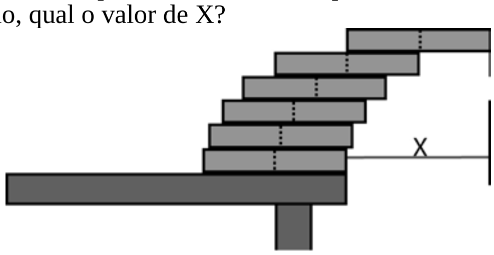
Centro de massa

(Problema dos ladrilhos)

Objetivo

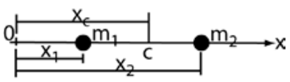
Conceituar o centro de massa de um sistema de pontos materiais. Resolver o problema dos ladrilhos que se sobressaem ao formarmos uma pilha deles. Realmente, é curioso saber de quanto o ladrilho mais alto pode ser deslocado em relação ao ladrilho mais baixo, sem o uso de qualquer cimento, adesivo ou outro aglomerante qualquer.
À primeira vista, parece que esse deslocamento não pode ser muito grande, algo assim como a metade do comprimento de um ladrilho, aproximadamente. Todavia, realmente, o ladrilho mais alto pode sobressair do mais baixo tanto quanto quisermos! Em suma, nosso problema será: nessa pilha de **n** ladrilhos em equilíbrio, qual o valor de X?



Para n ladrilhos X igual a .... ?

Teoria

Denominamos por 'centro de massa' de um sistema de dois pontos materiais, ao ponto que divide a distância entre esses pontos materiais dados em segmentos inversamente proporcionais às massas dos mesmos. Assim, se o ponto **C** é o centro de massa das massas m_1 e m_2, que se encontram sobre o eixo x, a distancias x_1 e x_2 da origem do sistema de coordenadas – como se ilustra – então, pela definição:



$$\frac{x_C - x_1}{x_2 - x_C} = \frac{m_2}{m_1}$$

da qual, para a abscissa do centro de massa, x_c, obteremos:

$$x_C = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}$$

Se existe outro ponto de massa m_3, que também se encontra sobre o eixo x, à distancia x_3 da origem das coordenadas, o centro de massas O de todo o sistema será determinado como se o centro de massa, xc, das massas (m_1 + m_2), concentrasse toda essa massa e, então, começamos tudo de novo, determinando o novo centro de massa, x_o, das massas (m_1 + m_2) + m_3:

$$x_o = \frac{(m_1+m_2)x_C + m_3x_3}{(m_1+m_2)+m_3} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

Para o caso de **n** pontos materiais distribuídos sobre o eixo x, a expressão para o cálculo do centro de massa do sistema será:

$$x_o = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + ... + m_nx_n}{m_1 + m_2 + m_3 + ... + m_n}$$

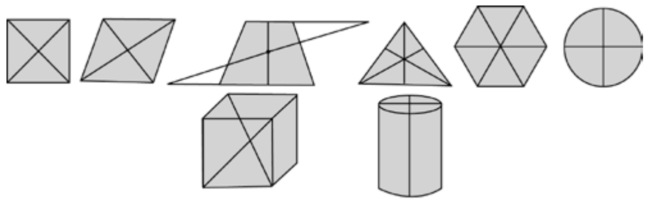
Se os pontos estão distribuídos não sobre o eixo x, mas dispersos no espaço de um modo arbitrário, acrescentaremos as seguintes expressões:

$$y_o = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3 + ... + m_ny_n}{m_1 + m_2 + m_3 + ... + m_n}$$

$$z_o = \frac{m_1z_1 + m_2z_2 + m_3z_3 + ... + m_nz_n}{m_1 + m_2 + m_3 + ... + m_n}$$

Essas expressões, que no conjunto determinam o centro de massa do sistema, O(X_o, Y_o, Z_o), são denominadas 'equações de Torricelli'.

Se os pontos materiais acima estiverem 'mergulhados' num campo de gravidade constante (g), o centro de gravidade do sistema CG (ponto onde se considera aplicada a força peso do sistema) será coincidente com o centro de massa O desse sistema. Para corpos homogêneos com forma geométrica regular, o centro de massa ou o centro de gravidade coincidem com o centro geométrico.

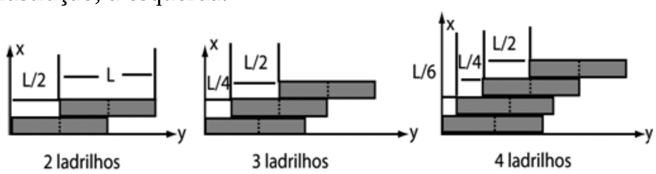


Centro de massa ou centro de gravidade de formas geométricas.

Problema dos ladrilhos

Para resolver nosso problema dos ladrilhos (azulejos, pisos, tijolos, placas etc.) basta-nos tomar a primeira das equações de Torricelli para o centro de massa (Torricelli tem equações espalhadas por toda a Física!)

Para que um ladrilho não caia sobre aquele que lhe está por baixo, a perpendicular baixada desde o centro do primeiro ladrilho não sair do contorno de apoio, ou seja, o centro de massa do ladrilho superior não deve apresentar x > L --- ilustração, à esquerda.



Deste modo, o deslocamento Δx_1, do ladrilho superior, em relação ao ladrilho no qual se apoia, deve obedecer à condição:

$$\Delta x_1 \le \frac{L}{2}$$

Examinemos agora um sistema de três ladrilhos. Acabamos de verificar que o ladrilho superior pode se deslocar ate L/2. De quanto poderá se descolar o segundo ladrilho (o ladrilho intermediário no centro da ilustração acima) em relação ao terceiro? Chamemos de Δx_2 esse deslocamento procurado.

A perpendicular baixa desde o centro de massa dos dois ladrilhos superiores não deve sair do contorno do ladrilho inferior, ou seja, tal como antes, deverá cumprir-se a desigualdade L > = x_0 (x_0 é a abscissa do centro de massas dos dois ladrilhos):

$$L \geq \frac{m\left(\Delta x_2 + \frac{L}{2}\right) + m\left(\Delta x_2 + \frac{L}{2} + \frac{L}{2}\right)}{2m} \text{ de onde obtemos } \Delta x_2 \leq \frac{L}{4}$$

Para um sistema de 4 ladrilhos teremos:

$$L \geq \frac{m\left(\Delta x_3 + \frac{L}{2}\right) + m\left(\Delta x_3 + \frac{L}{4} + \frac{L}{2}\right) + m\left(\Delta x_3 + \frac{L}{4} + \frac{L}{2} + \frac{L}{2}\right)}{3m}$$

de onde obtemos $\Delta x_3 \leq \frac{L}{6}$

De maneira análoga obteremos, sucessivamente:

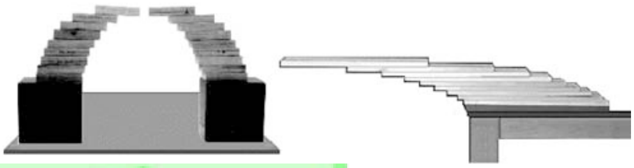
$$\Delta x_4 \leq \frac{L}{8}; \left(\Delta x_5 \leq \frac{L}{10}\right); \ldots..; \Delta x_n \leq \frac{L}{2n}$$

O possível descolamento do ladrilho mais alto pode ser representado pela soma:

$$\Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 + \ldots + \Delta x_n = \frac{L}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots.. + \frac{1}{n}\right)$$

Os matemáticos dizem que a série entre parêntesis (denominada série harmônica) diverge, ou seja, que sua soma (com um número bastante grande de termos) pode ser tão grande quanto se queira. Isso significa que com um incremento ilimitado do número de ladrilhos, o ladrilho superior poderá sobressair do mais baixo de todos, tanto quanto se queira!

Eis duas situações reais usando-se de livros e placas de madeira:



Retirado de http://www.feiradeciencias.com.br/sala06/06_15.asp