



Lista de Análise Combinatória.

Combinações e Permutações

- 1) O conjunto A possui 4 elementos e o conjunto B possui 7 elementos. Quantas são as funções $f: A \rightarrow B$? Quantas são as funções injetoras de $f: A \rightarrow B$?
- 2) Quantos divisores naturais possui o número 360? Quantos são pares?
- 3) De quantos modos podemos escolher 6 pessoas, incluindo pelo menos duas mulheres, em um grupo de 7 homens e 4 mulheres?
- 4) Sejam $I_m = \{1, 2, \dots, m\}$ e $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$ com $m \leq n$. Quantas são as funções $f: I_m \rightarrow I_n$ estritamente crescentes?
- 5) Quantas diagonais possui um polígono de n lados?
- 6) Prove que um produto de p inteiros consecutivos é sempre divisível por $p!$.
- 7) De quantos modos 5 mulheres e 6 homens podem formar uma roda de ciranda de modo que as mulheres permaneçam juntas?
- 8) Uma partícula estando no ponto (x, y) pode mover-se para o ponto $(x+1, y)$ ou para o ponto $(x, y+1)$. Quantos são os caminhos que a partícula pode tomar para, partindo de $(0, 0)$ chegar ao ponto (a, b) , $a > 0$ e $b > 0$?
- 9) Quantas são as soluções inteiras e não negativas de $x + y + z = 20$?
- 10) Quantas são as soluções inteiras da equação $x + y + z = 20$ com $x \geq 2$, $y \geq 2$, $z \geq 2$?
- 11) Quantas são as soluções inteiras e não-negativas da inequação $x + y + z \leq 5$?
- 12) De quantas maneiras é possível colocar 6 anéis diferentes em 4 dedos?



Interessantes

- 1) Quantos são os anagramas da palavra CAPITULO que têm C em 1o lugar, ou A em 2o lugar ou P em 3o lugar, ou I em 4o lugar?
- 2) Quantas espécies de polígonos regulares de 100 lados existem?
- 3) Quantos inteiros entre 1 e 1000 000 não são nem quadrados perfeitos nem cubos perfeitos?
- 4) Suponha $\#A = n$. Quantas são as funções $f: A \rightarrow A$ para as quais a equação $f(x) = x$ não possui solução? Quantas são as funções $f: A \rightarrow A$ bijetoras para as quais a equação $f(x) = x$ não possui solução?
- 5) Dois médicos devem examinar, durante uma mesma hora, 6 pacientes, gastando 10 minutos em cada paciente. Cada um dos 6 pacientes deve ser examinado pelos dois médicos. De quantos modos pode ser feito um horário compatível?
- 6) Quantos são os anagramas da palavra MISSISSIPPI nos quais não há duas letras S consecutivas?
- 7) 5 pessoas devem se sentar em 15 cadeiras colocadas em torno de uma mesa circular. De quantos modos isso pode ser feito se não deve haver ocupação simultânea de duas cadeiras adjacentes?
- 8) Um grupo de 15 pessoas se reúne pra estudar uma lista de exercícios numa mesa redonda de 15 lugares. Porém, só há 6 cópias da lista. Uma pessoa enxerga a lista se ela estiver logo a sua frente ou logo a frente de uma pessoa imediatamente ao seu lado. Quantas configurações tornam o estudo possível?
- 9) Uma partícula estando no ponto (x,y) pode se movimentar para o ponto $(x+1,y+1)$ ou para o ponto $(x+1, y-1)$.
 - a) Quantos são os trajetos possíveis da partícula de $(0,0)$ a $(8,6)$
 - b) Quantos são os trajetos de $(0,0)$ a $(10,4)$?
 - c) Quantos desses trajetos tocam na reta $y=-1$?
- 10) Numa fila de cinema, m pessoas tem notas de 5 reais e n ($n < m$) pessoas tem notas de 10 reais. A entrada custa 5 reais.
 - a) Quantas são as filas possíveis?
 - b) Quantas são as filas que terão problemas de troco se a bilheteria começa a trabalhar sem troco?
 - c) Quantas são as filas que terão problemas de troco se a bilheteria começa a trabalhar com duas notas de 5?



Contagem

- 1) Escolha, dentre os elementos do conjunto $\{1, 2, \dots, 200\}$ 101 números ao acaso. Mostre que entre os números escolhidos, há dois números tais que um deles divide o outro.
- 2) Escolhem-se 5 pontos ao acaso sobre a superfície de um quadrado de lado 2. Mostre que pelo menos um dos segmentos que eles determinam tem comprimento menor ou igual a $\sqrt{2}$.
- 3) Mostre que no conjunto de todas as pessoas do Orkut há 2 pessoas que conhecem exatamente o mesmo número de pessoas (OBS: se a conhece b, então b conhece a)
- 4) Um ponto (x, y, z) do $\mathbb{R}^3$ é inteiro se todas as suas coordenadas são inteiras.
 - a) Considere um conjunto de nove pontos inteiros do $\mathbb{R}^3$. Mostre que o ponto médio de algum dos segmentos que ligam esses pontos é inteiro.
 - b) Dê um exemplo de um conjunto de 8 pontos inteiros do $\mathbb{R}^3$ tais que nenhum dos pontos médios dos segmentos que ligam esses pontos é inteiro.
- 5) Um mestre de xadrez, preparando-se para um torneio, joga, durante 11 semanas, pelo menos uma partida por dia mas não mais que 12 partidas por semana. Prove que existe um conjunto de dias consecutivos durante os quais ele joga exatamente 20 partidas.



Triângulo de Pascal

notação: $C(n,p)$ = combinação de n elementos tomados p a p .

1) Calcule o valor da soma:

$$S = C(n,1) + 2.C(n,2) + 3.C(n,3) + \dots + n.C(n,n)$$

2) Qual é o valor da soma:

$$S = 1.2.3 + 2.3.4 + \dots + 50.51.52?$$

3) Qual é o valor das somas:

a) $1^2 + 2^2 + \dots + n^2$

b) $1^3 + 2^3 + \dots + n^3$

c) $2.1^2 + 5.2^2 + 8.3^2 + \dots + (3n-1).n^2$

d) Somatório de $(k+1).C(n,k)$ k de 0 a n

e) Somatório de $k^2.C(n,k)$ k de 0 a n

f) Somatório de $k.(2k+1)$ k de 1 a n

g) Somatório de $(2k-1)^2.(k+2)$ k de 1 a n

4) Prove a formula de Euler:

$$C(m,0).C(n,p) + C(m,1).C(n,p-1) + \dots + C(m,p).C(n,0) = C(m+n,p)$$

5) Prove a partir da questão 4 , a Formula de Lagrange

$$[C(n,0)]^2 + [C(n,1)]^2 + \dots + [C(n,n)]^2 = C(2n,n)$$

6) Determine p para que $C(10,p)$ seja máximo

7) Resolva $C(41,p) = C(41,2p-1)$

8) Determine o termo máximo do desenvolvimento de $(1 + (1/3))^{65}$

9) Qual é a soma dos coeficientes do desenvolvimento de $(x^3 - 2x^2)^{15}$?

10) Calcule a soma:

$$C(n,0) + C(n,1)/2 + C(n,2)/3 + \dots + C(n,n)/(n+1)$$

11) Qual é maior a ou b ?

$$a = 101^{50}, b = 100^{50} + 99^{50}$$

12) Prove que $47^{47} + 77^{777}$ é divisível por 4.

13) Determine o coeficiente de x^4 no desenvolvimento de $(x^2 - x + 2)^6$



Permutação Caótica

- 1) quantas são as permutações de $(1,2,3,4,5,6,7)$ que têm exatamente 3 elementos no seu lugar primitivo?
- 2) De quantos modos é possível colocar 8 torres brancas em um tabuleiro de xadrez 8×8 de modo que nenhuma torre fique na diagonal branca e não haja duas torres na mesma linha ou na mesma coluna?
- 3) Prove que se $n \geq 3$, $P_n = (n-1)(P_{n-1} + P_{n-2})$
- 4) Quantas são as permutações de $(1,2,\dots,2n)$ nas quais nenhum número ímpar ocupa seu lugar primitivo?

CRÉDITOS: Todas as questões são retiradas do meu caderno do Professor Morgado e do livro dele: *Análise Combinatória e Probabilidade* autores: Augusto César de Oliveira Morgado, João Bosco Pitombeira de Carvalho, Paulo César Pinto Carvalho, Pedro Fernandes

Coleção do professor de matemática (Sociedade brasileira de matemática)

Discussão das questões em:

<http://www.orkut.com/CommMsgs.aspx?cmm=1299345&tid=2563770445473883724&na=4>

This document was created with Win2PDF available at <http://www.daneprairie.com>.
The unregistered version of Win2PDF is for evaluation or non-commercial use only.