

Fatorial

Definição

Chama-se fatorial de n e indica-se por $n!$ o número natural definido por:

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \text{ ou } n = 1 \\ n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

A. Exercícios Resolvidos

1. $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

2. Calcule n , sabendo-se que $\frac{(n+1)!}{n!} = 7$.

Solução:

Temos que

$$(n+1)! = (n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = (n+1) \cdot n!$$

Logo, $\frac{n! \cdot (n+1)}{n!} = 7 \Rightarrow n+1 = 7 \Rightarrow n = 6$.

03. Simplifique: $\frac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+2)! - (n+1)!}$

Solução:

Temos que $(n+2)! = (n+2) \cdot (n+1)!$.

Assim,

$$\frac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+2)! - (n+1)!} = \frac{(n+2) \cdot (n+1)! + (n+1)!}{(n+2) \cdot (n+1)! - (n+1)!} = \frac{(n+1)! \cdot (n+2+1)}{(n+1)! \cdot (n+2-1)} = \frac{n+3}{n+1}.$$

04. Simplifique: $\frac{(2n)!}{2^n \cdot n!}$.

Solução:

$$\frac{(2n)!}{2^n \cdot n!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1) \cdot 2n}{2^n \cdot n!} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot (2n-1) \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n}{2^n \cdot n!} =$$

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot (2n-1) \cdot [(2 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 3) \cdot \dots \cdot (2 \cdot n)]}{2^n \cdot n!} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot (2n-1) \cdot (2^n \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n)}{2^n \cdot n!} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot (2n-1) \cdot 2^n \cdot n!}{2^n \cdot n!} =$$

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1).$$

05. Expresse cada um dos produtos abaixo como quociente de dois fatoriais:

A) $9 \cdot 8 \cdot 7$.

B) $(n-3) \cdot (n-4) \cdot (n-5)$.

Solução:

A) $9 \cdot 8 \cdot 7 = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{9!}{6!}$

$$\begin{aligned} \text{B)} \quad (n-3) \cdot (n-4) \cdot (n-5) &= (n-3) \cdot (n-4) \cdot (n-5) \cdot \frac{(n-6) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n-6) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \\ &= \frac{(n-3) \cdot (n-4) \cdot (n-5) \cdot (n-6) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n-6) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{(n-3)!}{(n-6)!} \end{aligned}$$

06. Por quantos zeros termina o resultado de $1000!$?

Solução:

Suponhamos que $1000!$ termina por p zeros, isto é: $1000! = N \cdot 10^p$.

Como $10^p = 2^p \cdot 5^p$ pode parecer, à primeira vista, que o número de zeros é igual ao número de fatores iguais a 2 ou de fatores iguais a 5, que ocorrem na decomposição de $1000!$. Entretanto, isto não é verdade, pois o fator primo 2, ocorre um maior número de vezes que o fator primo 5, na decomposição de $1000!$. Assim, para se calcular o expoente p , é suficiente contar o número de fatores primos iguais a 5 que ocorrem na decomposição de $1000!$.

Daí, tem-se:

$$1000! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot (5) \cdot 6 \cdot \dots \cdot 9 \cdot (5 \cdot 2) \cdot 11 \cdot \dots \cdot 999 \cdot (5 \cdot 200) =$$

$$\left(\underbrace{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 9 \cdot 11 \cdot \dots \cdot 999}_A \right) \cdot [5 \cdot (5 \cdot 2) \cdot (5 \cdot 3) \cdot \dots \cdot (5 \cdot 200)] = A \cdot 5^{200} \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 200) =$$

$$A \cdot 5^{200} \cdot [1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot (5) \cdot \dots \cdot 9 \cdot (5 \cdot 2) \cdot 11 \cdot \dots \cdot 199 \cdot (5 \cdot 40)] =$$

$$A \cdot 5^{200} \cdot \left(\underbrace{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 11 \cdot \dots \cdot 199}_B \right) \cdot [5 \cdot (5 \cdot 2) \cdot (5 \cdot 3) \cdot \dots \cdot (5 \cdot 40)] = A \cdot B \cdot 5^{240} \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 40) =$$

$$A \cdot B \cdot 5^{240} \cdot [1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot (5) \cdot \dots \cdot 9 \cdot (5 \cdot 2) \cdot 11 \cdot \dots \cdot 39 \cdot (5 \cdot 8)] =$$

$$A \cdot B \cdot 5^{240} \cdot \left(\underbrace{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 11 \cdot \dots \cdot 39}_C \right) \cdot [5 \cdot (5 \cdot 2) \cdot (5 \cdot 3) \cdot \dots \cdot (5 \cdot 8)] = A \cdot B \cdot C \cdot 5^{248} \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8) =$$

$$A \cdot B \cdot C \cdot 5^{248} \cdot \left(\underbrace{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}_D \right) \cdot 5 = A \cdot B \cdot C \cdot D \cdot 5^{249}.$$

Daí, sendo $p = 249$, conclui-se que $1000!$ termina por 249 zeros.

07. Sendo $n \geq 2$, qual dos números $(n!)^2$ ou $(n^2)!$ é o maior?

Solução:

$$\begin{aligned} (n!)^2 &= (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n)^2 = 1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot \dots \cdot n^2 \\ (n^2)! &= 1^2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 3^2 \cdot \dots \cdot (n^2 - 1) \cdot n^2 = (1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot \dots \cdot n^2) \cdot [2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (n^2 - 1)] = \\ &= (n!)^2 \cdot [2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (n^2 - 1)]. \end{aligned}$$

Porém, para $n \geq 2$, tem-se que $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (n^2 - 1) > 1$.

Logo, $(n^2)! > (n!)^2$.

08. Sendo $n \geq 3$, qual dos números $(n!)^2$ ou n^n é o maior?

Solução:

$$\begin{aligned} (n!)^2 &= [1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n] \cdot [n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1] \\ &= [1 \cdot n] \cdot [2 \cdot (n-1)] \cdot [3 \cdot (n-2)] \cdot \dots \cdot [(n-2) \cdot 3] \cdot [(n-1) \cdot 2] \cdot [n \cdot 1] \end{aligned}$$

Cada produto entre colchetes é da forma: $(i+1) \cdot (n-i)$, com $i = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1$.

Para $i = 0$ ou $i = n-1$ tem-se trivialmente: $(i+1) \cdot (n-i) = n$.

Para $i \neq 0$ e $i \neq n-1$ tem-se:

$$(n-i) > 1 \Rightarrow i \cdot (n-i) > i, \text{ e } (i+1) \cdot (n-i) = i \cdot (n-i) + n - i > i + n - i = n.$$

Assim:

$$\text{Para } i = 0: \quad 1 \cdot n = n. \quad \text{Para } i = 1: \quad 2 \cdot (n-1) > n.$$

$$\text{Para } i = 2: \quad 3 \cdot (n-2) > n. \quad \text{Para } i = 3: \quad 4 \cdot (n-3) > n.$$

.....

$$\text{Para } i = n-2: (n-1) \cdot 2 > n.$$

$$\text{Para } i = n-1: n \cdot 1 = n.$$

Multiplicando-se as n relações acima, vem: $(n!)^2 > n^n$.



Exercícios de Fixação

1. (UFC) Se n é um número inteiro positivo, então o valor de n que satisfaz:

$$n! + 1 + n! + 2 + n! + 3 + \dots + n! + n = \frac{n^2 + 49n}{2} \text{ é:}$$

- A) 24
B) 4
C) 6
D) 3
E) 12
2. (Fuvest-SP) O valor de m na expressão:
 $9 \cdot (2m)! = 2^m \cdot m! \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2m+1)$ é igual a:
A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5
3. (Escola Naval) Se $a_n = \frac{(n+1)! - n!}{n^2[(n-1)! + n!]}$.
Então a_{1997} é:
A) $\frac{1997}{1996}$
B) $\frac{1}{1998}$
C) $1998!$
D) 1997
E) 1
4. (EUA) Defina $n_a!$ para n e a positivos da forma:
 $n_a! = n(n-a)(n-2a)(n-3a)\dots(n-ka)$, para todo k inteiro e positivo e $n > ka$. Então, o quociente $\frac{72_8!}{18_2!}$ é igual a:
A) 4^5
B) 4^6
C) 4^8
D) 4^9
E) 4^{12}
5. (UNB) Seja u o último algarismo da soma $1! + 2! + 3! + \dots + 99!$. Se $p(x) = x^5 - 3x^3 - 6x^2 - 12x + 1$, então $p(u)$ é igual a:
A) 70
B) 71
C) 72
D) 73
E) 74

6. (UNB) Seja $100! = n \cdot 10^p$, onde n é inteiro não divisível por 10. Então, o valor de p é igual a:
A) 20
B) 21
C) 22
D) 23
E) 24

7. (Escola Naval) O valor da soma:

$$S = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots + \frac{k-1}{k!} \text{ é igual a:}$$

- A) $1 - \frac{1}{k!}$
B) $1 + \frac{1}{k!}$
C) $k! - 1$
D) $k! + 1$
E) 1
8. (Canadá) O valor da expressão $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + m \cdot m!$ é igual a:
A) $(m+1)!$
B) $(m+1)! - 1$
C) $(2m)! - m!$
D) $(m-1)!$
E) $m! + 1$
9. (Uespi) Se n_1 e n_2 são números inteiros positivos que satisfazem a equação:
$$\frac{2}{5!(n-5)!} - \frac{1}{4!(n-4)!} - \frac{1}{6!(n-6)!} = 0,$$

então $n_1 + n_1 \cdot n_2 + n_2$ é igual a:
A) 119
B) 129
C) 139
D) 149
E) 159

10. (O.C.M - Adaptada) Sabendo que o valor da expressão

$$\text{abaixo: } \frac{1}{1!9!} + \frac{1}{3!7!} + \frac{1}{5!5!} + \frac{1}{7!3!} + \frac{1}{9!1!} \text{ é da forma } \frac{2^a}{b!}$$

onde a e b são números primos entre si. Então o valor de $a + b$ é igual a:

- A) 19
B) 20
C) 21
D) 22
E) 23
11. (UFC) O maior inteiro x tal que $\frac{60!}{7^x}$ seja um número natural é:
A) 7
B) 8
C) 9
D) 10
E) 11

12. (EUA) Seja $f_1, f_2, f_3, \dots$, funções reais definidas no conjunto dos números reais positivos, dados por:

$$f_i(a) = \frac{1}{\log_{2i}^a}, \text{ onde } a > 0 \text{ e } a \neq 1 \text{ e } i = 1, 2, 3, \dots$$

p. Se $S = f_1(a) + f_2(a) + f_3(a) + \dots + f_p(a)$, então:

- A) $2^s = p!a^p$
 B) $s^2 = p!a^p$
 C) $a^s = p!2^p$
 D) $s^{p!} = a^s$
 E) $s = \log_{p!} a^{p!}$
13. (EUA) Seja $a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$ valores inteiros que satisfaça a equação
- $$\frac{5}{7} = \frac{a_2}{2!} + \frac{a_3}{3!} + \frac{a_4}{4!} + \frac{a_5}{5!} + \frac{a_6}{6!} + \frac{a_7}{7!}.$$
- Sabendo que $0 \leq a_i < i$ para $i = 2, 3, 4, \dots, 7$. Então, o valor da expressão $a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7$ é igual a:
- A) 8
 B) 9
 C) 10
 D) 11
 E) 12
14. (Bielorrússia/2001) Determine o resto da divisão de $1! \cdot 5 + 2! \cdot 11 + \dots + k! \cdot (k^2 + 3k + 1) + \dots + 2000! \cdot 40601$ por 2004.
15. (Torneio internacional das cidades – 96) Demonstrar a desigualdade:
- $$\frac{2}{2!} + \frac{7}{3!} + \frac{14}{4!} + \dots + \frac{k^2 - 2}{k!} + \dots + \frac{9998}{100!} < 3$$
16. (Canadá - 94) Calcule o valor da soma :
- $$\sum_{n=1}^{1994} (-1)^n \cdot \frac{n^2 + n + 1}{n!}.$$
17. (OBM/ 95) O número $26! = 1.2.3.4 \dots 25.26$ termina por uma fileira de zeros. Seja N o inteiro que se obtém ao removermos todos os zeros do final de $26!$. O maior inteiro k para o qual 12^k é um divisor de N é:
- A) 2
 B) 4
 C) 6
 D) 8
 E) 9
18. (Argentina/97) Determinar o último dígito antes do conjunto de zeros na representação do número:
- $$19! + 20! + 21! + \dots + 96! + 97!$$
19. (Bélgica – 94) Defini-se $n! = 1.2.3 \dots (n-1).n$. Seja k o menor número natural diferente de 0 tal que $k!$ é divisível por 1000. A soma dos dígitos de k é:
- A) 1
 B) 2
 C) 3
 D) 4
 E) 5

20. (EUA/2001) Sabendo que:

$$\frac{3}{1!+2!+3!} + \frac{4}{2!+3!+4!} + \frac{5}{3!+4!+5!} + \dots$$

$$\dots + \frac{2001}{1999!+2000!+2001!} + \frac{1}{2001!} \text{ vale } k.$$

Então o valor de $2008 \cdot k$ é igual a:

- A) 2008
 B) 1004
 C) 502
 D) 2009
 E) 251
21. (EUA/2005) Definimos $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$. Se o mínimo múltiplo comum de $(10!) \cdot (18!)$ e $(12!) \cdot (17!)$ possui a forma $\frac{(a!)(b!)}{(c!)}$. Então o valor de $a + b + c$ é igual a:
- A) 33
 B) 32
 C) 31
 D) 30
 E) 29
22. (EUA/2008) Definimos $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$. (Isto é, o produto dos números naturais desde 1 até n). Para cada natural n , seja $a_n = \frac{(n+9)!}{(n-1)!}$. Se k é o menor natural para o qual o último algarismo não nulo da direita de a_k é ímpar, então o último algarismo da direita e diferente de zero de a_k é igual a:
- A) 1
 B) 3
 C) 5
 D) 7
 E) 9
23. (O.B.M./2004) Para n inteiro positivo, definimos $n!$ (lê-se “n fatorial”) o produto de todos os inteiros positivos menores ou iguais a n . Por exemplo, $6! = 1.2.3.4.5.6$. Se $n! = 2^{15} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13$, então n é igual a:
- A) 13
 B) 14
 C) 15
 D) 16
 E) 17
24. (Unifesp/2004) O valor de $\log_2 \left(\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}{n!} \right)$ é:
- A) n^2
 B) $2 \cdot n$
 C) n
 D) $2 \cdot \log_2^n$
 E) $\log_2^n$

25. (Peru/2005) Seja:

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = 2 + \frac{1}{2}$$

$$a_3 = \frac{5}{2} + \frac{1}{6}$$

$$a_4 = \frac{8}{3} + \frac{1}{24}$$

.....

$$\text{O valor } a_{100} = \sum_{n=2}^{100} \frac{1}{n!}$$

- A) 5
B) 7
C) 2
D) 8
E) 10

26. (Escola Naval/2008) Sejam $n \in \mathbb{N}$ tal que $2^4 + 2^5 + 2^6 + \dots + 2^n$

$$= 8176 \text{ e } m \text{ o menor } m \in \mathbb{N} \text{ tal que } \frac{m!}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2m)} < \frac{1}{6^{2 \cdot \log_6 40}}$$

seja verdadeira. Então o produto $m \cdot n$ vale:

- A) 120
B) 124
C) 130
D) 132
E) 136

27. (EUA) Se $A_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$, para n positivo e $B_n = \log A_1 + \log A_2 + \log A_3 + \dots + \log A_n$, então o valor de x sabendo-se que $B_6 + B_7 = B_x$ é igual a:

- A) 8
B) 9
C) 10
D) 11
E) 12

28. (EUA/2007) Se m e n são números inteiros positivos

$$\text{tais que } \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \frac{4}{5!} + \dots + \frac{11}{12!} \text{ é da forma } \frac{1}{n!} - \frac{1}{m!}$$

com $n \geq 2$ e $m \geq 12$. Então o valor de $m + n$ é igual a:

- A) 10
B) 11
C) 12
D) 14
E) 15

29. (AFA/2008 - Adaptada) O valor da expressão

$$\frac{1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + 14 \cdot 14! + 1}{12! (1 + 2 + 3 + \dots + 14)}$$

- A) 22
B) 23
C) 24
D) 25
E) 26

30. (EUA) O fatorial de 35, isto é, o produto dos números $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 33 \cdot 34 \cdot 35$, é um número com 42 algarismos: 35!=

10333147966386144929K666511337523200000000.

No lugar do algarismo central está uma letra **K**, que algarismo teve seu lugar ocupado pelo **K**?

31. (Omgo/2002) Represente os seguintes produtos através de fatoriais:

I. $2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n)$;

II. $1 \times 3 \times 5 \times 7 \times \dots \times (2n - 1)$.

32. Prove que a raiz positiva da equação:

$$x(x + 1) \cdot (x + 2) \cdot (x + 3) \dots (x + 1999) = 1 \text{ é menor do}$$

$$\text{que } \frac{1}{1999!}.$$

33. (OMSPABC/2005) Simplificando a expressão

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 49}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 50}, \text{ obtemos:}$$

A) $\frac{50!}{2^{50} \cdot (25!)^2}$

B) $\frac{50!}{49!}$

C) $\frac{49!}{50!}$

D) $\frac{50!}{25^2 (2!)^2}$

E) 48!

34. (EUA/2002) O produto dos fatores inteiros positivos ímpares menores que 10000 é igual a:

A) $\frac{10000!}{(5000!)^2}$

B) $\frac{10000!}{2^{5000}}$

C) $\frac{9999!}{2^{5000}}$

D) $\frac{10000!}{2^{5000} \cdot 5000!}$

E) $\frac{5000!}{2^{5000}}$

35. (EUA) Sabendo que o valor da soma

$$\frac{1}{2! \cdot 17!} + \frac{1}{3! \cdot 16!} + \dots + \frac{1}{9! \cdot 10!}$$

$$\text{é representada da seguinte forma } \frac{2^a - b}{c!} \text{ onde } c! \text{ é o fatorial de } c. \text{ Calcule o valor}$$

$$\text{de } a + b + c.$$

36. (Peru) Sabendo que a expressão:

$\sqrt{(x) \cdot \sqrt[3]{(x^2) \cdot \sqrt[4]{(x^3) \cdot \sqrt[5]{(x^4) \dots}}}}$ tem infinitos termos e pode ser representada da seguinte forma x^n . Então o valor de n é igual a:

- A) 1
- B) 2
- C) 3
- D) 4
- E) 5

37. (EUA) Resolve-se 100 vezes a equação $1! + 2! + 3! + \dots + n! = y^2$ no conjunto dos números inteiros, atribuindo valores de 1 a 100 para n . As soluções inteiras em y encontram-se no intervalo:

- A) $[-8, 0]$
- B) $[-4, 1]$
- C) $[-2, 6]$
- D) $[-3, 5]$
- E) $[-5, -1]$

38. (EUA) $410 = a_1 \cdot 1! + a_2 \cdot 2! + a_3 \cdot 3! + \dots + a_n \cdot n!$ onde a_k é um número natural menor ou igual a k . O valor de a_4 é:

- A) 0
- B) 1
- C) 2
- D) 3
- E) 4

39. (ITA) Resolver a equação: $\log_{\mu}^{(S,x)} = 1$, onde:

$$S = \frac{1}{2 \cdot 2!} + \frac{2}{2 \cdot 3!} + \frac{3}{2 \cdot 4!} + \dots + \frac{n}{2 \cdot (n+1)!} \quad \text{e} \quad \mu = \frac{1}{(n+2)!}$$

40. (ITA) Sejam $a_1, a_2, \dots, a_n$ números reais. A expressão $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2$ é igual a:

- A) $\sum_{i=1}^n a_i^2 + 4 \cdot \sum_{j=1}^n a_j$
- B) $\sum_{i=1}^n a_i^2 + \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_i a_j \right)$
- C) $\sum_{i=1}^n a_i^2 + \binom{n}{2} \cdot \sum_{j=1}^n a_j$
- D) $\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_i a_j \right)$
- E) n. r. a.

Propriedades dos Números Binomiais ou Combinações

A. 1.ª Propriedade – Relação de Stifel-Pascal

Consideremos n objetos distintos e suponhamos formado o quadro de todas as combinações de taxa p , desses n objetos.

Separadamente as C_n^p combinações desse quadro em duas partes:

- A) uma formada por todas as combinações de taxa p que contêm um certo objeto, cujo número é C_{n-1}^{p-1} .
- B) outra formada por todas as combinações de taxa p que não contêm o objeto considerado, cujo número é C_{n-1}^p .

Portanto:

I.

$$C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p = C_n^p$$

Esta igualdade denomina-se Relação de Stifel-Pascal.

B. Exercícios Resolvidos

01. Calcule a soma: $\sum_{k=0}^p (-1)^k C_n^k$

$$\text{Solução: } \sum_{k=0}^p (-1)^k C_n^k = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \dots \\ \dots + (-1)^{p-1} C_n^{p-1} - (-1)^p C_n^p$$

$$\left. \begin{array}{l} C_n^0 = C_{n-1}^0 \\ C_n^1 = C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 \\ C_n^2 = C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2 \\ C_n^3 = C_{n-1}^2 + C_{n-1}^3 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ C_n^{p-1} = C_{n-1}^{p-2} + C_{n-1}^{p-1} \\ C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} -C_n^1 = -C_{n-1}^0 - C_{n-1}^1 \\ C_n^2 = C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2 \\ -C_n^3 = -C_{n-1}^2 - C_{n-1}^3 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ (-1)^{p-1} C_n^{p-1} = (-1)^{p-1} C_{n-1}^{p-2} + (-1)^{p-1} C_{n-1}^{p-1} \\ (-1)^p C_n^p = (-1)^p C_{n-1}^{p-1} + (-1)^p C_{n-1}^p \end{array}$$

Somando-se membro a membro as $(p + 1)$ igualdade da direita, vem:

$$C_4^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \dots + (-1)^p C_n^p = (-1)^p C_{n-1}^p$$

Observação: Quando $p = n$, tem-se:

$$C_4^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \dots + (-1)^n C_n^n = (-1)^n C_{n-1}^n = 0$$

02. Mostre que:

$$(C_n^0 + C_n^1)(C_n^1 + C_n^2)(C_n^2 + C_n^3) \dots (C_n^{n-1} + C_n^n) = \frac{(n+1)^n}{n!} C_n^1 C_n^2 C_n^3 \dots C_n^{n-1} C_n^n$$

Solução:

$$C_n^0 + C_n^1 = C_{n+1}^1 = \frac{n+1}{1} C_n^n$$

$$C_n^1 + C_n^2 = C_{n+1}^2 = \frac{n+1}{2} C_n^{n-1}$$

$$C_n^2 + C_n^3 = C_{n+1}^3 = \frac{n+1}{3} C_n^1$$

.

.

.

$$C_n^{n-1} + C_n^n = C_{n+1}^n = \frac{n+1}{n} C_n^1$$

Multiplicando-se essas n igualdades, obtemos:

$$(C_n^0 + C_n^1)(C_n^1 + C_n^2)(C_n^2 + C_n^3) \dots (C_n^{n-1} + C_n^n) = \frac{(n+1)^n}{n!} C_n^1 C_n^2 C_n^3 \dots C_n^{n-1} C_n^n$$

obtemos:

$$(C_n^0 + C_n^1)(C_n^1 + C_n^2)(C_n^2 + C_n^3) \dots (C_n^{n-1} + C_n^n) = \frac{(n+1)^n}{n!} C_n^1 C_n^2 C_n^3 \dots C_n^{n-1} C_n^n$$

C. 2.ª Propriedade

$$C_p^p + C_{p+1}^p + C_{p+2}^p + \dots + C_n^p = C_{n+1}^{p+1}$$

Fazendo na relação de *Stifel-Pascal*:

$$C_m^p + C_m^{p+1} = C_{m+1}^{p+1}, \text{ onde } (m = p, p + 1, p + 2, \dots, n),$$

obtemos:

$$C_p^p + C_p^{p+1} = C_{p+1}^{p+1}$$

$$C_{p+1}^p + C_{p+1}^{p+1} = C_{p+2}^{p+1}$$

$$C_{p+2}^p + C_{p+2}^{p+1} = C_{p+3}^{p+1}$$

.....

$$C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1}.$$

Somando essas igualdades, simplificando e tendo em vista que $C_p^{p+1} = 0$, temos :

II.

$$C_p^p + C_{p+1}^p + C_{p+2}^p + \dots + C_n^p = C_{n+1}^{p+1}$$

D. 3.ª Propriedade

$$C_p^0 + C_{p+1}^1 + C_{p+2}^2 + \dots + C_{p+k}^k = C_{p+k+1}^{k+1}$$

Pela relação $C_n^p = C_n^{n-p}$, podemos escrever:

$$C_p^0 = C_p^p$$

$$C_{p+1}^1 = C_{p+1}^p$$

$$C_{p+2}^2 = C_{p+2}^p$$

.....

$$C_{p+k}^k = C_{p+k}^p.$$

Somando essas igualdades, vem:

$$C_p^0 + C_{p+1}^1 + C_{p+2}^2 + \dots + C_{p+k}^k =$$

$$C_p^p + C_{p+1}^p + C_{p+2}^p + \dots + C_{p+k}^p =$$

Como $C_p^p + C_{p+1}^p + C_{p+2}^p + \dots + C_{p+k}^p = C_{p+k+1}^{p+1}$

(2.ª propriedade) e $C_{p+k}^p = C_{p+k+1}^k$, temos:

III.

$$C_p^0 + C_{p+1}^1 + C_{p+2}^2 + \dots + C_{p+k}^k = C_{p+k+1}^{k+1}$$

E. Exercícios Resolvidos

1. Calcule a soma:

$$S = C_n^k + C_{n+1}^k + C_{n+2}^k + \dots + C_{n+m}^k.$$

Solução:

S pode ser escrita como segue:

$$S = (C_k^k + C_{k+1}^k + \dots + C_{n-1}^k) + C_n^k + C_{n+1}^k + C_{n+2}^k + \dots \\ \dots + C_{n+m}^k - (C_k^k + C_{k+1}^k + \dots + C_{n-1}^k)$$

Pela 2.^a propriedade, temos:

$$S = C_{n+m+1}^{k+1} - C_n^{k+1}.$$

2. Calcule a soma: $S = C_5^0 + C_6^1 + C_7^2 + \dots + C_{55}^{50}$.

Solução:

Pela 3.^a propriedade, temos:

$$S = C_{56}^{50} = C_{56}^6.$$

3. Calcule a soma: $S = \sum_{i=1}^n i \cdot (i+1)$.

Solução:

$$S = \sum_{i=1}^n i \cdot (i+1) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n \cdot (n+1)$$

Dividindo ambos os membros da igualdade acima por 2!, temos:

$$\frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^n i \cdot (i+1) = \frac{2 \cdot 1}{2!} + \frac{3 \cdot 2}{2!} + \frac{4 \cdot 3}{2!} + \dots + \frac{(n+1) \cdot n}{2!} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^n i \cdot (i+1) = C_2^2 + C_3^2 + C_4^2 + \dots + C_{n+1}^2.$$

Pela 2.^a propriedade, podemos escrever:

$$\frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^n i \cdot (i+1) = C_{n+2}^3 = \frac{(n+2) \cdot (n+1) \cdot n}{3!} \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^n i \cdot (i+1) = \frac{(n+2) \cdot (n+1) \cdot n}{3}$$

4. Calcule a soma: $\sum_{i=1}^n i \cdot (i+1) \cdot (i+2)$.

Solução:

$$\sum_{i=1}^n i \cdot (i+1) \cdot (i+2) = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \dots \\ \dots + n \cdot (n+1) \cdot (n+2)$$

Dividindo ambos os membros da igualdade acima por 3!, temos:

$$\frac{1}{3!} \cdot \sum_{i=1}^n i \cdot (i+1) \cdot (i+2) = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{3!} + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3!} + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} + \dots \\ \dots + \frac{(n+2) \cdot (n+1) \cdot n}{3!} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{6} \cdot \sum_{i=1}^n i \cdot (i+1) \cdot (i+2) = C_3^3 + C_4^3 + C_5^3 + \dots + C_{n+2}^3$$

.

Pela 2.^a propriedade, temos:

$$\frac{1}{6} \cdot \sum_{i=1}^n i \cdot (i+1) \cdot (i+2) = C_{n+3}^4 = \frac{(n+3) \cdot (n+2) \cdot (n+1) \cdot n}{4!} \\ \Rightarrow \sum_{i=1}^n i \cdot (i+1) \cdot (i+2) = \frac{(n+3) \cdot (n+2) \cdot (n+1) \cdot n}{4}$$

5. Calcule a soma dos **n** primeiros números inteiros positivos.

Solução:

$$\sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + 3 + \dots + n =$$

$$\sum_{i=1}^n i = C_1^1 + C_2^1 + C_3^1 + \dots + C_n^1 = C_{n+1}^2 = \frac{(n+1) \cdot n}{2}$$

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{(n+1) \cdot n}{2}.$$

6. Calcule a soma dos quadrados dos n primeiros inteiros positivos.

Solução:

Devemos calcular: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \sum_{i=1}^n i^2$.

Aplicando somatório à igualdade: $i \cdot (i + 1) = i^2 + i$, vem:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n i \cdot (i + 1) &= \sum_{i=1}^n (i^2 + i) \\ \Rightarrow \sum_{i=1}^n i \cdot (i + 1) &= \sum_{i=1}^n i^2 + \sum_{i=1}^n i \end{aligned}$$

Pelos exercícios, podemos escrever:

$$\frac{n \cdot (n + 1) \cdot (n + 2)}{3} = \sum_{i=1}^n i^2 + \frac{n \cdot (n + 1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n \cdot (n + 1) \cdot (n + 2)}{3} - \frac{n \cdot (n + 1)}{2} =$$

$$\frac{n \cdot (n + 1) \cdot (2n + 1)}{6}$$

$$\text{Logo, } \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n \cdot (n + 1) \cdot (2n + 1)}{6}.$$

RESULTADO FINAL **UECE 2010.2**

FARIAS BRITO

1º NO ENEM. NA UECE TAMBÉM.

1º LUGAR GERAL

EU POSSO EU PASSO

ALVARO VIEIRA CASTRO REIS
278,0 PONTOS
GABARITO: 100% CORRETO

RESULTADO OFICIAL

2º LUGAR GERAL

EU POSSO EU PASSO

ORLEANDRO CARLOS DA SILVA
272,0 PONTOS
ACERTOS: 100% CORRETO

RESULTADO OFICIAL

3º LUGAR GERAL

EU POSSO EU PASSO

JOEL MURIELA FREITAS
275,0 PONTOS
ACERTOS: 100% CORRETO

RESULTADO OFICIAL

FARIAS BRITO < 1º NO ENEM DO MEC - É O MEC QUEM DIZ
1º NO VESTIBULAR DA UECE - É UECE QUEM DIZ

1º NO ENEM

www.fariasbrito.com.br

ORGANIZAÇÃO EDUCACIONAL **FARIAS BRITO** 25 ANOS

Paixão por você. Paixão por vencer.