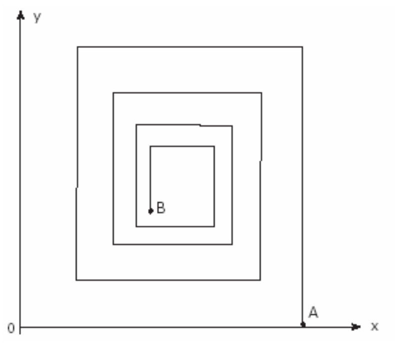
A) $\frac{1-p^{12}}{1-p^4}$

B) $\frac{1-p^{12}}{1+p^2}$

C) $\frac{1-p^{16}}{1-p^2}$

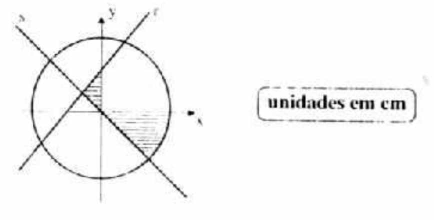
D) $\frac{1-p^{16}}{1+p^2}$

E) $\frac{1-p^{20}}{1-p^4}$



12.(UERJ - 1997) Observe as regiões hachuradas do plano cartesiano, que correspondem aos pontos que satisfazem o sistema de inequações abaixo:

$$\begin{cases} y \le x+1 \\ y \ge -x \\ x^2+y^2 \le 4 \\ x \cdot y \le 0 \end{cases}$$



Calcule:
A- o ângulo formado entre as retas **r** e **s**.
B- a área total das regiões hachuradas.

13.(UNESP – 2003) O triângulo PQR, no plano cartesiano, de vértices P = (0, 0), Q = (6, 0) e R = (3, 5), é
A) equilátero.
B) isósceles, mas não equilátero.
C) escaleno.
D) retângulo.
E) obtusângulo.

14.(UNESP – 2002) Considerando-se que o ponto (1,1) pertence a uma circunferência de raio r e centro em (0,2) pede-se determinar
(A) O raio da circunferência
(B) Os pontos de interseção dessa circunferência com o eixo dos Y

15.(EN – 2001) São dadas a reta r de equação x - $\frac{y}{3}$ + 2 = 0 e a elipse α de equação $9x^2 + 4y^2 - 18x - 16y = 11$. A equação da reta s que passa pelo centro de α e é perpendicular à reta r é:
(A) 3y + x – 7 = 0
(B) 3y + x – 5 = 0
(C) 3y – x – 5 = 0
(D) 3y – x + 8 = 0

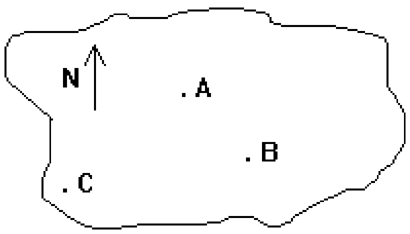
16.(UFRJ – 2000) Existe um único b ∈ R para o qual a reta de equação y = 2x + b divide o triângulo de vértices A (0,0), B (1,0) e C (0,1) em dois polígonos de áreas iguais. Determine b.

17.(UFRJ – 1999) Considere os pontos P 1 (0, 0) , P 2 (1, 1) e P 3 (2, 6).
a) Determine a equação da parábola que passa por P_1 , P_2 e P_3 e tem eixo de simetria paralelo ao eixo Y das
ordenadas;
b) Determine outra parábola que passe pelos pontos P_1 , P_2 e P_3 .

18.(UFRJ – 1998) Sejam A (1,0) e B(5, 4) dois vértices de um triângulo equilátero ABC. O vértice C está no 2º quadrante. **Determine suas coordenadas.**

19.(UFRJ – 1997) Sejam $M_1 = (1,2)$, $M_2 = (3,4)$ e $M_3 = (1,-1)$ os pontos médios dos lados de um triângulo. Determine as coordenadas dos vértices desse triângulo.

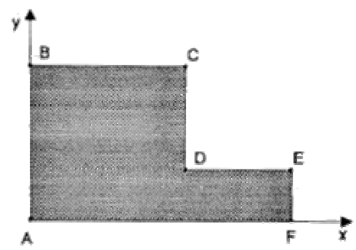
20.(UFRJ – 1997) Três cidades A, B e C estão representadas no mapa a seguir. Escolhendo uma cidade como origem, é possível localizar as outras duas usando um sistema de coordenadas (d,q) em que d é a distância, em quilômetros, entre a cidade considerada e a origem e q é o ângulo, em graus, que a semi-reta que une a origem à cidade considerada faz com o vetor norte N; q é medido a partir do vetor N no sentido horário.



Usando A como origem, as coordenadas de B nesse sistema são (50, 120) e as coordenadas de C são (120, 210).

a) Determine a distância entre as cidades B e C.
b) Determine as coordenadas da cidade B, se escolhermos C como origem.

21.(UFRJ – 1997) Considere uma peça metálica cuja forma é representada pela figura a seguir, com vértices nos pontos A(0,0), B(0,3), C(3,3), D(3,1), E(5,1) e F(5,0).



a) A reta AD divide a peça numa razão k = Área (ADEF)/Área (ABCD)
Determine o valor de k.
b) Uma reta r, passando pelo ponto A, divide a peça metálica em duas partes de mesma área. Determine a equação da reta r.

22.(Unicamp -1996) Uma elipse que passa pelo ponto (0,3) tem seus focos nos pontos (-4,0) e (4,0). O ponto (0,-3) é interior, exterior ou pertence à elipse? Mesma pergunta para o ponto (5/2,13/5). Justifique suas respostas.

23.(Unicamp -1997) Os ciclistas A e B partem do ponto P(-1, 1) no mesmo instante e com velocidades de módulos constantes. O ciclista A segue a trajetória descrita pela equação $4y – 3x – 7 = 0$ e o ciclista B, a trajetória descrita pela equação $x^2 + y^2 – 6x – 8y = 0$. As trajetórias estão no mesmo plano e a unidade de medida de comprimento é o km. Pergunta-se:
a) Quais as coordenadas do ponto Q, distinto de P, onde haverá cruzamento das duas trajetórias?
b) Se a velocidade do ciclista A for de 20 km/h, qual deverá ser a velocidade do ciclista B para que cheguem no mesmo instante
ao ponto Q?

24.(Unicamp -1998)
a) Encontre as constantes *a* , *b* , e *c* de modo que o gráfico da função $ax^2 + bx + c = 0$ passe pelos pontos (1,10) , (–2,–8) e (3,12) .
b) Faça o gráfico da função obtida no item a, destacando seus pontos principais.

25.(Unicamp -1999) Uma reta intersecciona nos pontos A (3,4) e B (– 4,3) uma circunferência centrada na origem.

a) Qual é o raio dessa circunferência?
b) Calcule a área do quadrilátero cujos vértices são os pontos A e B e seus simétricos em relação à origem.

26.(Unicamp -2000) Sejam **A** e **B** os pontos de intersecção da parábola $y = x^2$ com a circunferência de centro na origem e raio $\sqrt{2}$.
a) Quais as coordenadas dos pontos **A** e **B** ?
b) Se **P** é um ponto da circunferência diferente de **A** e de B, calcule as medidas possíveis para os ângulos ***APB*** .

27.(Unicamp -2001) Considere, no plano *x*y, as retas y = 1, y = 2x – 5 e x – 2y + 5 = 0.
a) Quais são as coordenadas dos vértices do triângulo *ABC* formado por essas retas?
b) Qual é a área do triângulo *ABC* ?

28.(Unicamp -2003) As equações $(x+1)^2 + y^2 = 1$ e $(x-2)^2 + y^2 = 4$ representam duas circunferências cujos centros estão sobre o eixo das abscissas.
a) Encontre, se existirem, os pontos de intersecção daquelas circunferências.
b) Encontre o valor de $a \in R$, $0 \neq a$, de modo que duas retas que passam pelo ponto (*a,*0) sejam **tangentes às duas circunferência**s.

29.(UFPE – 2003) Cada um dos círculos limitados pelas circunferências de equações $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 12 = 0$ e $x^2 + y^2 - 10x - 2y + 22 = 0$ fica dividido em duas regiões de mesma área por uma reta de equação
y = mx + n. Calcule 3n.

30.(UFES – 2003) Em um sistema de coordenadas cartesianas com origem O, considere a circunferência C dada pela equação
$x^2 + y^2 - 4x - 8y + 15 = 0$, cujo centro indicamos por P. A reta OP intersecta C em dois pontos A e B, onde A é o mais próximo da origem.

A equação da reta que tangencia a circunferência C no ponto A é

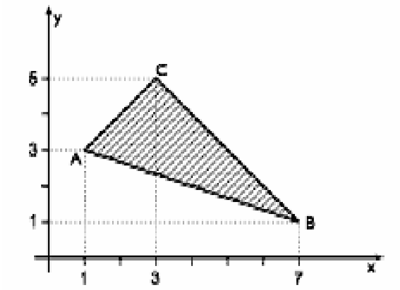
A) $x - 2y + 3 = 0$ B) $x + 2y - 5 = 0$
C) $2x + y - 4 = 0$ D) $2x + y - 5 = 0$ E) $2x - y - 4 = 0$

31.(UFMA – 2003) Considere a família de retas representada por $f_k(x) = x - k$. Seja d_K a distância entre o ponto P_K (0,...) de abscissa igual a zero e ponto Q_k de ordenada igual a 1, pertencentes a reta por f_k. Determine o valor de $(d_0 + d_1 + ... + d_{100})$.

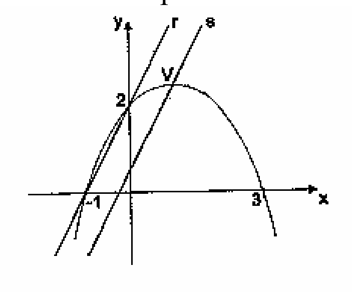
32.(UFMA – 2003) Dadas a circunferência $x^2 + y^2 - 4x - y + 1 = 0$ e a reta $3x + 2y - 500 = 0$, encontre a área do triângulo inscrito na circunferência, cujos lados são paralelos aos eixos cartesianos e à reta dada.

33.(UFPR – 2003) Considere as seguintes informações: C é uma circunferência de raio igual a 1 e centro na origem de um sistema de coordenadas cartesianas retangulares; um ponto estará no interior da circunferência C se a distância do ponto à origem do sistema for menor do que 1. Assim, é correto afirmar:
( ) A equação da circunferência C é $x^2 + y^2 + 1 = 0$.
( ) O ponto P(cos ω, sen ω) pertence à circunferência C, qualquer que seja o número real ω.
( ) A reta y = x + 1 intercepta a circunferência C em dois pontos.
( ) A reta y + 1 = 0 é tangente à circunferência C.
( ) O ponto (1, 1) está no interior da circunferência C.
( ) O gráfico da função y = sen 2x intercepta o eixo x apenas uma vez no interior da circunferência C.

34.(UERJ – 2002) No sistema de coordenadas cartesianas abaixo, está representado o triângulo ABC. Em relação a esse triângulo,
(A) demonstre que ele é retângulo;
(B) calcule a sua área.

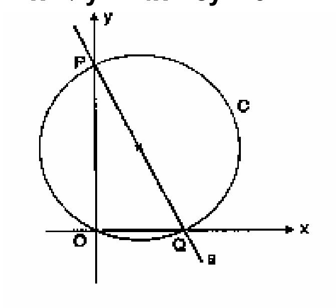


35.(UFF – 1996) Na figura, a reta **s** é paralela à reta **r** e passa pelo vértice **V** da parábola.



Determine a equação da reta **s**.

36.(UFF – 1996) Na figura abaixo a circunferência **C** tem equação $x^2 + y^2 - 4x - 8y = 0$.

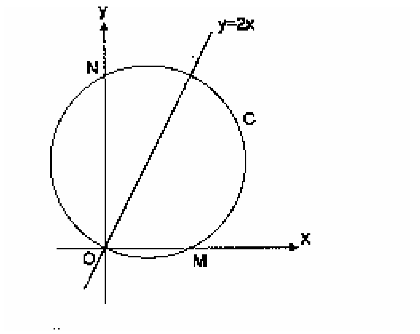


Determine:

a) a equação da reta **s**

b) a equação da reta **r** que é perpendicular à reta **s** e passa pelo centro da circunferência

37.(UFF – 1996) A circunferência **C** representada na figura tem centro na reta **y = 2x** e passa pela origem **O** dos eixos coordenados.



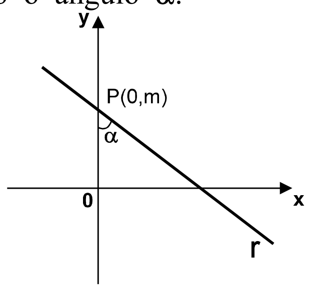
Sabendo que $\overline{ON} = 8$, determine a distância entre os pontos **M** e **N**.

38.(UFF – 1997) Considere a parábola de equação $y = x^2 - 6x + 5$. Determine a equação da circunferência que passa por seu vértice e por suas interseções com o eixo **x**.

39.(UFF – 1997) Identifique, justificando, o lugar geométrico dos pontos do plano definido pela equação $x^2 - y^2 - 4x + 8y = 12$.

40.(UFF – 1997) Determine a área da região do plano limitada pelas retas $y = 3x$, $x + y = 4$ e $y = 0$.

41.(UFF – 1998) A figura representa a reta r que intercepta o eixo **y** no ponto P(0, m), formando com esse eixo o ângulo α.



A equação de r é dada por:

(A) $y = (\text{cotg } \alpha)x + \frac{1}{m}$ (B) $y = (\text{tg } \alpha)x + m$

C) $y = -(\text{cotg } \alpha)x + m$ (D) $y = (\text{cotg } \alpha)x + m$

(E) $y = (\text{tg } \alpha)x + \frac{1}{m}$

42.(UFF – 2000) A reta $y - 2x + 5 = 0$ tangencia, no ponto M, a circunferência C de equação $x^2 + y^2 = 5$. A reta $y = -x + p$ intercepta C nos pontos M e Q. Determine:

a) o valor de p;
b) as coordenadas dos pontos M e Q.

43.(UFF – 2000) Determine o(s) valor(es) que r deve assumir para que o ponto (r, 2) diste cinco unidades do ponto (0, -2).

44.(UFF – 2002) Cada ponto P(x, y) de uma curva C no plano xy tem suas coordenadas descritas por:

$$\begin{cases} x = 1 + \cos t \\ y = 2 + sent \end{cases} \quad 3 < t < 4$$

a)Escreva uma equação de C relacionando, somente, as variáveis *x* e *y*.
b)Calcule o comprimento de C.

45.(UFC – 2001) Encontre uma equação da reta tangente à curva $x^2 - 2x + y^2 = 0$ no ponto (1, 1).

46.(UFC – 2001) O número de pontos de interseção das curvas $x^2 + y^2 = 4$ e $\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{2} = 1$ é igual a:

(A)0 (B)3 (C)4
(D)5 (E)6

47.(UECE – 2003) Num sistema cartesiano ortogonal usual, as interseções dos gráficos da circunferência $x^2 + y^2 - 10x - 8y + 16 = 0$ com a reta $3x - y + 4 = 0$ são os pontos P e Q.

O ponto médio da corda PQ é:

A) $(\frac{11}{2}, \frac{1}{2})$ (B) $(\frac{1}{2}, \frac{11}{2})$
(C) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ (D) $(\frac{11}{2}, \frac{11}{2})$

48.(UFBA – 2000) A circunferência, de centro na intersecção das retas $2x + 3y = 4$ e $3x + 5y = 6$ e tangente à reta $2x - y + 5 = 0$, tem para equação $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$.
Calcule $|A + B + C + D + E|$.

49.(UECE – 1980) Dois vértices de um quadrado estão nos pontos A(3,-4) e B(9,-4). Determine a soma das abscissas dos outros dois vértices.

50.(UECE – 1991) Se P e M são os pontos de interseção dos gráficos de $f(x) = x^2 - 3$ e $g(x) = \frac{x^2 + x}{2}$, então a medida do comprimento do segmento PM é:

51.(UECE – 1992) Seja (r) a reta que passa pelos pontos $P_1(-2,1)$ e $P_2(5,3)$. Se (r) intercepta os eixos coordenados nos pontos M(m,0), e N(0,n), então o valor de $\frac{14}{11}(n - m)$ é:

52.(UFC – 1991) Considere a família de retas cuja equação é $(a^4 - 1)x + (a^2 + 1)y - 1 = 0$. Então o número de retas da família que são paralelas ao eixo das abscissas é igual a:

53.(UECE – 1980) O perímetro do triângulo formado pelas interseções das retas $x + y - 6 = 0$, $x = 1$ e $y = 1$ é igual a:

54.(UNIFOR – 1982) Se f: R → R é dada por f(x) = Ax + B, onde A e B são números reais, a expressão [f(p) – f(q)] / (p – q) , onde p e q são reais distintos, fornece:

55.(UECE – 1991) Se as alturas do triângulo de vértices nos pontos $P_1(6,-6)$, $P_2(6,4)$ e $P_3(-10,2)$ se interceptam no ponto (n_1, n_2), então $n_1 + n_2$ é igual a:

56.(UNIFOR – 1982) A área da região limitada pelos gráficos das funções f(x) = x + 1, g(x) = x – 1 , h(x) = - x + 1 e q(x) = - x – 1 vale, em unidades de área:

57.(UECE – 1991) Se a reta de equação $y = 2x - 1$ intercepta a circunferência de equação $x^2 + y^2 + 5x - 7y = 2$ nos pontos P e Q, então a medida do comprimento do segmento PQ é:

58.(UNIFOR – 1981) Considere as circunferências $x^2 + y^2 = 25$ e $(x - 3)^2 + y^2 = 4$. Podemos afirmar que elas são:

59.(UNIFOR – 2000) Na circunferência de equação $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$, o ponto que tem maior abscissa é:
a) (5,1) b) (5,0) c)(2,4)
d) (2,2) e) (2,1)

Para responder às questões de números 60 e 61, use os dados seguintes.

- Pontos do plano cartesiano: A(2,0) e B(0,2)
- Reta r, de equação $2x - y + 4 = 0$
- Circunferência λ de centro (a,b) e raio r.

60.(UNIFOR – 2000) Se AB é um diâmetro da circunferência λ, então a equação de λ é:
(A) $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$
(B) $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$ (x)
(C) $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 2$
(D) $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 2$
(E) $x^2 + y^2 + 2x - 2y = 2$

61.(UNIFOR – 2000) A equação da reta paralela a r, traçada pelo ponto A, é:

(A) $2x + y - 4 = 0$
(B) $2x - 2y - 1 = 0$
(C) $x - 2y - 4 = 0$
(D) $x + 2y - 4 = 0$
(E) $2x - y - 4 = 0$ (x)

62.(UNIFOR – 2000) A reta de equação $\sqrt{3}\,.x - 3y + 3 = 0$ forma, com o eixo das abscissas, um ângulo de medida:

63.(UFC – 2000) Seja r a reta tangente à circunferência $x^2 + y^2 = 2$ no ponto (a,b). Se a área do triângulo limitado por r e pelos eixos coordenados é igual a 2 u.a. e se a e b são positivos, o valor de a + b é:

64.(UFPR – 1985) Um ponto P divide o segmento orientado MN na razão PM / PN = - 2. Sendo P(3,0) e M(-3,2), então N é o ponto de coordenadas:

65.(UFGO – 1984) Se os pontos A(1,0), B(a,b) e C(0,1) estão alinhados, então determine uma relação entre a e b:

66.(UFRR – 2003) Considere a reta r, paralela à reta de equação $y = 2x - 4$, e que contém o ponto (-1,1). As coordenadas do ponto P, interseção da reta r com o eixo y, são:

(A)(-4,0) (B)(3,0) (C)(0,0)
(D)(0,-4) (E)(0,3)

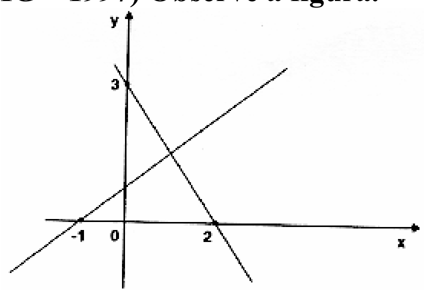
67.(UFRR – 2003) Os vértices de um triângulo no plano cartesiano são os pontos (-6,3), (0,11) e (6,3). Inscreve-se um círculo neste triângulo, cujo centro encontra-se no eixo das ordenadas. A equação desta circunferência inscrita é:

(A) $x^2 + y^2 - 12y + 27 = 0$
(B) $x^2 + y^2 - 6y = 0$
(C) $x^2 + y^2 - 18y + 36 = 0$
(D) $x^2 + y^2 - 12y = 0$
(E) $x^2 + y^2 - 12y - 85 = 0$

68.(UNESP – 2003) O triângulo PQR, no plano cartesiano, de vértices P = (0, 0), Q = (6, 0) e R = (3, 5), é
F) eqüilátero.
G) isósceles, mas não eqüilátero.
H) escaleno.
I) retângulo.
E) obtusângulo

69.(UFMG – 1997) Sejam t e s as retas de equações $2x - y - 3 = 0$ e $3x - 2y + 1 = 0$, respectivamente.
A reta r contém o ponto A = (5,1) e o ponto de interseção de t e s.
A equação de r é
(A) $5x - y - 24 = 0$
(B) $5x + y - 26 = 0$
(C) $x + 5y - 10 = 0$
(D) $x - 5y = 0$

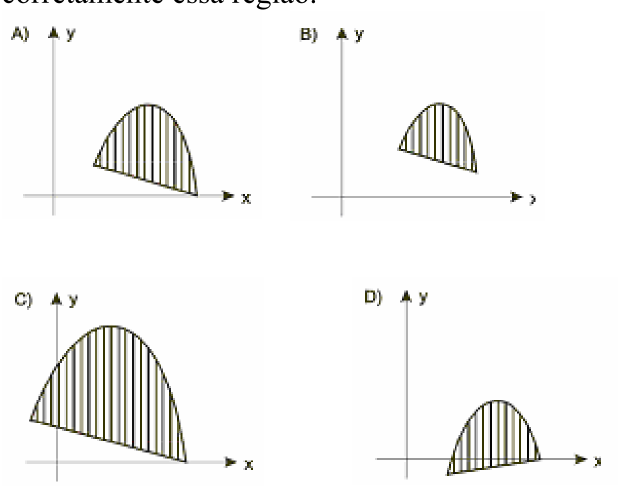
70.(UFMG – 1997) Observe a figura.



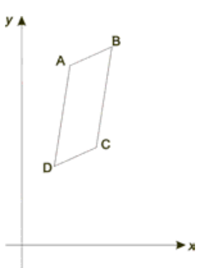
Nessa figura, estão representadas duas retas perpendiculares que são gráficos de y = f(x) e y = g(x).
O valor máximo da função h(x) = f(x).g(x) é
(A) $\frac{5}{4}$ (B) $\frac{9}{4}$ (C)3 (D)4

71.(UFMG – 1998) A reta *r* é paralela à reta da equação 3x - y -10 = 0 .
Um dos pontos de interseção de *r* com a parábola de equação $y = x^2 - 4$ tem abscissa 1.
A equação de *r* é
(A) x + 3y + 8 =0
(B) 3x - y + 6 = 0
(C) 3x - y - 6 = 0
(D) x - 3y - 10 = 0

72.(UFMG – 1999) Considere a região delimitada pela parábola da equação $y=-x^2+5x-4$ e pela reta de equação x+4y-4=0.
Assinale a alternativa cujo gráfico representa corretamente essa região.



73.(UFMG – 1999) Observe a figura.



Nessa figura, ABCD é um paralelogramo, as coordenadas do ponto C são (6,10) e os lados AB e AD estão contidos, respectivamente, nas retas de equações $y = \frac{x}{2} + 14$ e y = 4x – 2.
Nesse caso, as coordenadas do ponto **B** são
(A) $\left(7, \frac{35}{2}\right)$ (B) $\left(9, \frac{37}{2}\right)$ (C) (8,18)
(D) (10,19)

74.(UFMG – 2000) Um triângulo isósceles ABC tem como vértices da base os pontos A = (4, 0) e B = (0, 6). O vértice C está sobre a reta y = x - 4.
Assim sendo, a inclinação da reta que passa pelos vértices B e C é
(A) $\frac{7}{17}$ (B) $\frac{10}{23}$ C) $\frac{3}{20}$ (D) $\frac{12}{25}$

75.(UFMG – 2001) A reta r passa pelo ponto (16, 11) e **não** intercepta a reta de equação y = $\frac{x}{2}$ - 5.
Considerando-se os seguintes pontos, o ÚNICO que pertence à reta r é
(A) (7, 6) (B)(7, $\frac{13}{2}$) (C)(7,7)
(D)(7, $\frac{15}{2}$)

76.(ITA - 1995) Uma reta t do plano cartesiano xOy tem coeficiente angular 2a e tangência a parábola $y = x^2 - 1$ no ponto de coordenadas (a, b). Se (c, 0) e (0, c) e (0, d) são as coordenadas de dois pontos de t tais que c > 0 e c = -2d, então a/b é igual a :
(A) -4/15 (B)-5/16 (C)-3/16
(D)-6/15 (E)-7/15

77.(ITA - 1995) Três pontos de coordenadas, respectivamente, (0, 0), (b, 2b) e (5b, 0), com b > 0, são vértices de um retângulo. As coordenadas do quarto vértice são dadas por:
(A) (-b, -b)
(B) (-2b, -b)
(C) (4b, -2b)
(D) (3b, -2b)
(E) (-2b, -2b)

78.(ITA - 1995) Considere C uma circunferência centrada em O e raio 2r, e t a reta tangente a C num ponto T. Considere também A um ponto de C tal que AÔT = θ é um ângulo agudo. Sendo B o ponto

de t tal que o segmento $\overline{AB}$ é paralelo ao segmento $\overline{OT}$, então a área do trapézio OABT é igual a:
(A) $r^2(2 \cos\theta - \cos 2\theta)$
(B) $2r^2(4 \cos\theta - \text{sen } 2\theta)$
(C) $r^2(4 \text{ sen } \theta - \text{sen } 2\theta)$
(D) $r^2(2 \text{ sen } \theta + \cos\theta)$
(E) $2r^2(2 \text{ sen } 2\theta - \cos 2\theta)$

79.(ITA - 1996) Tangenciando externamente a elipse ε_1, tal que ε_1: $9x^2 + 4y^2 - 72x - 24y + 144 = 0$ considere uma elipse ε_2, de eixo maior sobre a reta que suporta o eixo menor de ε_1 e cujos eixos têm mesma medida que os eixos de ε_1. Sabendo que ε_2 está inteiramente contida no primeiro quadrante, o centro de ε_2 é:
(A)(7,3) (B)(8,2) (C)(8,3)
(D)(9,3) (E)(9,2)

80.(ITA - 1996) São dadas as parábolas p_1: $y = -x^2 - 4x - 1$ e p_2: $y = x^2 - 3x + 11/4$ cujos vértices são denotados, respectivamente, por V_1 e V_2. Sabendo que r é a reta que contém V_1 e V_2, então a distância de r até à origem é:
(A) $5/\sqrt{26}$ (B) $7/\sqrt{26}$ (C) $7/\sqrt{50}$
(D) $17/\sqrt{50}$ (E) $11/\sqrt{74}$

81.(ITA - 1996) São dadas as retas r: $x - y + 1 + \sqrt{2} = 0$ e s: $\sqrt{3}x + y - 2\sqrt{3} = 0$ e a circunferência C: $x^2 + 2x + y^2 = 0$. Sobre a posição relativa desses três elementos, podemos afirmar que:
(A) r e s são paralelas entre si e ambas são tangentes à C.
(B) r e s são perpendiculares entre si e nenhuma delas é tangente a C.
(C) r e s são concorrentes, r é tangente à C e s não é tangente à C.
(D) r e s são concorrentes, s é tangente à C e r não é tangente à C.
(E) r e s são concorrentes e ambas são tangentes à C.

82.(ITA - 1996) Sabendo que o ponto (2,1) é ponto médio de uma corda AB da circunferência $(x - 1)^2 + y^2 = 4$, então a equação da reta que contém A e B é dada por:
(A) $y = 2x - 3$
(B) $y = x-1$
(C) $y = -x + 3$
(D) $y = 3x/2 - 2$
(E) $y = -x/2 + 2$

83.(ITA - 1997) Seja $m \in \Re_+^*$, tal que a reta $x - 3y - m = 0$ determina, na circunferência $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 25$, uma corda de comprimento 6. O valor de m é:
(A) $10 + 4\sqrt{10}$ (B) $2 + \sqrt{3}$ (C) $5 - \sqrt{2}$
(D) $6 + \sqrt{10}$ (E) 3

84.(ITA - 1997) Seja A o ponto de intersecção das retas r e s dadas, respectivamente pelas equações $x + y = 3$ e $x + y = -3$. Sejam B e C pontos situados no primeiro quadrante com $B \in r$ e $C \in s$. sabendo que $d(A,B) = d(A,C) = \sqrt{2}$, então a reta passando por B e C é dada pela equação:
(A) $2x + 3y = 1$ (B) $y = 1$ (C) $y = 2$
(D) $x = 1$ (E) $x = 2$

85.(ITA - 1997) Considere os pontos A: (0, 0) e B: (2, 0) e C: (0, 3). Seja P: (x, y) o ponto da intersecção das bissetrizes internas do triângulos ABC. Então x + y é igual a:
(A) $12/(5 + \sqrt{13})$ (B) $8/(2 + \sqrt{11})$
(C) $10/(6 + \sqrt{13})$ (D) 5 (E) 2

86.(ITA - 1998) Considere a hipérbole **H** e a parábola **T**, cujas equações são, respectivamente, $5(x + 3)^2 - 4(y - 2)^2 = -20$ e $(y - 3)^2 = 4(x - 1)$. Então, o lugar geométrico dos pontos **P**, cuja soma dos quadrados das distâncias de **P** a cada um dos focos da hipérbole **H** é igual ao triplo do quadrado da distância de **P** ao vértice da parábola **T**, é:
(A) a elipse de equação $\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{3} = 1$.
(B) a hipérbole de equação $\frac{(y+1)^2}{5} + \frac{(x-3)^2}{4} = 1$.
(C) O par de retas dadas por $y = \pm(3x - 1)$.
(D) A parábola de equação $y^2 = 4x + 4$.
(E) A circunferência centrada em (9 , 5) e raio $\sqrt{120}$.

87.(ITA - 1998) As retas $y = 0$ e $4x + 3y + 7 = 0$ são retas suportes das diagonais de um paralelogramo. Sabendo que estas diagonais medem 4 cm e 6 cm, então, a área deste paralelogramo, em cm^2, vale:

(A) $\frac{36}{5}$ (B) $\frac{27}{4}$ C) $\frac{44}{3}$
(D) $\frac{48}{3}$ (E) $\frac{48}{5}$

88.(ITA - 1990) Sejam a e b constantes reais positivas. Considere $x = a^2 \text{ tg } t + 1$ e $y^2 = b^2 \sec^2 t - b^2$ onde $0 \leq t < \frac{\pi}{2}$. Então uma relação entre x e y é dada por:

(A) $y = \frac{b}{a}(x-1)^2, x \geq a$
(B) $y = \frac{b^2}{a^4}(x-1)^2, x \geq 1$
(C) $y = \frac{b}{a^2}(x-1), \forall x \in \Re$
(D) $y = \frac{-b}{a^2}(x-1), x \geq 1$
(E) $y = \frac{a^2}{b^2}(x-1), x \leq 1$

89.(ITA - 1990) Sejam as retas (r) e (s) dadas respectivamente pelas equações 3x - 4y + 12 = 0 e 3x - 4y + 4 = 0. Considere (ℓ) o lugar geométrico dos centros das circunferências que tangenciam simultaneamente (r) e (s). Uma equação que descreve (ℓ) é dada por:

(A) 3x - 4y + 8 = 0
(B) 3x + 4y + 8 = 0
(C) x - y + 1 = 0
(D) x + y = 0
(E) 3x - 4y - 8 = 0

90.(ITA - 1990) Seja C o centro da circunferência $x^2 + y^2 - 6\sqrt{2}\,y = 0$. Considere A e B os pontos de interseção desta circunferência com a reta $y = \sqrt{2}\,x$. Nestas condições o perímetro do triângulo de vértices A, B e C é:

(A) $6\sqrt{2}+\sqrt{3}$ (B) $4\sqrt{3}+\sqrt{2}$
(C) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ (D) $5\sqrt{3}+\sqrt{2}$
(E)n.d.a.

91.(ITA - 1990) Considere a reta (r) mediatriz do segmento cujos extremos são os pontos em que a reta 2x - 3y + 7 = 0 intercepta os eixos coordenados. Então a distância do ponto $(\frac{1}{4}, \frac{1}{6})$ à reta (r) é:

(A) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ (B) $\frac{4}{\sqrt{13}}$ (C) $\sqrt{13}$
(D) $\frac{2\sqrt{3}}{7}$ (E) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

92.(ITA - 1990) Considere a região do plano cartesiano xOy definida pelas desigualdades $x-y \leq 1$, $x+y \geq 1$ e $(x-1)^2+y^2 \leq 2$. O volume do sólido gerado pela rotação desta região em torno do eixo x é igual a:

(A) $\frac{4}{3}\pi$ (B) $\frac{8}{3}\pi$ (C) $\frac{4}{3}(2-\sqrt{2})\pi$
(D) $\frac{8}{3}(\sqrt{2}-1)\pi$ (E)n.d.a.

93.(ITA - 1991) Considere a região ao plano cartesiano xy definido pela desigualdade: $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 4 \leq 0$. Quando esta região rodar um ângulo de $\frac{\pi}{3}$ radianos em torno da reta y + x + 1 = 0, ela irá gerar um sólido cujo volume é igual a:

(A) $\frac{4\pi}{3}$ (B) $\frac{2\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{3}$
(D) $\frac{4\pi}{9}$ (E)n.d.a.

94.(ITA - 1991) Seja r a mediatriz do segmento de reta de extremos M = (-4 , -6) e N = (8 , -2). Seja R o raio da circunferência com centro na origem e que tangencia a reta r. Então:

(A) $R = \frac{\sqrt{7}}{3}$ (B) $R=\frac{\sqrt{15}}{3}$ (C) $R= \frac{\sqrt{10}}{3}$
(D) $R = \frac{\sqrt{10}}{5}$ (E)n.d.a.

95.(ITA - 1991) Seja C a circunferência dada pela equação $x^2 + y^2 + 2x + 6y + 9 = 0$. Se P = (a , b) é o ponto em C mais próximo da origem, então:

(A) $a = -\frac{3}{2}$ e $4b^2 + 24b + 15 = 0$
(B) $a = -\frac{1}{2}$ e $4b^2 + 24b + 33 = 0$
(C) $a = \frac{\sqrt{10}}{10} - 1$ e $b = 3a$
(D) $a = -1 - \frac{\sqrt{10}}{10}$ e $b = 3a$
(E) n.d.a.

96.(ITA - 1992) A equação da reta bissetriz do ângulo agudo que a reta y = mx, m > 0, forma com o eixo dos x é:

(A) $y = \frac{1+\sqrt{1+m^2}}{m}x$

(B) $y = \frac{1-\sqrt{1+m^2}}{m}x$

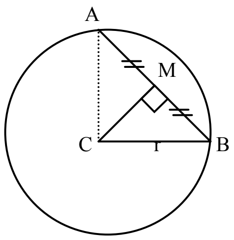
(C) $y = \frac{-1-\sqrt{1+m^2}}{m}x$

(D) $y = \frac{-1+\sqrt{1+m^2}}{m}x$

(E) n.d.a.

97.(ITA - 1992) Seja C a circunferência $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 5 = 0$. Considere em C a corda AB cujo ponto médio é: M: (2, 2). O comprimento de AB(em unidade de comprimento) é igual a:

(A) $2\sqrt{6}$
(B) $\sqrt{3}$
(C) 2
(D) $2\sqrt{3}$
(E) n.d.a.



98.(ITA - 1992) Dados os pontos A: (0, 8), B: (-4, 0) e C: (4, 0), sejam r e s as retas tais que A, B $\in$ r, B, C $\in$ S. Considere P_1 e P_2 os pés das retas perpendiculares traçadas de P: (5, 3) às retas r e s , respectivamente. Então a equação da reta que passa por P_1 e P_2 é:

(A) $y + x = 5$
(B) $y + 2x = 5$
(C) $3y - x = 5$
(D) $y + x = 2$
(E) n.d.a.

99.(ITA - 1992) Considere as afirmações:

I- Uma elipse tem como focos os pontos F_1: (-2, 0), F_2: (2, 0) e o eixo maior 12. Sua equação é $x^2/36 + y^2/32 = 1$.

II- Os focos de uma hipérbole são F_1: $(-\sqrt{5}, 0)$, F_2: $(\sqrt{5}, 0)$ e sua excentricidade $\sqrt{10}/2$. Sua Equação é $3x^2 - 2y^2 = 6$.

III- A parábola $2y = x^2 - 10x - 100$ tem como vértice o ponto P: (5, 125/2).

Então:

(A) Todas as afirmações são falsas.
(B) Apenas as afirmações II e III são falsas.
(C) Apenas as afirmações I e II são verdadeiras.
(D) Apenas a afirmação III é verdadeira.
(E) n.d.a.

100.(ITA - 1994) Duas retas r e s são dadas, respectivamente, pelas equações $3x - 4y = 3$ e $2x + y = 2$. Um ponto P pertencente à reta s tem abscissa positiva e dista 22 unidades de medida da reta r. Se $ax + by + c = 0$ é a equação da reta que contém P e é paralela a r, então a + b + c é igual a :

(A) –132 (B) –126 (C) –118
(D) –114 (E) –112

101.(ITA - 1994) Um triângulo eqüilátero é tal que A: (0, 3), B: $(3\sqrt{3}, 0)$ e a abscissa do ponto C é maior que 2. A circunferência circunscrita a este triângulo tem raio r e centro em O: (a, b). Então $a^2 + b^2 + r^2$ é igual a:

(A) 31 (B) 32 (C) 33
(D) 34 (E) 35

102.(ITA - 1999) Considere a circunferência C de equação $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$ e a elipse E de equação $x^2 + 4y^2 - 4x + 8y + 4 = 0$. Então:

(A) C e E interceptam-se em dois pontos distintos.
(B) C e E interceptam-se em quatro pontos distintos.
(C) C e E são tangentes exteriormente.
(D) C e E são tangentes interiormente.
(E) C e E têm o mesmo centro e não se interceptam.

103.(ITA - 1999) Pelo ponto C: (4, -4) são traçadas duas retas que tangenciam a parábola $y = (x-4)^2 + 2$ nos pontos A e B. A distância do ponto C à reta determinada por A e B é:

(A) $6\sqrt{12}$ (B) $\sqrt{12}$ (C) 12
(D) 8 (E) 6

104.(ITA – 2000) A área de um triângulo é de 4 unidades de superfície, sendo dois de seus vértices os pontos A: (2,1) e B: (3,-2). Sabendo que o terceiro vértice encontra-se sobre o eixo das abcissas, pode-se afirmar que suas coordenadas são

(A) (-1/2,0) ou (5,0) (B) (-1/2,0) ou (4,0)
(C) (-1/3,0) ou (5,0) (D) (-1/3,0) ou (4,0)
(E) (-1/5,0) ou (3,0)

105.(ITA – 2000) Duas retas r_1 e r_2 são paralelas à reta $3x - y = 37$ e tangentes à circunferência $x^2 + y^2 - 2x - y = 0$. Se d_1 é a distância de r_1 até a origem e

d_2 é a distância de r_2 até a origem, então $d_1 + d_2$ é igual a

(A) $\sqrt{12}$ (B) $\sqrt{15}$ (C) $\sqrt{7}$ (D) $\sqrt{10}$

(E) $\sqrt{5}$

106.(ITA 2001) Seja o ponto A = (r,0), r > 0. O lugar geométrico dos pontos P = (x,y) tais que é de $3r^2$ a diferença entre o quadrado da distância de P a A e o dobro do quadrado da distância de P à reta y = -r é:

(A) uma circunferência centrada em (r, -2r) com raio r.
(B) uma elipse centrada em (r,-2r) com semi-eixos valendo r e 2r.
(C) uma parábola com vértice em (r, -r)
(D) duas retas paralelas distando $r\sqrt{3}$ uma da outra.
(E) uma hipérbole centrada em (r, -2r) com semi-eixos valendo r.

107.(ITA 2001) O coeficiente angular da reta tangente à elipse $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ no primeiro quadrante e que corta o eixo das abscissas no ponto P = (8,0) é:

(A) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ (B) $-\frac{1}{2}$ (C) $-\frac{\sqrt{2}}{3}$

(D) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ (E) $-\frac{\sqrt{2}}{4}$

108.(ITA – 2003) Considere a família de circunferências com centros no segundo quadrante e tangentes ao eixo Oy. Cada uma destas circunferências corta o eixo Ox em dois pontos, distantes entre si de 4cm. Então, o lugar geométrico dos centros destas circunferências é parte:

A) de uma elipse.
B) de uma parábola.
C) de uma hipérbole.
D) de duas retas concorrentes
E) da reta y = -x

109.(ITA – 2003) A área do polígono, situado no primeiro quadrante, que é delimitado pelos eixos coordenados e pelo conjunto

$\{(x, y) \in R^2 : 3x^2 + 2y^2 + 5xy - 9x - 8y + 6 = 0\}$,

é igual a:

(A) $\sqrt{6}$ (B) $\frac{5}{2}$ (C) $2\sqrt{2}$

(D)3 (E) $\frac{10}{3}$

110.(ITA – 2003) Sabe-se que uma elipse de equação $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ tangencia internamente a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 5$ e que a reta de equação 3x + 2y = 6 é tangente à elipse no ponto P. Determine as coordenadas de P.

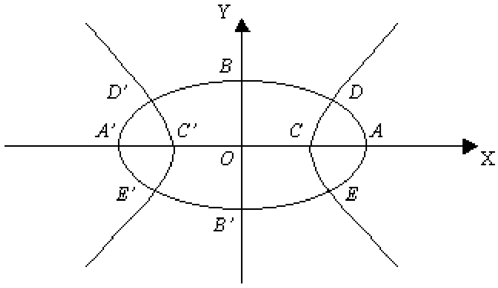
111.(IME - 1997) Dados os pontos A e B do plano, determine a equação do lugar geométrico dos pontos P do plano, de tal modo que a razão entre as distâncias de P a A e de P a B seja dada por uma constante k. Justifique a sua resposta analiticamente, discutindo todas as possibilidades para k.

112.(IME - 1999) ABCD é um quadrado de lado ℓ, conforme figura abaixo. Sabendo-se que K é a soma dos quadrados das distâncias de um ponto P do plano definido por ABCD aos vértices de ABCD, determine:

O valor mínimo de K e a posição do ponto P na qual ocorre este mínimo; o lugar geométrico do ponto P para K = 4 ℓ^2.

113.(IME - 2000) Calcule as coordenadas dos pontos de interseção da elipse com a hipérbole, representadas na figura abaixo, sabendo-se que:

a) os pontos C e C' são os focos da elipse e os pontos A e A' são os focos da hipérbole;
b) BB' é o eixo conjugado da hipérbole;
c) OB = OB' = 3m e OC = OC' = 4m.



114.(IME - 2001) Sejam *r, s* e *t* três retas paralelas não coplanares. São marcados sobre *r* dois pontos *A e A'*, sobre *s* os pontos *B* e *B'* e sobre *t* os pontos *C* e *C'* de modo que os segmentos $\overline{AA'} = a$, $\overline{BB'} = b$ e $\overline{CC'} = c$ tenham o mesmo sentido.

a) Mostre que se *G* e *G'* são os baricentros dos triângulos *ABC* e *A'B'C'*, respectivamente, então $\overline{GG'}$ é paralelo às três retas.

b) Determine $\overline{GG'}$ em função de *a, b* e *c.*

115.(IME – 2002) Considere uma parábola de eixo OX que passe pelo ponto (0, 0). Define-se a subnormal em um ponto P da parábola como o segmento de reta ortogonal à tangente da curva, limitado pelo ponto P e o eixo focal. Determine a equação e identifique o lugar geométrico dos pontos médios das subnormais dessa parábola.

116.(IME-89) Dada a equação:

$$x^2 + y^2 - 2mx - 4(m+1)y + 3m + 14 = 0$$

a)Determine os valores de m, para que esta equação corresponda a um circulo.

b)Determine o lugar geométrico dos centros desses círculos.

Filipe Rodrigues

Capítulo IX – Gabaritos

Respostas dos exercícios propostos

P1.
a)5 b)13 c)10 d)13

P2.
$2p = 18 + \sqrt{82}$

P3.
$AC = BD = CE = DF = EA = FB = 10\sqrt{3}$
Esse hexágono é regular.

P4.
a)x = - 4; y = 5,5;
b)x = 4 ou x = -2; y = 4;
a)x = - 1; y = -2;

P5.
G = $(0, 2\sqrt{3})$

P6.
a) $B = \left(\frac{7}{4}, \frac{9}{2}\right)$ b) $B = \left(\frac{7}{3}, \frac{17}{3}\right)$
c) $B = \left(\frac{11}{7}, \frac{25}{7}\right)$ d) $B = \left(\frac{7}{6}, \frac{10}{3}\right)$
e) $B = \left(\frac{3}{5}, \frac{11}{5}\right)$

P7.
C = (4, 9)

P8.
a) sim b) não c) sim d)não e) não f)não

P9.
s = r

P10.
$s = -r + 2$

P11.
$s = -\frac{r}{2} + \frac{3}{2}$

P12.
$r = 2$

P13.
$s = -2r + 8$

***P14.**
$5s + \frac{3r}{4} - 18 = 0$

P14.
a) y – 2x = 0 b)2x – 3y + 5 = 0
c) y – x – 3 = 0 d) y – 5x + 3 = 0
e) 2y – x + 2 = 0 f)y = 0

P15.
a) G(1, 1) b)M_{AB}(1, 3/2), M_{BC}(3/2, 3/2), M_{AC}(1/2, 0)
c) y = x. d) y = 2x – 1.
e) x = 1. f) 2y – 6x + 3 = 0.
g) 4y – 6x + 3 = 0.

***P16.**
$E = \left(\frac{-20}{3}, \frac{10\sqrt{3}}{3}\right)$

P16.
a) (-1, -7) b)(5/4, 0) c)(11/7, -60/7)
d) (0, -2) e)(-3/2, -7/2) f) (-1, -8)
g) (0, 2/3)

P17-) Ache as intersecções entre as retas abaixo e os eixos Ox e Oy:
a) Ox – (1, 0) Oy – (0, 2/3)
b) Ox – (-7/3, 0) Oy – (0, 7/6)
c) Ox – (0, 0) Oy – (0, 0)
d) Ox – (4, 0) Oy – (0, -2)

P18.
$m = 5 \pm 2\sqrt{2}$

P19.
r: 2y – 3x + 4 = 0.

P20.
r: 2y – 3x - 3 = 0.

P21.
a) θ = 45º b) θ = 0º c) θ = 90º
d) θ = arctg(3/11) e) θ = arctg 2

P22.
r: y = 2x

P23.
r: y = x + 1

P24.
t: y + 2x + 1 = 0

P25.
C(1 + $\sqrt{3}$, 2 - $\sqrt{3}$) D(1 - $\sqrt{3}$, 2 + $\sqrt{3}$)

P26.
B(0, 3) D(2, 1)

P27.
$b_1 : 28x + 224y - 33 = 0$
$b_2 : 128x - 16y + 7 = 0$

P28.
$b_1 : 4y - 8x - 15 = 0$
$b_2 : 22x + 44y + 5 = 0$

P29.
$x^2 + y^2 = 25$

P30.
$2y - x - 5 = 0$

P31.
$x^2 + y^2 = 1$

P32.
$x^2 + (y - 1)^2 = 1$

P33.
$y = -x + 5$

P34.
$s : (39 + 25n)x + (52 - 60n)y - (13 - 10n) = 0$
$s : (39 - 25n)x + (52 + 60n)y - (13 + 10n) = 0$

P35.
$y = \frac{3x}{2}$

P36.
$y = x^2 - 3x + 1$

P37.
$\lg_1 : 9x - 32y - 27 = 0$
$\lg_2 : 51x + 112y - 33 = 0$

P38.
a) Não. S = 35/2 b)Não. S = 9
c)Não. S = 7 d) Sim.
e) Sim. f) Não. S = 3
g) Não. S =3 h) Não. S = 5/2

P39.
a) S = 3. b)G(3/2, 0) c) θ = arctg 3
d) S = 8

P40.
S = 40

P41.
S = 24

P42.
a)C(-4, 1), raio: $\sqrt{10}$.
b)C$\left(\frac{-7}{2}, \frac{9}{2}\right)$, raio: $\frac{\sqrt{118}}{2}$.
c)C(1, 2), raio: $\sqrt{3}$.

P43.
a) $x^2 + y^2 = 25$ b) $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 64$
c) $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 1$ d) $x^2 + (y - 5)^2 = 2$

P44.
Resp.
a)C(-1, 0) r = 2; b) C(5/2, -1) r = $\frac{\sqrt{29}}{2}$
c)C(-5/2, 0) r = $\frac{\sqrt{29}}{2}$; d) C(5/2, 5/2) r = $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

P45.
S = $25\pi - \frac{3(\sqrt{5} - 1)}{2}$

P46.
a) secante A(-4, -3) e B(3, 4)
b) Não há intersecção.
c) Tangente A(1, 0)
d) secante A$\left(\frac{5+\sqrt{20}}{5}, \frac{-5+2\sqrt{20}}{5}\right)$ e
B $\left(\frac{5-\sqrt{20}}{5}, \frac{-5-2\sqrt{20}}{5}\right)$
e)secante A$\left(\frac{2+\sqrt{39}}{5}, \frac{6+3\sqrt{39}}{5}\right)$ e B $\left(\frac{2-\sqrt{39}}{5}, \frac{6-3\sqrt{39}}{5}\right)$

P47.
a) sec. b) sec. c) exteriores
d) tangentes e) interiores

P48.
a)C(2, 3), $V_1(-3, 3)$, $V_2(7, 3)$

$F_1(-1, 3)$, $F_2(5, 3)$

b)Não existe me real tal que a reta y = mx seja tangente à essa elipse

P49.

a) $C(1, 0)$, $V_1(0, 13)$, $V_2(0, -13)$

$F_1(0, 5)$, $F_2(0, -5)$

b) $e = \frac{5}{13}$

c) $(x - 1)^2 + y^2 = 169$

d) $(x - 1)^2 + y^2 = 144$

P50.

$m = \pm\frac{2}{\sqrt{91}}$

P51.

$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

P52.

$L = 20\pi$

P53.

$\frac{(x-4)^2}{25} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$

P54.

$\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{25} = 1$

P55.

$\frac{(x-1)^2}{2} + (y-1)^2 = 1$

P56.

$\frac{(x-2)^2}{2} + (y-1)^2 = 1$

P57.

a) $\frac{x^2}{81} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$

b) $\frac{x^2}{25} + (y+1)^2 = 1$

c) $\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{y^2}{49} = 1$

d) $x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$