Monotonicidade, Paridade, Periodicidade

Tópicos teóricos

Funções monotônicas

Definição

Sejam f: A → B uma função, **I** um subconjunto de **A** e x_1 e x_2 elementos de **I**. Então:

- **f** é estritamente crescente em **I** se, e somente se: $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- **f** é crescente em **I** se, e somente se: $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \le f(x_2)$
- **f** é estritamente decrescente em I se, e somente se: $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$
- **f** é decrescente em **I** se, e somente se: $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$
- **f** é constante em **I** se, e somente se: $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2), \forall x_1, x_2 \in I$

Função par e função ímpar

Sejam f: A → $\mathbb{R}$ uma função.

- **f** é uma **função par** se, e somente se: $f(-x) = f(x), \forall x \in A$.
- **f** é uma **função ímpar** se, e somente se: $f(-x) = -f(x), \forall x \in A$.
- O gráfico de uma função par é simétrico em relação ao eixo **y**.
- O gráfico de uma função ímpar é simétrico em relação à origem do sistema de coordenadas.

Função periódica

Uma função f: A → B é periódica se, e somente se, existe $p \in \mathbb{R}^*$, tal que:

$$f(x + p) = f(x), \text{ para todo } x \in A.$$

Se **p** for o menor valor positivo que satisfaz a igualdade acima, então **p** é chamado de período da função.

Exercícios de Fixação

01. Classifique as funções abaixo em par ou ímpar.

A) $f(x) = x^3$
B) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$
C) $f(x) = x^2 + 2x$

02. Verifique que f(x) = ax + b é crescente para a > 0.

03. Verifique que $f(x) = \dfrac{1}{x}$ é decrescente em $\mathbb{R}_+^*$.

04. Seja f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que: $f(a + b) = f(a) - f(b), \forall a, b \in \mathbb{R}$. Julgue os itens a seguir.
A) f(0) = 0
B) f é ímpar.

05. A função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é estritamente decrescente. Qual é o conjunto de números reais que satisfazem à condição f(3x + 2) > f(2x + 5).

06. Julgue: A função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ é ímpar.

07. (Austrália) Uma sequência $a_1, a_2, a_3, \ldots$ é definida por $a_{n+2} = \dfrac{1+a_{n+1}}{a_n}$ para $n \ge 1$. Dado que $a_1 = 2$ e $a_2 = 5$, qual é o valor de a_{2002}?

A) $\dfrac{3}{5}$
B) $\dfrac{4}{5}$
C) 2
D) 3
E) 5

08. (Cescem) Dizemos que uma função real é par se f(x) = f(–x), ∀x e que é ímpar se f(x) = –f(–x). Das afirmativas que seguem, indique qual a **falsa**.
A) O produto de duas funções ímpares é uma função ímpar.
B) O produto de duas funções pares é uma função par.
C) A soma de duas funções ímpares é uma função ímpar.
D) A soma de duas funções pares é uma função par.
E) Alguma das afirmações anteriores é falsa.

09. Mostre que os números 49, 4489, 444889, 44448889, ..., obtidos colocando-se 48 no meio do número anterior, são quadrados de números inteiros.

10. Demonstre que para cada termo da sequência A = 11...11 (2m algarismos) e B = 44...44 (m algarismos), a soma de A + B + 1 é um quadrado perfeito.

11. (ITA/2010) Sejam f, g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que **f** é par e **g** é ímpar. Das seguintes afirmações:
I. f · g é ímpar;
II. f o g é par;
III. g o f é ímpar.

É(São) **verdadeira(s)**:
A) apenas I.
B) apenas II.
C) apenas III.
D) apenas I e II.
E) todas.

Exercícios Propostos

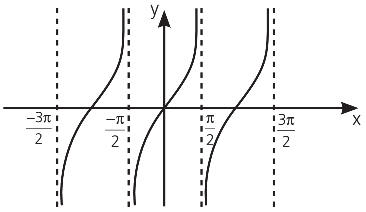
01. (Alfenas) Os valores de **k** para que a função f(x) = (k – 2)x + 1 seja estritamente decrescente são:
A) k < 2
B) k ≤ –2
C) k ≥ 2
D) k ≥ –2
E) k = 2

02. Julgue: A função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é estritamente crescente. O conjunto dos números reais **x** que satisfazem à condição f(7x + 1) > f(6x + 4) é $\{x \in \mathbb{R} / x < 3\}$.

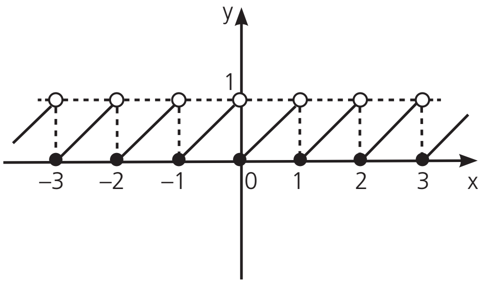
03. Seja f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que: $f(a + b) = f(a) + f(b), \forall a, b \in \mathbb{R}$. Julgue os seguintes itens.
A) f(0) = 0
B) f(–1) = f(1)
C) **f** é uma função par.

04. Julgue:

A) O período da função que está representada pelo gráfico abaixo é 2π.



B) O período e a imagem da função que está representada pelo gráfico abaixo são respectivamente 1 e [0; 1[.



GABARITO – Exercícios de Fixação										
01	**02**	**03**	**04**	**05**	**06**	**07**	**08**	**09**	**10**	**11**
*	–	–	*	*	V	E	A	–	–	D

*** 01:** A) ímpar B) par C) nem par nem ímpar
02: Demonstração
03: Demonstração
04: A) V B) V
05: $x < 3$
09: Demonstração
10: Demonstração

GABARITO – Exercícios Propostos			
01	**02**	**03**	**04**
A	F	*	*

*** 03:** V – F – F
04: F – V