

ANÁLISE COMBINATÓRIA – LISTA 1

NIVEL I

1. O sistema de segurança de uma casa utiliza um teclado numérico, conforme ilustrado na figura. Um ladrão observa de longe e percebe que:

- a senha utilizada possui 4 dígitos;
- o primeiro e o último dígitos encontram-se numa mesma linha;
- o segundo e o terceiro dígitos encontram-se na linha imediatamente superior.

Calcule o número de senhas que deverão ser experimentadas pelo ladrão para que com certeza ele consiga entrar na casa.

TECLADO NUMÉRICO

1	2	3
4	5	6
7	8	9
	0	

2. Quantos são os números naturais pares que se escrevem (na base 10) com três algarismos distintos?

3. Quantos divisores naturais possui o número 360? Quantos são pares?

4. Quantos subconjuntos possui um conjunto que tem n elementos?

5. De um baralho comum (52 cartas) sacam-se sucessivamente e sem repetição três cartas. Quantas são as extrações nas quais a primeira carta é de copas, a segunda é um rei e a terceira não é uma dama?

6. De quantos modos 5 rapazes e 5 moças podem se sentar em 5 bancos de dois lugares cada, de modo que em cada banco fiquem um rapaz e uma moça?

7. De quantos modos podemos dividir 8 pessoas em dois grupos de 4 pessoas cada?

8. Permutam-se de todos os modos possíveis ao algarismos 1, 2, 4, 6, 7 e escrevem-se os números assim formados em ordem crescente.

- a) que lugar ocupa o número 62417?
- b) qual o número que ocupa o 66º lugar?
- c) qual o 200º algarismo escrito?
- d) qual a soma dos números assim formados?

9. De quantos modos é possível sentar 7 pessoas em cadeiras em fila de modo que duas determinadas pessoas dessas 7 não fiquem juntas?

10. Se A é um conjunto com n elementos, quantas são as funções $f: A \rightarrow A$ bijetoras?

11. De quantos modos é possível colocar em uma prateleira 5 livros de Matemática, 3 de Física e 2 de Estatística, de modo que livros de um mesmo assunto permaneçam juntos?

12. Quantas são as permutações dos números (1, 2, ..., 10) nas quais o 5 está situado à direita do 2 e à esquerda do 3, embora não necessariamente em lugares consecutivos?

13. De quantos modos podemos dividir 12 pessoas:

- a) em dois grupos de 6?
- b) em três grupos de 4?
- c) em um grupo de 5 e um grupo de 7?
- d) em seis grupos de 2?
- e) em dois grupos de 4 e dois grupos de 2?

14. Quantas são as permutações simples dos números 1, 2, ..., n nas quais o elemento que ocupa a k -ésima posição é inferior a $k + 4$, para todo k ?

15. Quantas são as permutações simples dos números 1, 2, ..., n nas quais o elemento que ocupa a k -ésima posição é maior que $k - 3$, para todo k ?

16. O conjunto A possui 4 elementos e o conjunto B 7 elementos. Quantas são as funções $f: A \rightarrow B$? Quantas são as funções injetoras $f: A \rightarrow B$?

17. Quantos números de seis algarismos distintos podemos formar usando os dígitos 1, 2, 3, 4, 5 e 6, nos quais o 1 e o 2 nunca ocupam posições adjacentes, mas o 3 e o 4 sempre ocupam posições adjacentes?

18. Considere os números de 2 a 6 algarismos distintos formados utilizando-se apenas 1, 2, 4, 5, 7 e 8. Quantos destes números são ímpares e começam com um dígito par?

19. Em uma sala estão 6 rapazes e 5 moças. Quantas comissões podemos formar, tendo em cada comissão 3 rapazes e 2 moças?

20. Um químico possui dez tipos de substância. De quantos modos possíveis poderá misturar seis dessas substâncias se, dentre as dez, duas somente não podem ser juntadas porque produzem mistura explosiva?

21. Tem-se 5 pontos sobre uma reta R e 8 pontos sobre uma reta s paralela a R . Quantos quadriláteros convexos com vértices em 4 desses 13 pontos existem?

22. Em um torneio no qual cada participante enfrenta todos os demais uma única vez, são jogadas 780 partidas. Quantos são os participantes?

23. Sejam $I_m = \{1, 2, \dots, m\}$ e $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$, com $m \leq n$. Quantas são as funções $f: I_m \rightarrow I_n$ estritamente crescentes?

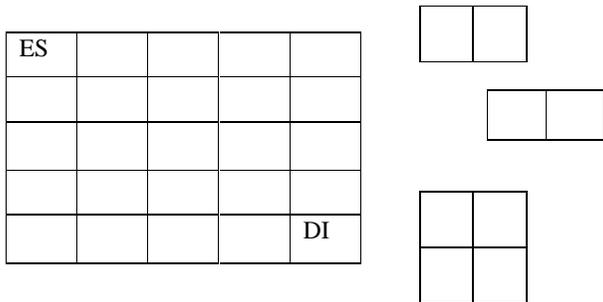
24. Uma classe de Educação Física de um colégio é formada por dez estudantes, todos com alturas diferentes. As alturas dos estudantes, em ordem crescente, serão designadas por h_1, h_2, \dots, h_{10} ($h_1 < h_2 < \dots < h_9 < h_{10}$). O professor vai escolher cinco desses estudantes para participar de uma demonstração na qual eles se apresentarão alinhados, em ordem crescente de suas alturas. Dos 252, pois $C_{10, 5} = 252$, grupos que podem ser escolhidos, em quantos, o estudante, cuja altura é h_7 , ocupará o posição central durante a demonstração?

25. Uma locadora de automóveis tem à disposição de seus clientes uma frota de dezesseis carros nacionais e quatro carros importados. De quantas formas uma empresa poderá alugar três carros de modo que:

- a) todos sejam nacionais;
- b) pelo menos um carro nacional seja escolhido.

NÍVEL II

1. Em um tabuleiro quadrado, de 5×5 , mostrado na figura, deseja-se ir do quadrado esquerdo superior (ES) ao quadrado direito inferior (DI). Somente são permitidos os movimentos horizontais (H), verticais (V) e diagonal (D), conforme ilustrado na figura.



Com base nessa situação, julgue os itens que se seguem.

- (0) Se forem utilizados somente movimentos horizontais e verticais, então o número de percursos possíveis será igual a 70.
 (1) Se forem utilizados movimentos horizontais e verticais e apenas um movimento diagonal, o número de percursos possíveis será igual a 140.
 (2) Utilizando movimentos horizontais, verticais e três movimentos diagonais, o número de percursos possíveis será igual a 10.
2. De quantas maneiras se pode escolher 3 números distintos do conjunto $A = \{1, 2, 3, \dots, 50\}$ de modo que sua soma seja um múltiplo de 3?
3. De quantas maneiras se pode escolher 3 números naturais distintos de 1 a 30, de modo que a soma dos números escolhidos seja par?
4. Dado $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, de quantos modos é possível formar subconjuntos de 2 elementos nos quais não haja números consecutivos?
5. Consideremos um tabuleiro quadrado composto de 64 casa:
 a) De quantos modos podemos colocar 8 torres iguais, de modo que haja uma única torre em cada linha e em cada coluna?
 b) De quantos modos podemos colocar 8 torres diferentes, de modo que haja uma única torre em cada linha e em cada coluna?

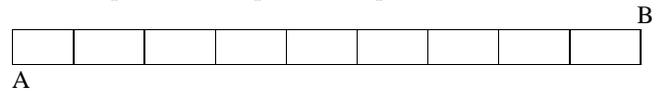
GABARITO

NÍVEL I

1. 171
 2. 328
 3. 24; 18
 4. 2^n
 5. 2350
 6. 460800
 7. 35
 8. a) 81°
 b) 46721
 c) 1
 d) 5333280
 9. 3600
 10. $n!$
 11. 8640
 12. 604800
 13. a) 462
 b) 5775
 c) 792
 d) 10395
 e) 51975
 14. $6 \cdot 4^{n-3}$
 15. $2 \cdot 3^{n-2}$
 16. 2401; 8400
 17. 144
 18. 585
 19. 200
 20. 140
 21. 280
 22. 40
 23. $C_{n,m}$
 24. 45
 25. a) 560
 b) 1136

6. Um baralho tem 52 cartas. De quantos modos diferentes podemos distribuí-las entre 4 jogadores de modo que cada um receba 13 cartas?
 7. Temos 52 mudas diferentes plantadas em pequenos vasos. De quantos modos diferentes podemos coloca-los em 4 caixas iguais, de modo que cada caixa contenha exatamente 13 mudas?

8. Considere o esquema de ruas que nos levam do ponto A ao ponto B. De quantas maneiras podemos ir de A até B, se é permitido caminhar para a direita, para cima e para baixo?



9. Quantos números podem ser formados pela multiplicação de alguns ou todos os números 2,2,3,3,3,5,5,6,8,9,9?
10. De quantas maneiras podemos arrumar em fila 5 sinais (-) e 7 sinais (/)?
11. De quantas maneiras podemos arrumar em fila 5 sinais (-) e 7 sinais (/), de modo que não haja dois sinais (-) juntos?
12. Quantos são os anagramas da palavra MISSISSIPPI nos quais não há 2 letras I consecutivas?
13. Quantos são os anagramas da palavra TAQUARA que não possui 2 letras A juntas?
14. Um aposentado realiza diariamente, de segunda a sexta-feira, estas cinco atividades:
 A. Leva seu neto Pedrinho, às 13 horas, para a escola.
 B. Pedala 20 minutos na bicicleta ergométrica.
 C. Passeia com o cachorro da família.
 D. Pega seu neto Pedrinho, às 17 horas, na escola.
 E. Rega as plantas do jardim de sua casa.
 Cansado, porém, de fazer essas atividades sempre na mesma ordem, ele resolveu que, a cada dia, vai realizá-las em uma ordem diferente. Nesse caso, qual o número de maneiras possíveis de ele realizar essas cinco atividades em ordem diferente?
15. Quantas soluções inteiras e não-negativas possui a equação $x + y + z + w = 11$? Dessas, quantas são inteiras e positivas?

NÍVEL II

1. 0 e 1 corretos; 2 incorreto
 2. 6544
 3. 2030
 4. 6
 5. a) 8!
 b) $(8!)^2$
 6. $52!/(13!)^4$
 7. $52!/(13!)^4 \cdot 4!$
 8. 512
 9. 432
 10. 792
 11. 56
 12. 7350
 13. 240
 14. 60
 15. 364; 120