

Determinantes I

Regras práticas

- Determinante de ordem 2

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

- Determinante de ordem 3 (Regra de Sarrus)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{22} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Cofator

Se $A = (a_{ij})$ então $A_{11} = 1$ (cofator de elemento a_{11})

Se A é matriz quadrada de ordem $n \geq 2$ então

$A_{ij} = (-1)^{i+j} \times D_{ij}$, onde D_{ij} é o determinante que se obtém de M suprimindo a linha i e a coluna j .

Teorema de Laplace

O determinante de uma matriz quadrada é igual à soma dos produtos dos elementos de uma fila qualquer pelos respectivos cofatores.

Propriedades

I. Determinante igual a zero

O determinante de uma matriz quadrada é igual a zero se a matriz possui:

- uma fila nula.
- duas filas paralelas iguais.
- duas filas paralelas proporcionais.
- uma fila que é combinação linear das outras filas paralelas.

II. Determinante não se altera

O determinante de uma matriz quadrada não se altera se:

- trocamos ordenadamente linhas por colunas ($\det M = \det M'$).
- somarmos a uma fila uma combinação linear de outras filas paralelas (Teorema de Jacobi).

III. Alteração no determinante

O determinante de uma matriz quadrada de ordem n altera-se:

- trocando de sinal, quando duas filas paralelas trocam de lugar entre si.
- ficando multiplicado por α , quando os elementos de uma fila são multiplicados por α .
- ficando multiplicado por α^n quando a matriz é multiplicada por α , ou seja: $\det(\alpha A) = \alpha^n \det A$, onde n é a ordem da matriz.

Observação:

Entende-se por fila qualquer linha ou coluna de uma matriz.

IV. Propriedades complementares

- Teorema de Binet

Se A e B matrizes quadradas de mesma ordem, então: $\det(A \times B) = \det A \times \det B$

- Quando todos os elementos acima e/ou abaixo da diagonal principal forem zeros, o determinante será o produto dos elementos da diagonal principal.

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ x & b & 0 & 0 \\ y & z & c & 0 \\ m & n & p & d \end{vmatrix} = abcd$$

V. Adição de determinantes

Se M e M' são matrizes, de ordem n , idênticas **exceto** na i -ésima linha, então

$\det M'' = \det M + \det M'$, onde M'' é uma matriz de ordem n idêntica às matrizes M e M' , **exceto** na sua i -ésima linha, que é obtida somando-se as i -ésimas linhas de M e M' .



Exercícios

- (UFSE) O determinante da matriz $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, onde $a_{ij} = 2^{i-j}$, é igual a:

- 12
- 8
- 0
- 4
- 6

- Mostre que $\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = a(b-a)(c-b)(d-c)$.

- Prove que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ bc & ca & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$.

- Verifique que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+z \end{vmatrix} = xyz$.

- Seja a matriz $A = [a_{ij}]_{n \times n}$. A matriz B é obtida de A , multiplicando-se, nesta, cada elemento a_{ij} por k^{i-j} , $k \in \mathbb{R}^*$. Demonstre que $\det B = \det A$.

GABARITO – Determinantes I				
01	02	03	04	05
C	–	–	–	–

– Demonstração

Sistemas Lineares

Matriz Inversa I

Definição

M^{-1} é a inversa de M se, e somente se, $M \cdot M^{-1} = M^{-1} \cdot M = I_n$.

Propriedades

- I. A^{-1} é única
- II. $(A^{-1})^{-1} = A$
- III. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
- IV. $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$
- V. $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$

Teorema de Cauchy

A soma dos produtos dos elementos de uma fila qualquer de uma matriz M , ordenadamente, pelos cofatores dos elementos de uma fila paralela, é igual a zero.

Matriz Adjunta (A)

É definida como sendo a transposta da matriz N dos cofatores, ou seja, $\bar{A} = N^t$.

Propriedade $A \cdot \bar{A} = \bar{A} \cdot A = (\det A) \cdot I_n$.

Teorema

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \bar{A}.$$

Corolário: $\exists A^{-1} \Leftrightarrow \det A \neq 0$.

Observação:

$$a_{ji}^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A_{ji}, \forall i, j$$



Exercícios

01. (ITA) Sendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, então o elemento da terceira

linha e primeira coluna, de sua inversa, será igual a:

- A) $\frac{5}{8}$
- B) $\frac{9}{11}$
- C) $\frac{6}{11}$
- D) $-\frac{2}{13}$
- E) $\frac{1}{13}$

02. (EN) Dadas as matrizes: $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 1 \\ -\frac{1}{4} & 2 \end{pmatrix}$, então a

soma da matriz inversa de A com o dobro da matriz transposta de B é:

- A) $\begin{pmatrix} 0 & \frac{7}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}$
- B) $\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{6} \\ \frac{5}{2} & 5 \end{pmatrix}$
- C) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{2}{2} & 0 \end{pmatrix}$
- D) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

03.

A) Mostre que se uma matriz é inversível, então o seu determinante é diferente de zero.

B) Calcule o determinante da inversa da matriz

$$P = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 & 1 \\ \sqrt{2} & 1 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

04. (Mack) Se $\det A = 5$ e $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & a \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$ então a é igual a:

- A) $-\frac{8}{5}$
- B) 0
- C) $\frac{1}{5}$
- D) $-\frac{3}{5}$
- E) $\frac{2}{5}$

05. (Mack) Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Então $(A + A^{-1})^3$ é igual a:

- A) matriz nula de ordem 2.
- B) matriz identidade de ordem 2.
- C) $\frac{1}{2}A$
- D) 2^7A
- E) $8A$

06. (IME) Determine uma matriz não singular P que satisfaça à equação matricial.

$$P^{-1}A = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \text{ onde } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

07. Sendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, obter o elemento a_{23}^{-1} da matriz inversa de A .

08. (IME) Uma matriz quadrada é denominada ortogonal quando a sua transposta é igual a sua inversa. Considere essa definição, determine se a matriz $[R]$, abaixo, é uma matriz ortogonal, sabendo-se que n é um inteiro e α é um ângulo qualquer. Justifique sua resposta.

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos(n\alpha) & -\sin(n\alpha) & 0 \\ \sin(n\alpha) & \cos(n\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

09. (UFC) Sejam A , B e $A + B$ matrizes $n \times n$ ($n \geq 1$) invertíveis. Encontre uma expressão para $(A^{-1} + B^{-1})^{-1}$ em termos de A , $(A + B)^{-1}$ e B .

10. (ITA) Julgue: Sejam **A**, **B** e **C** matrizes quadradas $n \times n$ tais que A e B são inversíveis e $ABCA = A^t$, então $\det C = \det(AB)^{-1}$.

11. (ITA) Julgue: Sejam **m** e **n** números reais com $m \neq n$ e as matrizes: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Sabendo que a matriz $mA + nB$ não é inversível, então **m** e **n** possuem sinais contrários.

GABARITO – Matriz Inversa I

01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11
–	–	0	–	V	*	F	*	*	*	V

– Demonstração

* 06: $\begin{pmatrix} 1/6 & -2 \\ 5/6 & -4 \end{pmatrix}$



Anotações

HILLARY CLINTON ENALTECE O ITA. O FARIAS BRITO AGRADECE.

O FARIAS BRITO, QUE, SOZINHO, APROVA MAIS NO ITA QUE TODAS AS CAPITAIS DO BRASIL, AGRADECE À SECRETÁRIA DE ESTADO DOS EUA EM NOME DE SEUS EX-ALUNOS QUE ENTRARAM NO ITA.

Em seu discurso no evento *Brazil – U.S.: Partnership for the 21st Century*, Hillary Clinton lembrou que a empresa Tecsis, uma das maiores fabricantes de lâminas para turbinas eólicas do mundo, foi fundada por três brasileiros que estudaram no ITA – Instituto Tecnológico de Aeronáutica.

Ela mencionou o ITA como um Instituto de alto padrão na área tecnológica brasileira, criado com forte apoio do MIT – *Massachusetts Institute of Technology*.

É uma honra para o Farias Brito ajudar seus alunos a conquistar uma vaga nesse Instituto tão importante para o Brasil. Estes jovens brilharam na escola e agora vão brilhar no mundo, buscando soluções que melhorem a vida das pessoas.

FARIAS BRITO. 1º DO BRASIL NO ITA.

(Entre todas as capitais)

FARIAS BRITO

1º DO BRASIL NO ITA
1º DO BRASIL NO IME
BICAMPEÃO DO ENEM NO CEARÁ



ORGANIZAÇÃO EDUCACIONAL

FARIAS BRITO

Lições para toda a vida.

www.fariasbrito.com.br

Foto: INSEC