

ANÁLISE COMBINATÓRIA - ITA

Princípios Fundamentais.....	Pag.01
Permutações.....	Pag.04
Combinações.....	Pag.07
Permutações com Repetição.....	Pag.11

Princípios Fundamentais

01. Determine o número de maneiras de um professor distribuir 6 livros distintos entre 9 estudantes, se:

- a) não houver restrição alguma;
b) nenhum estudante puder receber mais de um livro.

02. Quantos números naturais de 10 algarismos existem, compostos só por 1, 2 e 3, em que cada dois algarismos vizinhos diferem de uma unidade?

- a) 16 b) 32 c) 64 d) 80 e) 100

03. Você sabe que existem 9 números de um algarismo, 90 números de dois algarismos, 900 números de três algarismos, etc. Considere agora cada número cujo último algarismo à direita representa o número de algarismos desse número. Por exemplo, o número 12305 é um deles, pois 5 é o número de seus algarismos. Quantos números desse tipo existem?

04. Observe o padrão a seguir:

1234567891011121314151617181920212223...

Determine o 3005º termo dessa sequência.

05. (ITA/93) Possuo 3 vasos idênticos e desejo ornamentá-los com 18 rosas, sendo 10 vermelhas e 8 amarelas. Desejo que um dos vasos tenha 7 rosas e os outros dois no mínimo 5. Cada um deverá ter 2 rosas vermelhas e 1 amarela, pelo menos. Quantos arranjos distintos poderei fazer usando as 18 rosas?

- a) 10 b) 11 c) 12 d) 13 e) 14

06. (ITA/87) Quantos números de 3 algarismos distintos podemos formar, empregando os caracteres 1, 3, 5, 6, 8 e 9?

- a) 60 b) 120 c) 240 d) 40 e) 80

07. (ITA/01) Considere os números de 2 a 6 algarismos distintos formados utilizando-se apenas 1, 2, 4, 5, 7 e 8. Quantos destes números são ímpares e começam com um dígito par?

- a) 375 b) 465 c) 545 d) 585 e) 625

08. (ITA/07) Determine quantos números de 3 algarismos formados com 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7, satisfazendo à seguinte regra: O número não pode ter algarismos repetidos, exceto quando iniciar com 1 ou 2, caso em que o 7 (e apenas o 7) pode aparecer mais de uma vez. Assinale o resultado obtido.

- a) 204 b) 206 c) 208 d) 210 e) 212



- 09.** Quantas sequências de cinco algarismos existem que possuem os dígitos 1, 2 e 7 aparecendo ao menos uma vez?
- 10. (ITA)** Com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6, quantos números naturais de quatro algarismos distintos, contendo o algarismo “4” ou o algarismo “5” podem ser formados?
- a) 196 b) 286 c) 340 d) 336 e) nda
- 11. (Olimpíada Americana)** Quantos números de 4 dígitos, iniciados pelo dígito 1, tem exatamente dois dígitos idênticos (como os números 1447, 1005 e 1231, por exemplo)?
- 12. (EN/84)** Considere todos os números inteiros, formados a partir do conjunto $\{1, 2, 3, \dots, 9\}$ com 4 algarismos distintos. Quantos, destes números, têm a soma de seus algarismos par?
- a) 384 b) 1104 c) 1584 d) 5904 e) 3024
- 13. (ITA/76)** No sistema decimal quantos números de cinco algarismos (sem repetição) podemos escrever de modo que os algarismos 0, 2 e 4 apareçam agrupados?
- a) $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$
 b) $2^5 \cdot 3 \cdot 7$
 c) $2^4 \cdot 3^3$
 d) $2^5 \cdot 3^2$
 e) nda
- 14. (ITA/81)** Se $p_1, p_2, \dots, p_n$ forem os fatores primos de um número inteiro positivo p e se $p = (p_1)^{s_1} \cdot (p_2)^{s_2} \cdot \dots \cdot (p_n)^{s_n}$, então o número de divisores positivos de p será:
- a) $s_1 + s_2 + \dots + s_n$
 b) $s_1 \cdot s_2 \cdot s_3 \cdot \dots \cdot s_n$
 c) $s_1 \cdot s_2 \cdot s_3 \cdot \dots \cdot s_n - 1$
 d) $(s_1 + 1)(s_2 + 1)(s_3 + 1) \cdot \dots \cdot (s_n + 1) - 1$
 e) $(s_1 + 1)(s_2 + 1)(s_3 + 1) \cdot \dots \cdot (s_n + 1)$
- 15. (ITA/03)** O número de divisores de 17640 que, por sua vez, são divisíveis por 3 é:
- a) 24 b) 36 c) 48 d) 54 e) 72
- 16. (MACK/01)** Dado o número natural $n = 2^8 \cdot 3^2 \cdot 5^4$, os divisores positivos de n , que são múltiplos de 225, são em número de:
- a) 36 b) 32 c) 28 d) 25 e) 27
- 17. (ITA-adaptado)** Sejam A um conjunto finito com m elementos e $I_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$. Qual é o número de todas as funções definidas em I_n (domínio) com valores em A (contradomínio)?



18. Considere que três números reais distintos formam um *conjunto aritmético* se um dos números for a média dos outros dois. Considere o conjunto $A_n = \{1, 2, \dots, n\}$, em que n é um inteiro positivo, $n \geq 3$.

a) Quantos são os conjuntos aritméticos formados a partir de A_{10} ?

b) Determine o menor n , tal que o número de conjuntos aritméticos em A_n é maior que 2004.

19. Quantas são as permutações simples dos números $1, 2, \dots, n$ nas quais o elemento que ocupa a k -ésima posição é inferior a $k + 4$, para todo k ?

20. No quadro abaixo, de quantos modos é possível formar a palavra “MATEMÁTICA”, partindo de um M e indo sempre para a direita ou para baixo?

										M
									M	A
								M	A	T
						M	A	T	E	
			M	A	T	E	M			
		M	A	T	E	M	A			
	M	A	T	E	M	A	T			
		M	A	T	E	M	A	T	I	
M	A	T	E	M	A	T	I	C		
M	A	T	E	M	A	T	I	C	A	

21. (UFRJ/07) Um sítio da internet gera uma senha de 6 caracteres para cada usuário, alternando letras e algarismos. A senha é gerada de acordo com as seguintes regras:

- não há repetição de caracteres;
- começa-se sempre por uma letra;
- o algarismo que segue uma vogal corresponde a um número primo;
- o algarismo que segue uma consoante corresponde a um número par;

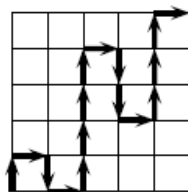
Quantas senhas distintas podem ser geradas de forma que as três letras sejam A, M e R em qualquer ordem?

22. (Unifesp/07 - adaptado) Em uma cidade existem 1000 bicicletas, cada uma com um número de licença, de 1 a 1000. Duas bicicletas nunca têm o mesmo número de licença.

a) Entre as licenças de três algarismos, de 100 a 999, em quantas delas o valor absoluto da diferença entre o primeiro algarismo e o último é igual a 2?

b) Quantas são as licenças, encontrada entre as mil, que não têm nenhum 8 entre seus algarismos?

23. De quantas maneiras podemos ir de A até B sobre a seguinte grade sem passar duas vezes pelo mesmo local e sem mover-se para a esquerda? A figura abaixo mostra um caminho possível.



24. (Fepecs/08) Considere a equação $2n + 3m = 4p$, na qual m, n e p são naturais tais que $1 \leq m \leq 40$, $1 \leq n \leq 40$. O número de soluções da equação é igual a:

- a) 360 b) 400 c) 440 d) 480 e) 520

25. Dispomos de cinco cores distintas. De quantos modos podemos colorir os quatro quadrantes de um círculo, cada quadrante com uma só cor, se quadrantes cuja fronteira é uma linha não podem receber a mesma cor?

26. (Olimpíada Americana) O odômetro de um carro tem um problema que o faz pular do dígito 3 direto para o dígito 5, sempre saltando o dígito 4, independente da sua posição. Por exemplo, ao percorrer um quilômetro o odômetro mudou sua marcação de 000039 para 000050. Se o odômetro estiver marcando nesse momento 002005, quantos quilômetro foram realmente percorridos até agora?

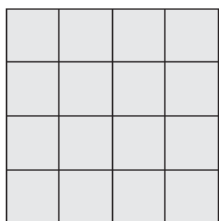
- a) 1404 b) 1462 c) 1604 d) 1605 e) 1804

27. (Olimpíada Paulista/05) Sete pessoas estão esperando, em fila, para entrar em uma sala onde sentarão em sete cadeiras arrumadas em linha, uma do lado da outra. As pessoas entrarão e, enquanto for possível, irão sentar-se isoladas, isto é, em uma cadeira cujas cadeiras vizinhas (à esquerda e à direita ou só de um dos lados caso seja uma cadeira de uma das pontas) estejam ambas vazias. De quantas maneiras distintas as pessoas podem se distribuir pelas cadeiras?

Dica: considere em separado o caso em que a quarta pessoa a entrar na sala encontra uma cadeira isolada para sentar-se e os casos em que ela não encontra.

Permutações

28. De quantos modos podemos sombrear quatro casas do tabuleiro abaixo, de modo que em cada linha e em cada coluna exista uma única casa sombreada?



29. (EN/00) Um aspirante ganhou, em uma competição na Escola Naval, quatro livros diferentes de Matemática, três livros diferentes de Física e dois livros diferentes de Português. Querendo manter juntos aqueles da mesma disciplina, concluiu que poderia enfileirá-los numa prateleira de sua estante, de diversos modos. A quantidade de modos com que poderá fazê-lo é:

- a) 48 b) 72 c) 192 d) 864 e) 1728

30. (ITA/98) O número de anagramas da palavra VESTIBULANDO, que não apresentam as cinco vogais juntas, é:

- a) $12!$ b) $8!.5!$ c) $12! - 8!.5!$ d) $12! - 8!$ e) $12! - 7!.5!$



- 31. (ITA/99)** Listando-se em ordem crescente todos os números de cinco algarismos distintos, formados com os elementos do conjunto $\{1, 2, 4, 6, 7\}$, o número 62417 ocupa o n -ésimo lugar. Então n é igual a:
- a) 74 b) 75 c) 79 d) 81 e) 92
- 32.** Permutam-se de todos os modos possíveis os algarismos 1, 2, 4, 6, 7 e escrevem-se os números assim formados em ordem crescente.
- a) qual o número que ocupa o 66º lugar?
 b) qual a soma dos números assim formados?
- 33.** Um grupo de 7 meninos e 3 meninas deve ser colocado em fila. De quantas maneiras isso pode ser feito se
- a) as três meninas devem permanecer juntas?
 b) as extremidades da fila devem ser ocupadas por meninos e não deve haver meninas adjacentes?
- 34.** Um vagão de metrô tem 10 bancos individuais, sendo 5 de frente e 5 de costas. De 10 passageiros, 4 preferem sentar de frente, 3 preferem sentar de costas e os demais não tem preferência. De quantos modos os passageiros podem se sentar, respeitando-se as preferências?
- 35. (Olimpíada Brasileira)** Cinco amigos, Arnaldo, Bernaldo, Cernaldo, Dernaldo e Ernaldo, devem formar uma fila com outras 30 pessoas. De quantas maneiras podemos formar esta fila de modo que Arnaldo fique na frente de seus 4 amigos? (Obs: Os amigos não precisam ficar em posições consecutivas)
- a) $35!$ b) $\frac{35!}{5!}$ c) $\frac{35!}{5}$ d) $\left(\frac{35}{5}\right)5!$ e) $e^{\pi\sqrt{163}}$
- 36. (ITA/00)** Quantos números de seis algarismos distintos podemos formar usando os dígitos 1, 2, 3, 4, 5 e 6, nos quais o 1 e o 2 nunca ocupam posições adjacentes, mas o 3 e o 4 sempre ocupam posições adjacentes?
- a) 144 b) 180 c) 240 d) 288 e) 360
- 37.** Delegados de 10 países devem sentar-se em 10 cadeiras em fila. De quantos modos isso pode ser feito se os delegados do Brasil e de Portugal devem sentar juntos e do Iraque e dos Estados Unidos não podem sentar juntos?
- 38.** Determine o número de permutações de $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$ nas quais nem o 4 ocupa o 4º lugar nem o 6 ocupa o 6º lugar.
- 39. (Olimpíada Brasileira)** Uma sequência de letras, com ou sem sentido, é dita alternada quando é formada alternadamente por consoantes e vogais. Por exemplo, EZEQAF, MATEMÁTICA, LEGAL e ANIMADA são palavras alternadas, mas DSOIUF, DINHEIRO e ORDINÁRIO não são. Quantos anagramas da palavra FELICIDADE (incluindo a própria palavra FELICIDADE) são sequências alternadas?
- 40.** Quantas permutações de 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 possuem:
- 1 aparecendo em alguma posição à esquerda do 2 (não necessariamente em posições consecutivas);
 - 3 aparecendo em alguma posição à esquerda do 4 (idem);
 - 5 aparecendo em alguma posição à esquerda do 6 (idem)?
- Por exemplo, 8 1 5 7 2 3 9 4 6 é uma permutação deste tipo.
- a) $9 \cdot 7!$ b) $8!$ c) $5! \cdot 4!$ d) $8! \cdot 4!$ e) $8! + 6! + 4!$



41. Quantas são as permutações dos números $(1, 2, \dots, 10)$ nas quais o 5 está situado à direita do 2 e à esquerda do 3, embora não necessariamente em lugares consecutivos?
42. Quantos são os anagramas da palavra PASTEL, onde as consoantes estão em ordem alfabética?
43. (FGV) Considere os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6. De quantos modos podemos permutá-los de modo que os algarismos ímpares fiquem sempre em ordem crescente?
a) 60 b) 120 c) 150 d) 181 e) 240
44. (Fuvest/11) Para a prova de um concurso vestibular, foram elaboradas 14 questões, sendo 7 de Português, 4 de Geografia e 3 de Matemática. Diferentes versões da prova poderão ser produzidas, permutando-se livremente essas 14 questões.
a) Quantas versões distintas da prova poderão ser produzidas?
b) A instituição responsável pelo vestibular definiu as versões classe A da prova como sendo aquelas que seguem o seguinte padrão: as 7 primeiras questões são de Português, a última deve ser uma questão de Matemática e, ainda mais: duas questões de Matemática não podem aparecer em posições consecutivas. Quantas versões classe A distintas da prova poderão ser produzidas?
c) Dado que um candidato vai receber uma prova que começa com 7 questões de Português, qual é a probabilidade de que ele receba uma versão classe A?
45. (Unicamp/04) Considere o conjunto dos dígitos $\{1, 2, 3, \dots, 9\}$ e forme com eles números de nove algarismos distintos.
a) Quantos desses números são pares?
b) Quantos desses pares têm exatamente dois algarismos ímpares juntos?
46. (ITA/71) Dispomos de seis cores diferentes. Cada face de um cubo será pintada com uma cor diferente, de forma que as seis cores sejam utilizadas. De quantas maneiras diferentes isto pode ser feito, se uma maneira é considerada idêntica a outra, desde que possa ser obtida a partir desta por rotação do cubo?
a) 30 b) 12 c) 36 d) 18 e) n.r.a
47. Vamos chamar de *arranjo* de um conjunto numérico, a qualquer ordenação dos elementos desse conjunto em que cada número apareça exatamente uma vez. Os números 312 e 231, por exemplo, são dois possíveis *arranjos* do conjunto $\{1, 2, 3\}$.
a) Determine o número de triplas (a, b, c) em que a, b e c são três números diferentes escolhidos de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ com $a < b$ e $b > c$. Justifique.
b) Quantos arranjos do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ contém os dígitos 254 juntos, nessa ordem? Justifique.
c) Um "pico local" em um arranjo ocorre se há uma sequência de 3 números no arranjo em que o número do meio é maior que seus dois vizinhos. Por exemplo, o arranjo 35241 do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ contém dois "picos locais". Quantos "picos locais" em média haveria nos 40320 arranjos do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$?



Combinações

48. (ITA/83) Um general possui n soldados para tomar uma posição inimiga. Desejando efetuar um ataque com dois grupos, um frontal com r soldados e outro de retaguarda com s soldados ($r + s = n$), ele poderá dispor seus homens de:

- a) $\frac{n!}{(r+s)!}$ maneiras distintas neste ataque.
- b) $\frac{n!}{r! s!}$ maneiras distintas neste ataque.
- c) $\frac{n!}{(r \cdot s)!}$ maneiras distintas neste ataque.
- d) $\frac{2 \cdot (n!)}{(r+s)!}$ maneiras distintas neste ataque.
- e) $\frac{2 \cdot (n!)}{r! s!}$ maneiras distintas neste ataque.

49. (ITA/07) Dentre 4 moças e 5 rapazes deve-se formar uma comissão de 5 pessoas com, pelo menos, 1 moça e 1 rapaz. De quantas formas distintas, tal comissão poderá ser formada?

50. (ITA/91) Uma escola possui 18 professores sendo 7 de Matemática, 3 de Física e 4 de Química. De quantas maneiras podemos formar comissões de 12 professores de modo que cada uma contenha exatamente 5 professores de Matemática, no mínimo 2 de Física e no máximo 2 de Química?

- a) 875 b) 1877 c) 1995 d) 2877 e) nda

51. (ITA/04) Considere 12 pontos distintos dispostos no plano, 5 dos quais estão numa mesma reta. Qualquer outra reta do plano contém, no máximo, 2 destes pontos. Quantos triângulos podemos formar com os vértices nestes pontos?

- a) 210 b) 315 c) 410 d) 415 e) 521

52. (ITA/96) Três pessoas, A, B e C, chegam no mesmo dia a uma cidade onde há cinco hotéis H_1, H_2, H_3, H_4 e H_5 . Sabendo que cada hotel tem pelo menos três vagas, qual/quais das seguintes afirmações, referentes à distribuição das três pessoas nos cinco hotéis, é/são correta(s)?

- (I) Existe um total de 120 combinações.
 - (II) Existe um total de 60 combinações se cada pessoa pernoitar num hotel diferente.
 - (III) Existe um total de 60 combinações se duas e apenas duas pessoas pernoitarem no mesmo hotel.
- a) Todas as afirmações são verdadeiras.
 - b) Apenas a afirmação (I) é verdadeira.
 - c) Apenas a afirmação (II) é verdadeira.
 - d) Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
 - e) Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.



53. Quantos são os p -subconjuntos (isto é, subconjuntos com p elementos) de $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ nos quais:

- a) a_1 figura;
- b) a_1 não figura;
- c) a_1 e a_2 figuram;
- c) pelo menos um dos elementos a_1, a_2 figura;
- d) exatamente um dos elementos a_1, a_2 figura.

54. (UFPE) De quantas formas podemos escolher, sem considerar a ordem, dois naturais distintos no conjunto $\{1, 2, 3, 4, \dots, 20\}$ de forma que sua soma seja múltipla de 3?

55. (ITA/06) Considere uma prova com 10 questões de múltipla escolha, cada questão com 5 alternativas. Sabendo que cada questão admite uma única alternativa correta, então o número de formas possíveis para que um candidato acerte somente 7 das 10 questões é:

- a) $4^4 \cdot 30$
- b) $4^3 \cdot 60$
- c) $5^3 \cdot 60$
- d) 4^3
- e) $\binom{10}{7}$

56. (FUVEST/04) Três empresas devem ser contratadas para realizar quatro trabalhos distintos em um condomínio. Cada trabalho será atribuído a uma única empresa e todas elas devem ser contratadas. De quantas maneiras distintas podem ser distribuídos os trabalhos?

- a) 12
- b) 18
- c) 36
- d) 72
- e) 108

57. Existem quantos subconjuntos de $X = \{1, 2, 3, \dots, 19, 20\}$, com três elementos, tais que o produto dos três elementos de cada subconjunto seja divisível por 4?

58. Um escritório tem 7 copiadoras e 8 funcionários que podem operá-las. Calcule o número m de maneiras de se copiar simultaneamente (em máquinas distintas, sendo operadas por funcionários diferentes) 5 trabalhos idênticos neste escritório.

59. (ITA/02) Quantos anagramas com 4 letras distintas podemos formar com as 10 primeiras letras do alfabeto e que contenham 2 das letras a, b e c?

- a) 1692
- b) 1572
- c) 1520
- d) 1512
- e) 1392

60. (ITA/94) Quantos anagramas com 6 caracteres distintos podemos formar usando as letras da palavra QUEIMADO, anagramas estes que contenham duas consoantes e que, entre as consoantes, haja pelo menos uma vogal?

- a) 7200
- b) 7000
- c) 4800
- d) 3600
- e) 2400

61. (Olimpíada Americana) As faces de um poliedro convexo são 12 quadrados, 8 hexágonos regulares e 6 octógonos regulares. Em cada vértice do poliedro um quadrado, um hexágono e um octógono se encontram. Quantos segmentos unem um par de vértices do poliedro e estão em seu interior? (ou seja, não são arestas do poliedro e nem diagonais de uma face)



62. (Epcar/06) Sejam os conjuntos disjuntos $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ e $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$. Pode-se formar n subconjuntos de $A \cup B$, com quatro elementos, nos quais não existem a_i, b_j com $i = j$ onde

$1 \leq i \leq 5$ e $1 \leq j \leq 5$. Nessas condições, o valor de n é igual a :

- a) 210 b) 80 c) 70 d) 60

63. (ITA/06) Considere A um conjunto não vazio com um número finito de elementos. Dizemos que $F = \{A_1, A_2, \dots, A_m\} \subset P(A)$ é uma partição de A se as seguintes condições são satisfeitas:

I. $A_i \neq \emptyset, i = 1, 2, \dots, m$

II. $A_i \cap A_j = \emptyset$, se $i \neq j$, para $i, j = 1, 2, \dots, m$

III. $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m$

Dizemos ainda que: F é uma partição de ordem k se $n(A_i) = k, i = 1, 2, \dots, m$. Supondo $n(A) = 8$, determine:

- a) As ordens possíveis para uma partição de A
 b) O número de partições de A que têm ordem 2.

64. Em quantos números de 4 dígitos $abcd$ (a, b, c, d são os dígitos), temos:

(i) $a < b < c < d$?

(ii) $a > b > c > d$

65. Há 11 homens aguardando sua vez em uma barbearia, entre eles André, Bruno e Carlos. Há uma fila de 11 assentos para os clientes. Determine o número de maneiras de arranjar os homens nos assentos de modo que André, Bruno e Carlos não ocupem assentos consecutivos.

66. (UFRJ/00) Uma estante de biblioteca tem 16 livros: 11 exemplares do livro “Combinatória é fácil” e 5 exemplares de “Combinatória não é difícil”.

Considere que os livros com mesmo título sejam indistinguíveis.

Determine de quantas maneiras diferentes podemos dispor os 16 livros na estante de modo que dois exemplares de Combinatória não é difícil nunca estejam juntos.

67. Quantos anagramas de 15 letras, formados por 5 A's, 5 B's e 5 C's não possuem A's entre as 5 primeiras letras, nem B's nas 5 letras seguintes e nem C's nas 5 últimas letras?

- a) $\sum_{k=0}^5 \binom{5}{k}^3$ b) $3^5 \cdot 2^5$ c) 2^{15} d) $\frac{15!}{(5!)^3}$ e) 3^{15}

68. (Olimpíada Mexicana) De quantas formas podem ser acomodadas em linha reta sete bolas brancas e cinco pretas, de tal maneira que não existam duas bolas pretas juntas?

69. (ITA/88) Considere (P) um polígono regular de n lados. Suponha que os vértices de (P) determinem $2n$ triângulos, cujos lados não são lados de (P) . O valor de n é:

- a) 6
 b) 8
 c) 10
 d) 20
 e) Não existe este polígono



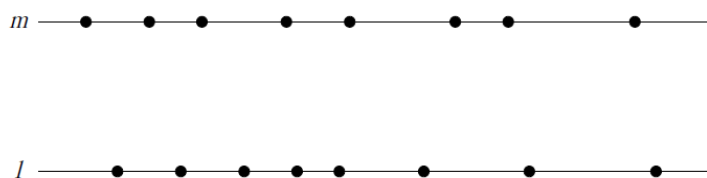
70. (Olimpíada Americana) Seja S o conjunto dos pontos (a, b) do plano cartesiano, tais que a e b podem ser iguais a $-1, 0$ ou 1 . Quantas retas distintas passam por pelo menos dois pontos de S ?

- a) 8 b) 20 c) 24 d) 27 e) 36

71. Considere um polígono de 18 lados, inscrito em uma circunferência. Formam-se triângulos ligando-se 3 dos 18 vértices.

- a) Quantos são os triângulos possíveis?
b) Quantos deles são triângulos retângulos?

72. Cada um dos 8 pontos destacados de uma reta r é ligado a cada um dos 8 pontos destacados de uma reta s conforme a figura abaixo. Suponha que não haja três desses segmentos que se interceptem em um mesmo ponto entre as retas r e s . Assim, quantos pontos de interseção existem entre esses 64 segmentos na região interior limitada pelas retas r e s ?



- a) 784 b) 824 c) 962 d) 1024 e) 4096

73. (UESPI/12) Um polígono convexo com 15 lados tem todos os seus vértices em uma circunferência. Se não existem três diagonais do polígono que se interceptam no mesmo ponto, quantas são as interseções das diagonais do polígono?

- a) 1360 b) 1365 c) 1370 d) 1375 e) 1380

74. De quantas maneiras é possível enfileirar 6 paraguaios, 7 argentinos e 10 brasileiros de tal modo que todo paraguaio esteja entre um argentino e um brasileiro, e nunca haja argentinos e brasileiros juntos?

75. Quantas são as funções $f : \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$ que satisfazem $f(f(x)) = f(x)$ para todo $x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$?

76. Um grupo de 11 ladrões decidiram armazenar o produto de um roubo em um cofre até que as buscas da polícia se encerrassem. Como nenhum deles confia totalmente em cada um dos outros, decidiram que o cofre só poderia ser aberto na presença de no mínimo 6 deles. Para isso, o cofre deve ser lacrado com um certo número de cadeados (a chave para cada um não abre nenhum dos outros) e para cada ladrão foi dado um certo número de chaves. Quantos cadeados serão necessários e quantas chaves serão dadas a cada ladrão?

Permutações com Repetição

77. Considere o conjunto de 10 letras $\{A, B, C, \dots, J\}$. Quantas palavras de 5 letras podemos formar a partir desse conjunto, que tenham exatamente duas letras repetidas?

78. Todos os anagramas da palavra SURITI estão escritas em ordem alfabética, como em um dicionário. Que posição ocuparia a própria palavra SURITI?

- a) 236^a b) 245^a c) 307^a d) 315^a

79. Quantos são os Algarismos de 7 dígitos nos quais o algarismo 4 figura exatamente 3 vezes e o algarismo 8 exatamente 2 vezes?

80. Quantos números inteiros de 4 dígitos podemos formar a partir dos dígitos do número 123124?

81. Considere os números de 10 dígitos que contenham apenas os dígitos 1, 2 e 3, sendo que o dígito 3 aparece exatamente duas vezes. Quantos desses números são divisíveis por 9?

82. Uma fila de cadeiras no cinema tem 10 poltronas. De quantos modos 3 casais podem se sentar nessas poltronas de modo que nenhum marido se sente separado de sua mulher?

83. De quantas maneiras podemos arranjar 4 bolas vermelhas idênticas, 4 bolas azuis idênticas e 4 bolas verdes idênticas em fila de tal forma que cada bola seja a adjacente a pelo uma da mesma cor?

84. De quantas maneiras distintas podemos colocar 12 moedas iguais em 5 bolsas de cores diferentes? E se nenhuma das bolas puder ficar vazia?

85. (UESPI/11) Um supermercado oferece 10 variedades de sopas em pacotes. De quantas maneiras um consumidor pode escolher 4 pacotes de sopas, se pelo menos 2 pacotes devem ser da mesma variedade?

- a) 500 b) 505 c) 510 d) 515 e) 520

86. De quantas maneiras é possível escolher três inteiros x, y e z , de tal modo que $xyz = 4000$? Observe que $x = 10, y = 10, z = 40$ e $x = 10, y = 40, z = 10$ devem ser consideradas escolhas diferentes, por exemplo.

- a) 24 b) 72 c) 120 d) 144 e) 210

87. (Olimpiada da Espanha) Quantas ternas ordenadas de números naturais (a, b, c) maiores que 1 são tais que $a \cdot b \cdot c = 7^{39}$?

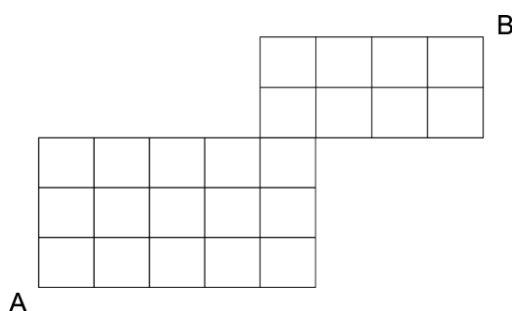


88. Quantas soluções inteiras da equação $x + y + z + w = 48$ existem, satisfazendo as condições: $x > 5$, $y > 6$, $z > 7$ e $w > 8$?

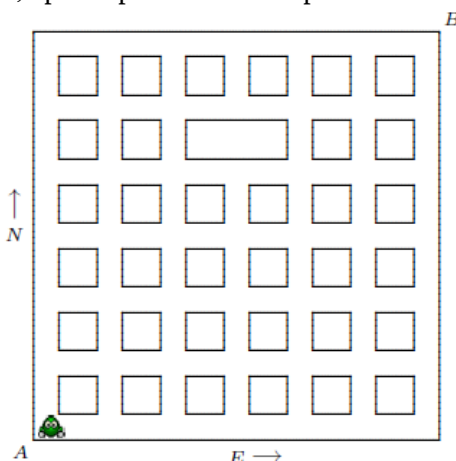
89. Quantas são as soluções da equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 20$ onde:

- Exatamente três incógnitas são nulas?
- Pelo menos três incógnitas são nulas?

90. (UFPE-adaptado) No mapa abaixo estão esboçadas as ruas de um bairro. As ruas verticais são paralelas entre si e a distância entre duas ruas consecutivas é a mesma; o mesmo acontece com as ruas horizontais. Calcule o número de formas de sair de A e chegar até B percorrendo a menor distância possível.



91. No diagrama abaixo calcule de quantas formas é possível mover o boneco da posição A até a posição B, andando sempre um quarteirão por vez, apenas para o norte ou para o leste.



92. (Olimpíada Americana) Considere um ponto que está na origem do espaço tridimensional (eixos x , y e z). De quantas maneiras podemos mover esse ponto pelo espaço, dando um total de 12 passos unitários, cada um deles paralelo a algum eixo, saindo da origem e indo até o ponto $(3,4,5)$ sem passar pelo ponto $(2,3,2)$?

93. Considere um conjunto de 7 chocolates a serem distribuídos entre 3 bolsas. A bolsa vermelha e a bolsa azul devem conter pelo menos um chocolate. A bolsa branca pode ficar vazia. De quantas maneiras é possível fazer a distribuição:

- se os chocolates forem iguais?
- se os chocolates forem distintos?

GABARITO

- | | |
|--|--|
| 01. a) 9^6 | 32. a) 46721 |
| b) $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$ | b) 5333280 |
| 02. C | 33. a) $8! \cdot 3!$ |
| 03. 10^8 | b) $7! \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$ |
| 04. 8 | 34. 43200 |
| 05. B | 35. C |
| 06. B | 36. A |
| 07. D | 37. 564480 |
| 08. E | 38. 504 |
| 09. 83193 | 39. 3600 |
| 10. D | 40. A |
| 11. 432 | 41. 604800 |
| 12. C | 42. 30 |
| 13. B | 43. B |
| 14. E | 44. a) $14!$ |
| 15. C | b) $6 \cdot 7! \cdot 4! \cdot 3!$ |
| 16. E | c) $\frac{6}{35}$ |
| 17. m^n | 45. a) $4 \cdot 8!$ b) $4 \cdot 5! \cdot 4!$ |
| 18. a) 20 | 46. A |
| b) 91 | 47. a) 20 |
| 19. $6 \cdot 4^{n-3}$ | b) 24 |
| 20. 512 | c) 2 |
| 21. 432 | 48. B |
| 22. a) 150 | 49. 125 |
| b) 729 | 50. D |
| 23. 7776 | 51. A |
| 24. B | 52. E |
| 25. 260 maneiras | 53. a) $C_{n-1, p-1}$ |
| 26. B | b) $C_{n-1, p}$ |
| 27. 864 | c) $C_{n-2, p-2}$ |
| 28. 24 | d) $C_{n, p} - C_{n-2, p}$ |
| 29. E | e) $2C_{n-2, p-1}$ |
| 30. C | 54. 64 |
| 31. D | |



55. A
56. C
57. 795
58. 141120
59. D
60. A
61. 840
62. B
63. a) Ordens 1, 2, 4 e 8
b) 105 partições
64. a) 126
b) 210
65. $8! \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$
66. 792
67. A
68. 56
69. B
70. B
71. a) 816
b) 144
72. A
73. B
74. $1980 \cdot 6! \cdot 7! \cdot 10!$
75. 196
76. 462 cadeados; 252 chaves
77. 50400
78. A
79. 24720
80. 102
81. 3150
82. 1680
83. 120
84. a) 1820
b) 330
85. B
86. E
87. 703
88. 1400
89. a) 3420 soluções
b) 3711 soluções
90. 735
91. 784
92. 23520
93. a) 35
b) 1932

