ANÁLISE COMBINATÓRIA - IME

Princípios Fundamentais

01. (IME/70) Determine quantos números de 4 algarismos diferentes podem ser formados com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5.
Obs: Considere os números iniciados com o algarismo 0 (por exemplo, 0123), número de 3 algarismos.

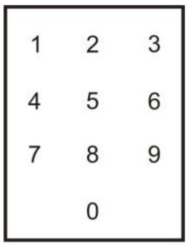
02. (IME/66) Determinada organização estabeleceu um sistema de códigos em que os símbolos são formados por um ou mais pontos, até o máximo de 6 pontos, dispostos de maneira a ocuparem os vértices e os pontos médios dos lados maiores de um retângulo. Qual o número total de símbolos obtidos.

03. (Olimpíada Belga) Um número inteiro não-negativo é dito palíndromo se ele lido da esquerda para a direita é igual quando lido da direita para a esquerda. Por exemplo 121, 0, 2002 e 4 são palíndromos. O número de palíndromos que são menores que 1.000.000 é:
a) 900 b) 1991 c) 1993 d) 1999 e) 2220

04. (IME) Calcule quantos números naturais de 3 algarismos distintos existem no sistema de base 7

05. (IME/05) O sistema de segurança de uma casa utiliza um teclado numérico, conforme ilustrado na figura. Um ladrão observa de longe e percebe que:
- a senha utilizada possui quatro dígitos
- o primeiro e o último dígitos encontram-se numa mesma linha
- o segundo e o terceiro dígitos encontram-se na linha imediatamente superior

Calcule o número de senhas que deverão ser experimentadas pelo ladrão para que com certeza ele consiga entrar na casa.



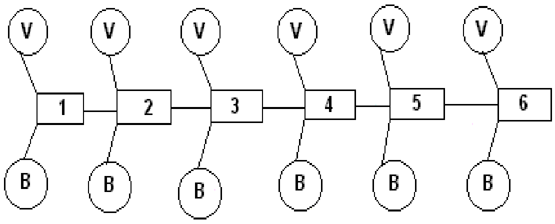
Teclado Numérico

06. (Olimpíada Goiana) Suponha que um número natural n seja fatorado do seguinte modo:
$n = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7$
a) quantos divisores positivos possui o número *n*?
b) Que relação existe entre o número de divisores positivos e os expoentes dos fatores primos de *n*?
c) Encontre o menor número natural que possui exatamente 22 divisores positivos distintos.

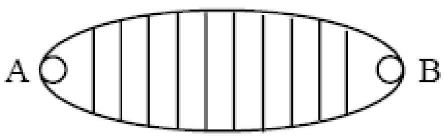
07. Quantos quadrados perfeitos são divisores do produto $1!\cdot 2!\cdot 3!\cdots 9!$?

a) 504 b) 672 c) 864 d) 936 e) 1008

08. (IME) Deseja-se transmitir sinais luminosos de um farol, representado pela figura abaixo. Em cada um dos seis pontos de luz no farol existem uma lâmpada branca e uma vermelha. Sabe-se que em cada ponto de luz não pode haver mais que uma lâmpada acesa e que pelo menos três pontos de luz devem ficar iluminados. Determine o total de configurações que podem ser obtidas.



09. (IME/90) Ligando as cidades A e B existem duas estradas principais. Dez estradas secundárias de mão dupla ligam as duas estradas principais, como mostra a figura. Quantos caminhos sem auto-interseções, existem de A até B?



Obs: Caminho sem auto-intersecção é um caminho que não passa por um ponto duas ou mais vezes.

10. (Olimpíada Brasileira/99) Um gafanhoto pula exatamente 1 metro. Ele está em um ponto A de uma reta, só pula sobre ela, e deseja atingir um ponto B dessa mesma reta que está a 5 metros de distância de A com exatamente 9 pulos. De quantas maneiras ele pode fazer isso?

a) 16 b) 18 c) 24 d) 36 e) 48

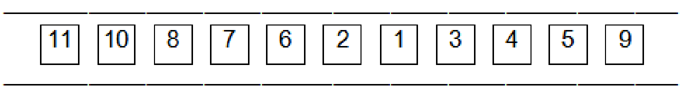
11. (Olimpíada Grega) Determine o número de funções $f:\{1, 2, ..., n\}\to\{1995,1996\}$ que satisfazem a condição de que $f(1)+f(2)+...+f(n)$ é ímpar.

12. (Olimpíada Brasileira) Quantas funções $f:\{1, 2, 3, 4, 5\}\to\{1, 2, 3, 4, 5\}$ satisfazem a relação $f(f(x))=f(x)$ para todo $x\in\{1, 2, 3, 4, 5\}$?

13. (Olimpíada da Moldova) Seja $n=2^{13}\cdot 3^{11}\cdot 5^{7}$. Determine o número de divisores de n^2 que são menores que *n* e não são divisores de *n*.

14. Uma escola possui uma escada de 7 degraus. Se deparando com essa escada, o professor Lafayette começou a se perguntar de quantas maneiras ele poderia descê-la: "Posso descer um degrau por vez, ou eventualmente descer dois degraus de uma vez, ou três degraus de uma vez, ou até os sete de uma vez, me jogando lá de cima". De quantas formas diferentes ele pode descer essa escada?

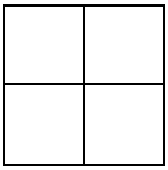
15. (IME/83) Uma rua possui um estacionamento em fila com N vagas demarcadas junto ao meio-fio de um dos lados. N automóveis, numerados de 1 a N, devem ser acomodados, sucessivamente, pela ordem numérica no estacionamento. Cada carro deve justapor-se a um carro já estacionado, ou seja, uma vez estacionado o carro 1 em qualquer uma das vagas, os seguintes se vão colocando imediatamente à frente do carro mais avançado ou atrás do carro mais recuado. Quantas configurações distintas podem ser obtidas desta maneira? A figura abaixo mostra uma das disposições possíveis.



16. (Olimpíada Americana) Sete chocolates distintos devem ser distribuídos em três sacolas. A sacola vermelha e a sacola azul devem receber pelo menos um chocolate, enquanto a sacola branca pode eventualmente permanecer vazia. Quantas distribuições deste tipo são possíveis?

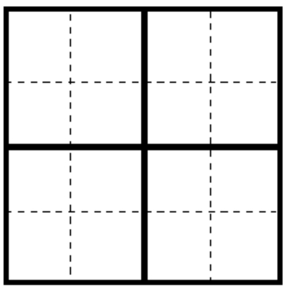
a) 1930 b) 1931 c) 1932 d) 1933 e) 1934

17. (IME/10 - adaptado) Cada um dos quatro quadrados menores da figura acima é pintado aleatoriamente de verde, azul, amarelo ou vermelho. De quantas maneiras podemos colori-los de modo que ao menos dois quadrados, que possuam um lado em comum, sejam pintados da mesma cor?



18. (IME/08) A figura abaixo é composta de 16 quadrados menores. De quantas formas é possível preencher estes quadrados com os números 1, 2, 3 e 4, de modo que um número não pode aparecer duas vezes em:

- uma mesma linha;
- uma mesma coluna;
- cada um dos quatro quadrados demarcados pelas linhas contínuas.



19. (OBM) Num tabuleiro 2×2, como o mostrado a seguir, escreveremos números inteiros de 1 a 9 obedecendo à seguinte regra: $A > B$, $C > D$, $A > C$ e $B > D$

A	B
C	D

a) Quantos tabuleiros diferentes existem tais que $B = C$?
b) Quantos tabuleiros diferentes existem no total?

Permutações

20. (Olimpíada Brasileira) Cinco amigos, Arnaldo, Bernaldo, Cernaldo, Dernaldo e Ernaldo, devem formar uma fila com outras 30 pessoas. De quantas maneiras podemos formar esta fila de modo que Arnaldo fique na frente de seus 4 amigos? (Obs: Os amigos não precisam ficar em posições consecutivas)

a) $35!$ b) $\frac{35!}{5!}$ c) $\frac{35!}{5}$ d) $\binom{35}{5}5!$ e) $e^{\pi\sqrt{163}}$

21. Em certo jogo, 40 cartas são distribuídas entre 4 jogadores, de modo que cada um receba 10 cartas. Cada carta é de uma das cores azul, amarela, vermelha ou verde, e há exatamente 10 cartas de cada cor, numeradas de 1 a 10. Considere que se cada jogador receber o mesmo conjunto de cartas em duas distribuições, essas distribuições são consideradas idênticas. Quantas distribuições diferentes dessas cartas são possíveis com cada jogador recebendo uma carta de cada número?

a) $4!^{10}$ b) $\frac{40!}{10!^4}$ c) $40!$ d) $10!^4$ e) 4^{10}

22. (IME) Uma embarcação deve ser tripulada por oito homens, dois dos quais só remam do lado direito e apenas um do lado esquerdo. Determine de quantos modos esta tripulação pode ser formada, se de cada lado deve haver quatro homens.
Observação: A ordem dos homens distingue a tripulação

23. (IME/84) Determine a soma de todos os números inteiros que são obtidos permutando-se, sem repetição, os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5

24. Quantos são os números de 5 algarismos, formados a partir dos algarismos 3 a 7, onde os números 3, 5 e 7 estão postos em ordem crescente?

25. (IME/72) Cinco rapazes e cinco moças devem posar para uma fotografia, ocupando cinco degraus de uma escadaria de forma que em cada degrau fique um rapaz e uma moça. De quantas maneiras diferentes podemos arrumar este grupo ?

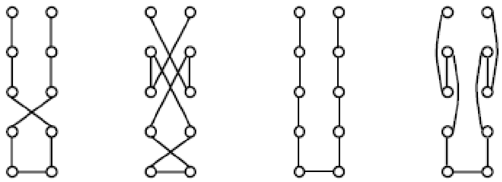
26. Uma aranha tem uma meia e um sapato para cada um de seus oito pés. De quantas maneiras diferentes a aranha pode se calçar admitindo que a meia tem que ser colocada antes do sapato? (Considere que as meias e os sapatos são iguais entre si)

a) $(8!)^2$ b) $\frac{16!}{2}$ c) $\frac{16!}{8!}$ d) $\frac{16!}{2^8}$ e) $\frac{(8!)^2}{2}$

27. (Olimpíada Brasileira) O matemático excêntrico Jones, especialista em Teoria dos Nós, tem uma bota com 5 pares de furos pelos quais o cadarço deve passar. Para não se aborrecer, ele gosta de diversificar as maneiras de passar o cadarço pelos furos, obedecendo sempre às seguintes regras:

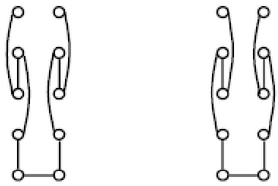
- o cadarço deve formar um padrão simétrico em relação ao eixo vertical;
- o cadarço deve passar exatamente uma vez por cada furo, sendo indiferente se ele o faz por cima ou por baixo;
- o cadarço deve começar e terminar nos dois furos superiores e deve ligar diretamente (isto é, sem passar por outros furos) os dois furos inferiores.

Representamos a seguir algumas possibilidades.



Qual é o número total de possibilidades que o matemático tem para amarrar seu cadarço, obedecendo às regras acima?

Observação: Maneiras como as exibidas a seguir devem ser consideradas iguais, isto é, deve ser levada em conta apenas a ordem na qual o cadarço passa pelos furos.



Combinações

28. (IME/72) Com 10 espécies de frutas, quantos tipos de saladas contendo 6 espécies diferentes podem ser formadas?

29. Considere $A = \{1, 2, 3, ..., 12\}$. Determine o número de subconjuntos *H* de *A* tais que as condições:
a) *H* tem 6 elementos;
b) $8 \in H$;
c) exatamente dois elementos maiores que 8 pertencem a *H*;
sejam simultaneamente satisfeitas.

30. (IME/55) Com os algarismos 1, 2, 3,..., 9, quantos números constituídos de 3 algarismos ímpares e 3 pares, sem repetição, podem ser formados? Explanar o raciocínio no desenvolvimento da questão.

31. Determine a quantidade de números de oito dígitos que contém exatamente 4 noves.

32. (Olimpíada Brasileira) Considere 10 pessoas, todas de alturas diferentes, as quais devem ficar em fila de tal modo que, a partir da pessoa mais alta, as alturas devem decrescer para ambos os lados da fila (se a pessoa mais alta for a primeira ou a última da fila, todas as pessoas a partir dela devem estar em ordem decrescente de altura). Obedecendo essas condições, de quantos modos essas pessoas podem ficar em fila?
a) 256 b) 768 c) 1260 d) 512 e) 2560

33. (IME/88) Considere um conjunto de 12 letras distintas, sendo 8 consoantes e 4 vogais;
a) quantas palavras podem ser formadas contendo 3 consoantes e 2 vogais sem repetição?
b) em quantas destas palavras as vogais não estão juntas?

34. (IME/89) Em cada uma das faces de um cubo constrói-se um círculo e, em cada círculo marcam-se n pontos. Unindo-se esses pontos,
a) quantas retas, não contidas numa mesma face do cubo, podem ser formadas;
b) quantos triângulos, não contidos numa mesma face do cubo, podem ser formados;
c) quantos tetraedros, com base numa das faces do cubo, podem ser formados;
d) quantos tetraedros, com todos os vértices em faces diferentes, podem ser formados.

35. A figura abaixo mostra um arranjo 4×5 de pontos, cada um dos quais está a uma unidade de distância dos vizinhos mais próximos. Determine o número de triângulos cujos vértices são pontos deste arranjo.

36. Desejamos colocar em fila um grupo de 6 paraguaios, 7 argentinos e 10 brasileiros de tal maneira que todo paraguaio esteja entre um brasileiro e argentino e os brasileiros e argentinos nunca estejam juntos. De quantas maneiras é possível realizar essa tarefa?

37. (Olimpíada Americana) Para quantos conjuntos de três inteiros positivos $\{a,b,c\}$ é verdade que $a \cdot b \cdot c = 2310$?

a) 32 b) 36 c) 40 d) 43 e) 45

38. Em um senado, há 30 senadores. Para cada par de senadores, eles podem ser amigos ou inimigos. Cada senador tem 6 inimigos. Considere comissões formadas por 3 senadores. Determine o número total de comissões, cujos membros são todos amigos uns dos outros ou todos inimigos uns dos outros.

39. (Olimpíada Americana) Dez pontos são selecionados sobre o semi-eixo positivo dos x, a que chamaremos de X^+, e cinco pontos são selecionados nos semi-eixo positivo dos y, a que chamaremos de Y^+. Desenhamos os cinqüenta segmentos conectando os dez pontos de X^+ aos cinco pontos de Y^+. Qual o número máximo possível de interseções destes segmentos no interior do primeiro quadrante?

40. (IME/77) São dados n pontos em um plano, supondo-se:

- Cada três pontos quaisquer não pertencem a uma mesma reta;
- Cada par de retas por eles determinado não é constituído por retas paralelas;
- Cada três retas por eles determinadas não passam por um mesmo ponto.

Pede-se o número de interseções das retas determinadas por esses pontos distintos dos pontos dados.

41. (IME/94) Seja um octógono convexo. Suponha que quando todas suas diagonais são traçadas, não há mais de duas diagonais se interceptando no mesmo ponto. Quantos pontos de interseção (de diagonais) existem no interior desse octógono?

42. (IME/93) Numa escola há 15 comissões, todas com igual número de alunos. Cada aluno pertence a duas comissões e cada duas comissões possui exatamente um membro em comum. Todos os alunos participam.
a) Quantos alunos tem a escola?
b) Quantos alunos participam de cada comissão?

43. (IME/01) Um comandante de companhia convocou voluntários para a constituição de 11 patrulhas. Todas elas são formadas pelo mesmo número de homens. Cada homem participa de exatamente duas patrulhas. Cada duas patrulhas têm somente um homem em comum. Determine o número de voluntários e o de integrantes de uma patrulha.

44. (Olimpíada Capixaba) Numa folha de papel estão escritas 58 dezenas pintadas de azul ou de vermelho. O número de maneiras distintas de se escolher três dezenas azuis é igual ao número de maneiras distintas de se escolher duas dezenas vermelhas e uma azul. Quantas dezenas azuis estão escritas no papel?

45. (IME) Seja o conjunto:

$$D = \{(k_1, k_2) \mid 1 \le k_1 \le 13;\ 1 \le k_2 \le 4;\ k_1,\ k_2 \in \mathbb{N}\}$$

Determine quantos subconjuntos $L = \{(x_1,\ x_2),\ (y_1,\ y_2),\ (z_1,\ z_2),\ (t_1,\ t_2),\ (r_1,\ r_2)\}$, $L \subset D$ existem com 5 elementos distintos, que satisfazem simultaneamente as seguintes condições:

(I) $x_1 = y_1 = z_1$

(II) $x_1 \ne t_1,\ x_1 \ne r_1,\ t_1 \ne r_1$

46. (IME) Dado o conjunto A={1, 2, 3..., 102}, pede-se o número de subconjuntos de A , com três elementos, tais que a soma destes seja um múltiplo de três.

47. (EN - adaptado) Um grupo de 8 cientistas trabalha em um projeto altamente sigiloso, cujos planos estão guardados em um armário. Eles desejam que o armário só possa ser aberto quando pelo menos 5 cientistas estiverem presentes. Para que isso aconteça, são instalados cadeados no armário e cada cientista recebe as chaves de alguns cadeados. Suponha que tenha sido instalada a menor quantidade possível de cadeados:

a) Quantos cadeados foram instalados?

b) Quantas chaves cada cientista recebeu?

48. A sequência 1, 3, 4, 9, 10, 12, 13, ... consiste em todos os inteiros positivos que são potências de 3 ou a soma de potências distintos de 3. Determine o 100º termo dessa sequência.

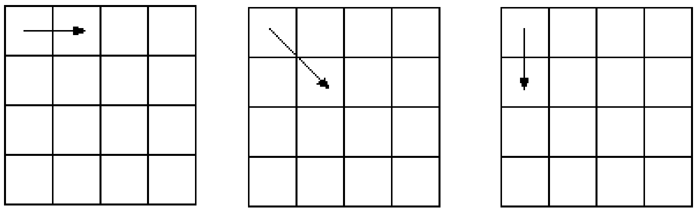
49. (Olimpíada Brasileira) Os doze alunos de uma turma de olimpíada saíam para jogar futebol todos os dias após a aula de matemática, formando dois times de 6 jogadores cada e jogando entre si. A cada dia eles formavam dois times diferentes dos times formados em dias anteriores. Ao final do ano, eles verificaram que cada 5 alunos haviam jogado juntos num mesmo time exatamente uma vez. Quantos times diferentes foram formados ao longo do ano?

50. (Olimpíada Brasileira) Um país tem 8 cidades A_1, A_2, ..., A_6, B, C ligadas por rodovias de mão dupla satisfazendo as seguintes condições: B e C são ambas ligadas às cidades A_1, A_2, ..., A_6, mas não são ligadas uma à outra; A_1, A_2, ..., A_6 são ligadas duas a duas. Calcule o número de maneiras distintas de viajar de carro de B a C, sem passar duas vezes por uma mesma cidade.

Permutações com Repetição

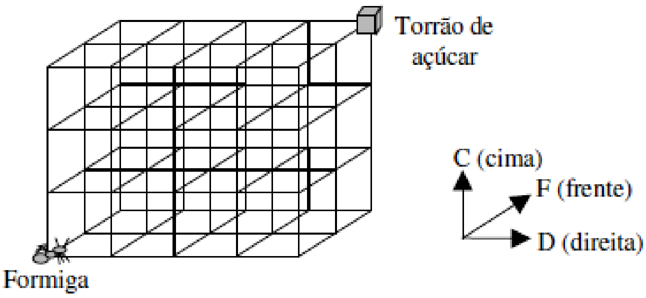
51. (IME/67) De quantas maneiras 3 rapazes e 2 moças podem ocupar 7 cadeiras em fila, de modo que as moças sentem juntas uma das outras, e os rapazes juntos uns dos outros.

52. (IME) É dado um tabuleiro quadrado 4x4. Deseja-se atingir o quadrado inferior direito a partir do quadrado superior esquerdo. Os movimentos permitidos são representados pelas setas:



De quantas maneiras isto é possível?

53. (Olimpíada Paulista/07) Uma formiga está em um canto de uma armação de varetas de dimensões 2, 3 e 4. No canto oposto ao da formiga, está um torrão de açúcar. Ela é esperta e só anda para frente, para cima ou para a direita.



a) Quantos caminhos distintos a formiga pode percorrer para chegar ao torrão?

b) Sejam *a*, *b* e *c* inteiros positivos. Prove que o número $\dfrac{(a+b+c)!}{a!b!c!}$ é inteiro.

54. Considere a equação $2x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{10} = 3$. Quantas soluções inteiras e não-negativas essa equação possui?

55. Quantas são as soluções inteiras não-negativas de
$x + y + z + w < 6$

56. Quantas são as soluções inteiras e não-negativas da equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 20$ onde exatamente três incógnitas são nulas?

57. Quantas soluções inteiras da equação $x+y+z+w=48$ existem, satisfazendo as condições $x>5,\ y>6,\ z>7$ e $w>8$?

58. Uma quantia de 20 mil dólares deve ser investida em quatro fundos de investimentos distintos. O valor investido em cada fundo deve ser sempre um múltiplo de mil dólares. Em dois dos fundos deve ser feito um investimento mínimo de 2 mil dólares, em outro fundo o investimento mínimo é de 3 mil dólares e no último fundo o investimento mínimo é de 4 mil dólares. De quantas maneiras podem ser investidos os 20 mil dólares se forem utilizados todos os fundos?
a) 220 b) 240 c) 260 d) 280 e) 300

59. Dez cães encontram 8 biscoitos. Em hipótese alguma eles compartilham um biscoito. De quantas maneiras os biscoitos podem ser consumidos se:
a) Assumimos que ambos são distinguíveis (cada biscoito é de um sabor, por exemplo)
b) Assumirmos que os cães são distinguíveis, mas os biscoitos não.

60. Dilermano deve pagar 2010 reais por um novo celular. Muito rico, ele possui uma quantidade ilimitada de notas de 2, 5 e 10 reais. Com quantas combinações diferentes de notas ele pode efetuar o pagamento?

61. Das soluções inteiras positivas de $x+y+z+w=26$, quantas satisfazem $x>y$?

62. Encontre o número de soluções da equação $x_1+x_2+x_3+x_4=48$, com coordenadas inteiras pares não-negativas.

63. Calcule o número de soluções inteiras com coordenadas maiores que – 4 da equação $x_1+x_2+x_3+x_4=1$.

64. Quantos são os números inteiros de 3 dígitos tais que a soma desses dígitos seja igual a 11?

65. (Olimpíada Mexicana) De quantas maneiras podemos encontrar 8 inteiros $a_1, a_2, ..., a_8$ tais que $1 \le a_1 \le a_2 \le ... \le a_8 \le 8$?

66. (IME/07) Considere o conjunto formado por m bolas pretas e n bolas brancas. Determine o número de seqüências simétricas que podem ser formadas utilizando-se todas as m + n bolas.
Observação: uma seqüência é dita simétrica quando ela possui a mesma ordem de cores ao ser percorrida da direita para a esquerda e da esquerda para a direita.

67. (Olimpíada Brasileira/Nível Universitário - adaptada) Jogamos 10 dados comuns (com 6 faces numeradas de 1 a 6). De quantas maneiras podemos obter uma soma dos resultados igual a 20?

68. (IME) Sejam *A* e *B* dois subconjuntos de N. Por definição, uma função $f: A \rightarrow B$ é crescente se $a_1 > a_2 \Rightarrow f(a_1) \geq f(a_2)$, para quaisquer a_1 e a_2 $\in A$.
a) Para *A* = {1, 2} e *B* = {1, 2, 3, 4}, quantas funções de *A* para *B* são crescentes?
b) Para *A* = {1, 2, 3} e *B* = {1, 2, ..., *n*}, quantas funções de *A* para *B* são crescentes, onde n é um número inteiro maior que zero?

69. (Olimpíada Brasileira) O tenista Berrando Gemigemi tem 30 dias para preparar-se para um torneio. Se ele treina 3 dias seguidos ele tem fadiga muscular. Ele, então, decide que, durante esses 30 dias, irá treinar 20 dias, sem nunca treinar 3 dias seguidos, e descansar nos outros 10 dias. De quantas maneiras diferentes ele pode escolher os 10 dias de descanso?

70. Quantas seqüências formadas por n A's e n B's possuem a propriedade de que, lidas da esquerda para a direita, o número de A's é sempre maior ou igual ao número de B's? (Pense em uma eleição que termina empatada, com contagem dos votos feita um a um, e onde o candidato A nunca é ultrapassado pelo candidato B)

71. Numa fila de cinema, m pessoas tem notas de 5 reais e n ($n < m$) pessoas tem notas de 10 reais. A entrada custa 5 reais.
a) Quantas são as filas que terão problemas de troco se a bilheteria começa a trabalhar sem troco?
b) Quantas são as filas que terão problemas de troco se a bilheteria começa a trabalhar com duas notas de 5?

Lemas de Kaplansky

72. (UFRJ/00) Uma estante de biblioteca tem 16 livros: 11 exemplares do livro "Combinatória é fácil" e 5 exemplares de "Combinatória não é difícil".
Considere que os livros com mesmo título sejam indistinguíveis.
Determine de quantas maneiras diferentes podemos dispor os 16 livros na estante de modo que dois exemplares de Combinatória não é difícil nunca estejam juntos.

73. (Olimpíada Mexicana) De quantas formas podem ser acomodadas em linha reta sete bolas brancas e cinco negras, de tal maneira que não existam duas bolas negras juntas?

74. Quantos são os anagramas da palavra "BÚLGARO" que não possuem duas vogais adjacentes?

75. Quantos são os anagramas da palavra "PARAGUAIO" que não possuem consoantes adjacentes?

76. Quantos são os anagramas da palavra MISSISSIPI que não possuem duas letras S consecutivas:

77. Considere um conjunto de n pessoas disposta em uma fila. De quantas formas é possível selecionar p entre elas, sem escolhermos pessoas que ocupem posições consecutivas na fila?

78. (IME) Considere uma turma com n alunos, numerados de 1 a n. Deseja-se organizar uma comissão de 3 alunos. De quantas maneiras pode ser formada esta comissão, de modo que não façam parte da mesma alunos designados por números consecutivos ?

79. (IME/85) Um exame vestibular se constitui de 10 provas distintas, 3 das quais da área de matemática. Determine de quantas formas é possível programar a seqüência das 10 provas de modo que as provas da área de Matemática não se sucedam.

80. Considere um conjunto de n objetos, dispostos em um círculo. De quantas maneiras é possível selecionar p dentre eles, sem escolher objetos que ocupem posições consecutivas?

81. (IME) 12 cavaleiros estão sentados em torno de uma mesa redonda. Cada um dos doze cavaleiros considera seus dois vizinhos como rivais. Deseja-se formar um grupo de 5 cavaleiros para libertar uma princesa. Nesse grupo não poderá haver cavaleiros rivais. Determine de quantas maneiras é possível escolher esse grupo.

82. Cinco pessoas devem se sentar em 15 cadeiras colocadas em torno de uma mesa circular. De quantos modos isso pode ser feito se não deve haver ocupação simultânea de duas cadeiras adjacentes?

83. (ITA) Considere (P) um polígono regular de n lados. Suponha que os vértices de (P) determinem 2n triângulos, cujos lados não são lados de (P). O valor de n é:
a) 6
b) 8
c) 10
d) 20
e) não existe um polígono regular com esta propriedade.

84. Considere um dodecágono convexo vértices P_1, P_2, P_3, ..., P_{12}. O número de polígonos convexos formados a partir destes vértices cujos lados não coincidam com os lados do próprio polígono dado é:
a) 270
b) 290
c) 320
d) 255
e) 245

Partições

85. De quantas maneiras 10 bolas *diferentes* podem ser divididos entre 4 caixas idênticas, se duas delas devem receber 2 bolas e as outras duas 3 bolas?

86. Uma sala de aula possui 30 alunos. Uma professora dispõe de 6 temas distintos para um trabalho, e deseja dividir a classe em 6 grupos de 5 estudantes cada um. Determine o número de divisões possíveis se:
a) cada grupo trabalhar com um tema diferente;
b) todos os grupos trabalharem com um mesmo tema, escolhidos dentre os 6 disponíveis.

87. (IME/07) Um grupo de nove pessoas, sendo duas delas irmãos, deverá formar três equipes, com respectivamente dois, três e quatro integrantes. Sabendo que os dois irmão não podem ficar na mesma equipe, o número de equipes que podem ser organizadas é:
a) 288 b) 455 c) 480 d) 910 e) 960

88. (ITA) Considere A um conjunto não vazio com um número finito de elementos. Dizemos que F = {A_1, A_2, ..., A_m}$\subset P(A)$ é uma partição de A se as seguintes condições são satisfeitas:
I. $A_i \neq \varnothing$, i = 1, 2,... , m
II. $A_i \cap A_j = \varnothing$, se i$\neq$j, para i,j = 1, 2,..., m
III. $A = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_m$
Dizemos ainda que: F é uma partição de ordem k se n (A_i) = k, i = 1, 2,..., m. Supondo n(A) = 8, determine:
a) As ordens possíveis para uma partição de A
b) O numero de partições de A que têm ordem 2.

89. O número 4 pode ser expresso pela soma de duas ou mais parcelas inteiras positivas (levando em conta a ordem das parcelas), nas seguintes maneiras:

$$\begin{aligned} 4 &= 1 + 3 = 3 + 1 \\ &= 2 + 2 = 1 + 1 + 2 = 1 + 2 + 1 \\ &= 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 \end{aligned}$$

Mostre que todo número natural n pode ser expresso, dessa forma, de $2^{n-1} - 1$ maneiras.

90. (IME/88) Considere um torneio de xadrez com 10 participantes. Na primeira rodada, cada participante joga somente uma vez, de modo que há 5 jogos realizados simultaneamente. De quantas formas essa primeira rodada pode ser realizada? (Supor que o jogo A B é diferente de BA, pois a primeira posição indica o jogador com as peças brancas, que inicia a partida)

91. (Olimpíada Britânica)
(i) Mostre que o número de maneiras de se dividir o conjunto {1, 2, ..., $2n$} em n conjuntos de 2 elementos é $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)$.
(ii) Numa festa comparecem cinco homens com suas respectivas esposas. De quantas maneiras essas pessoas podem ser divididas em 5 pares se em nenhum deles o marido pode ficar com sua esposa?

92. Mostrar que $2n$ objetos podem dividir-se em agrupamentos de n pares de $\frac{(2n)!}{2^n n!}$ maneiras diferentes.

93. (Olimpíada Paulista) Para n, k inteiros, seja $\left\{ {n \atop k} \right\}$ o número de maneiras de particionar um conjunto de n elementos em k subconjuntos disjuntos não vazios. Chamamos $\left\{ {n \atop k} \right\}$ de número de Stirling de segunda espécie.

Por exemplo, $\left\{ {4 \atop 2} \right\} = 7$ é o total de partições de {1, 2, 3, 4} em 2 subconjuntos não vazios, a saber:

{{1};{2, 3, 4}}, {{1, 2};{3, 4}}, {{1, 3};{2, 4}}, {{1, 4};{2, 3}}, {{1, 2, 3};{4}};
{{1, 2, 4},{3}}, {{1,3,4};{2}}

a) Calcule $\left\{ {5 \atop 4} \right\}$

b) Demonstre que, $n \geq k \geq 1$,

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} + k \left\{ {n-1 \atop k} \right\}$$

94. (Olimpíada Americana) Considere um conjunto S com 6 elementos. De quantas maneiras podemos selecionar dois (possivelmente idênticos) subconjuntos de S cuja união seja o próprio S?

95. Considere o número de pares não ordenados {A, B}, (isto é, os pares {A, B} e {B, A} são considerados iguais) de subconjuntos de um conjunto X de 10 elementos, que satisfaçam as seguintes condições:
a) $A \neq B$;
b) $A \cup B = X$

96. (Torneio Putnam) Determine, justificando, o número de triplas ordenadas (A_1, A_2, A_3) de conjuntos com as seguintes propriedades:
(i) $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
(ii) $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \varnothing$
onde $\varnothing$ é o conjunto vazio.

97. (Olimpíada Britânica) Adrian dá aula a uma turma composta por seis pares de gêmeos. Ele deseja organizar os alunos em grupos para uma atividade, mas não quer que nenhuma par de gêmeos caía no mesmo grupo. Sob essa condição:
a) de quantas maneiras ele pode dividir os alunos em dois grupos de seis?
b) de quantas maneiras ele pode dividir o grupo em três times de quatro?

Princípio da Inclusão-Exclusão

98. Quantos números inteiros, compreendidos entre 1 e 1000 inclusive, são divisíveis por 2, 3 ou 7?

99. (Olimpíada Americana) Quantos números inteiros menores do que ou iguais a 2001 são múltiplos de 3 ou 4, mas não de 5?
a) 768 b) 801 c) 934 d) 1067 e) 1167

100. Um professor forneceu os seguintes dados sobre seus alunos: “Na classe estudam 45 crianças, dos quais 25 são meninos. 30 alunos têm notas “boa” ou “muito boa”, entre eles 16 meninos. 28 alunos praticam esportes, havendo entre eles 18 meninos e 17 alunos com notas “boa” ou “muito boa”. 15 meninos têm notas “boa” ou “muito boa” e ao mesmo tempo praticam esportes”.
Mostre que existe uma incongruência nos dados fornecidos pelo professor.

101. De quantas maneiras podemos permutar as letras da palavra SAMUEL, de modo que a letra L esteja em primeiro lugar, ou a letra M em segundo lugar ou a letra U em ultimo lugar ?

102. Quantas são as permutações das letras da palavra PRÓPRIO nas quais não existem letras consecutivas iguais? (Considere Ó e O letras iguais)

103. De quantas maneiras podemos permutar 3 A’s, 3 B’s e 3 C’s de tal modo que 3 letras iguais nunca sejam adjacentes?

104. De quantas maneiras podemos permutar os inteiros 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 de formar que nenhum inteiro par fique em sua posição natural?

105. Quantas soluções inteiras não-negativas existem para a equação
$$x_1 + x_2 + x_3 = 17$$
com $x_1 \le 6$, $x_2 \le 7$ e $x_3 \le 8$?

106. Determine o número de soluções inteiras da equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$, onde o valor de cada incógnita pode variar entre – 3 e 3 inclusive.

107. (Olimpíada Brasileira) Um quadrado de lado 3 é dividido em 9 quadrados de lado unitário, formando um quadriculado. Cada quadrado unitário é pintado de azul ou vermelho. Cada cor tem probabilidade ½ de ser escolhida e a cor de cada quadrado é escolhida independente das demais. Qual a probabilidade de obtermos, após colorirmos todos os quadrados unitários, um quadrado de lado 2 pintado inteiramente de uma mesma cor?

108. (IME/08) Cinco equipes concorrem numa competição automobilística, em que cada equipe possui dois carros. Para a largada são formadas duas colunas de carros lado a lado, de tal forma que cada carro da coluna da direita tenha ao seu lado, na coluna da esquerda, um carro de outra equipe. Determine o número de formações possíveis para a largada

109. Seja $m, n \geq 0$, com $m \geq n$. Encontre o número de funções sobrejetoras do conjunto $A = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$ para o conjunto $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$.

Relações de Recorrência

110. (UFRJ/03) Uma reta divide o plano em 2 regiões; duas retas dividem-no em, no máximo, 4 regiões; três retas dividem-no em, no máximo, 7 regiões; e assim sucessivamente. Em quantas regiões, no máximo, 37 retas dividem o plano?

111. (UFRJ/09) Uma pessoa pode subir uma escada da seguinte forma: a cada degrau, ou ela passa ao degrau seguinte ou galga dois degraus de uma só vez, pulando um degrau intermediário. A exceção dessa regra ocorre se a pessoa estiver no penúltimo degrau, quando ela só tem a opção de passar ao último degrau.
Seja P_N o número de modos diferentes que a pessoa tem de subir uma escada de *N* degraus dessa maneira.
a) Calcule P_7.
b) Determine *N* tal que $P_N = 987$.

112. (Olimpíada Norueguesa) Quantas contas de banco de 11 dígitos existem usando apenas os dígitos 1 e 2, tais que não ocorram dois 1's consecutivos

113. Determine a relação de recorrência para o problema de contar o número de maneiras de estacionar motocicletas e carros em uma fila de n espaços se cada moto ocupa um espaço e cada carro ocupa dois espaços. (Todas as motos são idênticas em aparência, assim como os carros, e desejamos usar todos os n espaços)

114. (Olimpíada Búlgara) Encontre o número de subconjuntos não-vazios de {1, 2, ..., n} que não contém dois números consecutivos.

115. Usando as letras *A*, *B* e *C* podemos formar 3^n "palavras" de n letras. Quantas dessas palavras não possuem dois ou mais *A*'s adjacentes? (É suficiente montar a relação de recorrência).

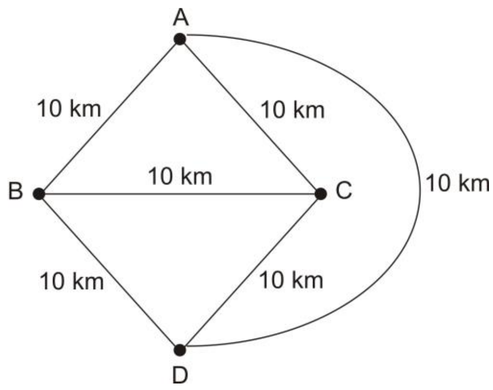
116. (Torneio de Hungria-Israel) Quantas seqüências distintas de tamanho 1997 podem ser formadas usando cada uma das letras A, B, C um número ímpar de vezes (e nenhuma outra)?

117. (Olimpíada Italiana) Dado um alfabeto composto apenas das letras a, b, c, encontre o número de palavras de n letras que contém um número par de a's.

118. (Olimpíada Chinesa) Seja a_n a quantidade de números inteiros positivos com dígitos 1, 3 e 4 apenas e cuja soma dos dígitos é igual a *n*. Determine uma relação de recorrência para a_n.

119. (Olimpíada Internacional/Shortlist) Quantas seqüências de comprimento n podem ser formados a partir do conjunto {0, 1, 2, 3, 4} se dígitos vizinhos diferem sempre de uma unidade?

120. (IME) Quatro cidades, A, B, C e D, são conectadas por estradas conforme a figura abaixo. Quantos percursos diferentes começam e terminam na cidade A, e possuem:



a) exatamente 50 km?
b) $n \times 10$ km?

121. (Olimpíada Brasileira) Os vértices de um decágono regular convexo ABC...J devem ser coloridos usando-se apenas as cores verde, amarela e azul. De quantos modos isso pode ser feito se vértices adjacentes não podem receber a mesma cor?

a) 1022 b) 1024 c) 1026 d) 1524 e) 1536

122. (Generalização do problema anterior) Em uma praça circular, há n casas idênticas. Um pintor dispõe de p cores diferentes para pintar as casas. De quantos modos isso pode ser feito se casas adjacentes não podem ter a mesma cor?

Permutações Especiais

123. O presidente p de um grêmio estudantil convida 7 membros da diretoria: a, b. c, d, e, f , g, para um almoço em uma mesa redonda. O presidente sabe que o membro a suporta b e c somente quando esses dois membros estão juntos; estando os membros separados, a não deve permanecer junto de nenhum deles. Determinar de quantas formas o presidente p pode tomar assento à mesa com seus colaboradores.

124. De quantas maneiras podemos dispor os números de 0 a 9, nos vértices de um decágono regular, de modo que o 0 e o 5 não fiquem diametralmente opostos ?

125. De quantos modos seis casais podem sentar-se em torno de uma mesa circular:
a) não sentando juntos dois homens?
b) não sentando juntos dois homens, mas cada homem sentando ao lado de sua esposa?
c) não sentando juntos dois homens e nem um homem com sua esposa?

126. De quantos modos 3 casais podem sentar-se ao redor de uma mesa circular de tal forma que marido e mulher não fiquem juntos?

127. Dispomos de seis cores diferentes. Cada face de um cubo será pintada com uma cor diferente, de forma que as seis cores sejam utilizadas. De quantas maneiras diferentes isso pode ser feito, se uma maneira é considerada idêntica a outra, desde que possa ser obtida a partir desta por rotação do cubo.

128. a) Considere um dado de quatro faces no formato de um tetraedro regular. Quantos dados diferentes podemos formar gravando os números de 1 a 4 sobre suas faces?
b) Resolva também o problema análogo, gravando os números de 1 a 8 sobre as faces de uma octaedro regular.

129. Quantos são os anagramas da palavra CORDA, onde as vogais *não* ocupam suas posições originais?

130. (Problema das permutações caóticas) Utilizando um raciocínio semelhante ao anterior, mostre que o número de anagramas da palavra CORDA em que nenhuma letra ocupa sua posição inicial é dado por

$$5!\left(\frac{1}{0!}-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}\right)$$

131. (EN) Quantos são os anagramas da palavra "ESCOLA" nos quais nenhuma letra ocupa o seu lugar primitivo?
a) 719 b) 265 c) 197 d) 100 e) 249

132. (Olimpíada Brasileira -adaptada) Na tabela abaixo, de quantas maneiras podemos inserir duas letras A, duas letras B, duas letras C e duas letras D de modo que não haja duas letras iguais na mesma linha nem na mesma coluna da tabela?

133. Quantas permutações dos números 1, 2, 3,..., 8 têm exatamente dois números em suas posições naturais?

134. Determine o número de permutações caóticas de (1, 2, 3,..., 10) nas quais os números 1, 2, 3, 4, 5 ocupam, em alguma ordem, os cinco primeiros lugares.

135. (Torneio Internacional de Caça-Talentos) Dizemos que um anagrama de uma palavra não tem letras fixadas se, ao colocarmos o anagrama diretamente abaixo da palavra original, nenhuma coluna tem letras repetidas. Por exemplo, se considerarmos a palavra TERESA, então o anagrama ESARET não tem letras fixadas, enquanto REASTE tem (a letra E na segunda posição).
Quantos anagramas sem letras fixadas tem a palavra TERESA (Os dois E's devem ser considerados idênticos)

136. Seja D_n o número e permutações caóticas de n elementos ($n > 2$). Prove que:
a) $D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$
b) $D_n - nD_{n-1} = (-1)^n$

GABARITO

01. 300

02. 63

03. D

04. 180

05. 171

06. a) 72

b) O número de divisores é produto dos expoentes dos fatores primos aumentados em uma unidade.

c) 3074

07. B

08. 656

09. 2048 caminhos

10. D

11. 2^{n-1} funções distintas com essa propriedade.

12. 196

13. 3314

14. 64

15. 2^{N-1}

16. C

17. 172

18. 288

19. a) 84; b) 336

20. C

21. A

22. 5760

23. 3.999.960

24. 20

25. 460.000

26. E

27. 96

28. 210

29. 210

30. 28800

31. 433755

32. D

33. a) $5!\cdot C_{8,3}\cdot C_{4,2}$

b) 24192

34. a) $15n^2$

b) $5n^2(7n-3)$

c) $5n^2(n-1)(n-2)$

d) $15n^4$

35. 1060

36. $1980\cdot 6!\cdot 7!\cdot 10!$

37. C

38. 1990

39. 450

40. $3\cdot C_{n,4}$

41. 70

42. a) 105 alunos;

b) 14 alunos

43. 55 voluntários e 10 integrantes em cada patrulha.

44. 37

45. 54912 (com ressalvas)

46. 57256

47. a) 70

b) 35

48. 981

49. 132

50. 1956

51. 144

52. 63

53. a) 1260

b) Demonstração

54. 174

55. 126

56. 3420

57. 1330

58. A

59. a) 10^8

b) 24310

60. 20503

61. 1078

62. 2925

63. 560

64. 66

65. 6435

66. Para *m* par e *n* ímpar: $\dfrac{(m+n-1)!}{\left(\dfrac{m}{2}\right)!\left(\dfrac{n-1}{2}\right)!}$

Para *m* ímpar e *n* par: $\dfrac{(m+n-1)!}{\left(\dfrac{m-1}{2}\right)!\left(\dfrac{n}{2}\right)!}$

Para *m* par e *n* par: $\dfrac{(m+n)!}{\left(\dfrac{m}{2}\right)!\left(\dfrac{n}{2}\right)!}$

67. 85228

68. a) 10

b) $\dfrac{n^3+3n^2+2n}{6}$

69. 66

70. $\dfrac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}$

71. a) $\dfrac{n}{m+1}\cdot(m+n)!$

b) $\dfrac{n(n-1)}{(m+2)(m+1)}\cdot(m+n)!$

72. 792

73. 56

74. 1440

75. 25200

76. 5460

77. $\binom{n-p+1}{p}$

78. $\binom{n-2}{3}$

79. 1.693.440

80. $\dfrac{n}{n-p}\binom{n-p}{p}$

81. 36

82. 45360

83. B

84. D

85. 1050

86. a) $\dfrac{30!}{(5!)^6}$

b) $6\cdot\dfrac{30!}{6!\,(5!)^6}$

87. D

88. a) Ordens 1, 2, 4 e 8

b) 105 partições

89. Demonstração

90. 30240

91. a) Demonstração

b) 544

92. Demonstração

93. a) 10

b) Demonstração

94. 365

95. $\dfrac{3^{10}-1}{2}$

96. 6^{10}

97. a) 32

b) 960

98. 714

99. B

100. Demonstração

101. 294

102. 246

103. 366

104. 133800

105. 15

106. 224

107. $P=\dfrac{95}{256}$

108. 2.088.960

109. $\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\cdot\binom{n}{n-k}(n-k)^m$

110. 704

111. a) 21

b) $N=15$

112. 233

113. $a_1=1$, $a_2=2$ e $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$, para $n>2$

114. $a_1=1$, $a_2=2$ e $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}+1$, para $n>2$

A solução é

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right)-1$$

115. $a_1=3$, $a_2=8$ e $a_n=2a_{n-1}+2a_{n-2}$,

para $n>2$

116. $a_{1997}=\dfrac{1}{4}(3^{1997}-3)$

117. $a_n=\dfrac{3^n+1}{2}$

118. $a_1=1, a_2=1, a_3=2, a_4=4$ e

$a_n=a_{n-1}+a_{n-3}+a_{n-4}$, para $n>4$

119. $a_1=5$ e $\begin{cases} a_{2n}=8\cdot 3^{n-1} \\ a_{2n+1}=14\cdot 3^{n-1}\end{cases}$, para $n>1$

120. a) 60

b) $a_n=\dfrac{3}{4}[3^{n-1}+(-1)^n]$

121. C

122. $a_n=(p-1)^n+(p-1)\cdot(-1)^n$

123. 2880

124. $8\cdot 8!$

125. a) $5!\cdot 6!$

b) $2\cdot 5!$

c) $80\cdot 5!$

126. 32

127. 30

128. a) 2;

b) 1680

129. 78

130. Demonstração

131. B

132. 216

133. 7420

134. 1936

135. 84

136. a) Demonstração

b) Demonstração